國立台灣師範大學數學系

112 學年度大學申請入學指定項目甄試試題

筆試一　計算證明題

說明與注意事項：
(甲) 本試卷共五題 (共二頁)，合計 100 分。
(乙) 作答時間 120 分鐘（下午 1：20 ～ 3：20）。
(丙) 請將計算或證明過程依序寫在答案本上，否則不予計分。
(丁) 交卷時答案本與本試卷一併交回。

一、 對於正整數 n，考慮整數 k 滿足 $0 \leq k \leq n$。令 T_k^n 表示將 1 到 n 這 n 個數字任意由左至右排成一列，其中恰有 k 個數字其數字與位置相吻合的排列數。例如 $n = 3, k = 1$ 時，$T_1^3 = 3$（因為僅有 $\underline{1}32, 3\underline{2}1, 21\underline{3}$ 這三種排列恰有 1 個數字與其位置相符合）。

(1) $\boxed{5\text{ 分}}$ 當 $n \geq 3$，試求 T_n^n, T_{n-1}^n 的值，並以 n 表示 T_{n-2}^n 的值。

(2) $\boxed{5\text{ 分}}$ 試求 T_1^4, T_0^3 的值，並以此說明一般情形之下 T_1^{n+1} 和 T_0^n 的關係。

(3) $\boxed{10\text{ 分}}$ 考慮 $n = 5$ 的情況。假設每一種排列發生的機率皆相同，令隨機變數 X 定義為：將 $1, 2, 3, 4, 5$ 任意排列後，其數字與位置相吻合的數字個數。請利用 $T_0^5, T_1^5, \ldots, T_5^5$ 表示數學期望值 $E(X)$，並求其值。

二、 設 A、B、Q 為三階實數方陣，滿足 $AQ = QB$。

(1) $\boxed{5\text{ 分}}$ 證明 $A^2Q = QB^2$。

(2) $\boxed{7\text{ 分}}$ 設實數 a, b 滿足 $a^2 + b^2 = 1$。令

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+b^2 & -ab \\ 0 & -ab & 1+a^2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & -b & 0 \\ b & a & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & -b & a \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

證明 Q, P 互為乘法反方陣，並求矩陣 B。

(3) $\boxed{8\text{ 分}}$ 承 (2)，求矩陣 B^{10} 以及 A^{10}（某些位置的“元”需以 a, b 表示）。

三、 已知 a, b 為滿足 $a < b$ 的正整數，且 θ 為銳角滿足 $\sin\theta = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}$。對所有正整數 n，令

$$A_n = (a^2+b^2)^n \sin(n\theta), \quad B_n = (a^2+b^2)^n \cos(n\theta).$$

(1) $\boxed{5\text{ 分}}$ 請以 a, b 表示 $\cos\theta$ 之值。

(2) $\boxed{5\text{ 分}}$ 試證對所有正整數 n，$A_{n+1} = A_nB_1 + A_1B_n$ 且 $B_{n+1} = B_nB_1 - A_nA_1$。

(3) $\boxed{10\text{ 分}}$ 試證對所有正整數 n，A_n 和 B_n 皆為整數。

—————— **背面尚有試題，請翻頁繼續作答** ——————

四、 坐標空間中，令 L_1, L_2 為平面 $E: x+2y+z=3$ 上，方向向量皆為 $(2,1,-4)$ 且距離為 $\sqrt{2}$ 的兩平行直線。考慮平面 E 上另兩個不平行的相異直線 $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$。設 $\mathcal{L}$ 分別與 L_1, L_2 交於點 P, Q，且 $\mathcal{L}'$ 分別與 L_1, L_2 交於點 P', Q'。假設 $\overline{PQ} = \overline{P'Q'} = \sqrt{5}$。

(1) $\boxed{8\text{ 分}}$ 請說明 $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ 的兩個角平分線之方向向量與 L_1 之方向向量之關係，並證明之。

(2) $\boxed{6\text{ 分}}$ 試求 $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ 的兩個角平分線之方向向量。

(3) $\boxed{6\text{ 分}}$ 試求 $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ 的方向向量。

五、 設 $f(x) = (x+3)(x-1)(x-4)$, $g(x) = ax^2 + bx + c$, 其中 a, b, c 為實數。已知當 $x \geq -1$ 時 $f(x) \geq g(x)$；而當 $x < -1$ 時 $f(x) < g(x)$。

(1) $\boxed{10\text{ 分}}$ 證明 $g(-1) = 20$。

(2) $\boxed{10\text{ 分}}$ 假設對任意的虛數 z（即非實數的複數），$f(z)$ 皆不等於 $g(z)$。證明 $g(-3) \geq 8$。