

# 國立台灣師範大學數學系

## 103 學年度大學甄選入學指定項目甄試試題

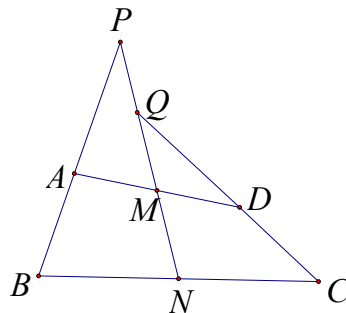
### 筆試一 計算證明題

說明與注意事項：

- (甲) 本試卷共五題（共兩頁），每題20分，合計100分。
- (乙) 作答時間120分鐘（下午1：20～3：20）
- (丙) 請將計算或證明過程依序寫在答案本上，否則不予計分。
- (丁) 交卷時答案本與本試卷一併交回。

1. 設整數  $x$ 、 $y$  滿足  $\log x + \log y$  為整數，但  $\log x$ 、 $\log y$  及  $\log x^3 y^2$  都不是整數，若  $x^3 y^2$  是一個 6 位數，則求所有的整數數對  $(x, y)$ 。

2. 如圖， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $M$  為  $\overline{AD}$  的中點， $N$  為  $\overline{BC}$  的中點，兩直線  $AB$  和  $CD$  分別交直線  $MN$  於  $P$ 、 $Q$  兩點。試證： $\angle APM = \angle DQM$ 。



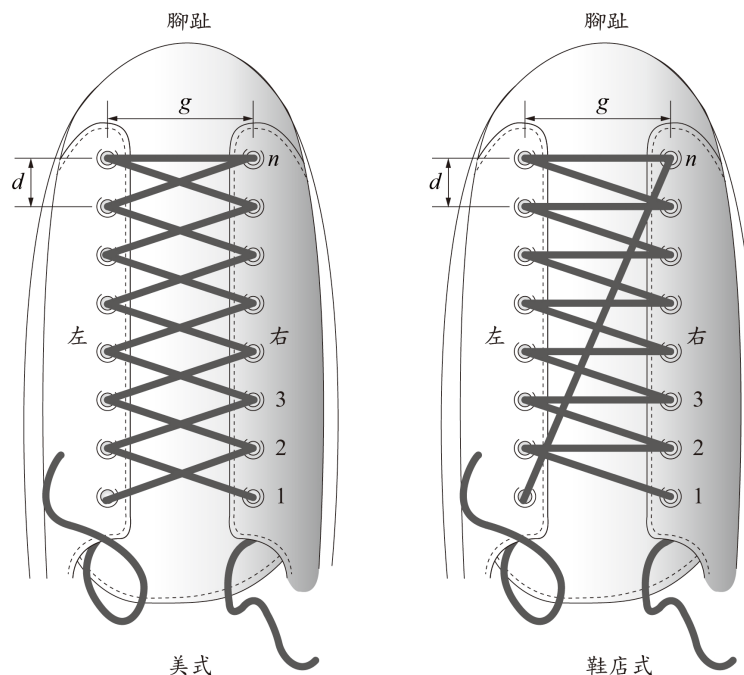
3. (1) 將多項式  $(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 4x + 5)$  表示成  $g(x)^2 + h(x)^2$ ，其中  $g(x)$  與  $h(x)$  均為實係數多項式。(5 分)
- (2) 將多項式  $(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 4x + 5)$  表示成  $g(x)^2 + h(x)^2$ ，其中  $g(x)$  與  $h(x)$  均為實係數多項式。(15 分)

4. 考慮  $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ ，滿足下列方程式：

$$x^3 + 8y^3 + \sin x + 2 \sin y \cos y = 0$$

試在  $xy$  坐標平面上畫出所有滿足上列方程式的點  $(x, y)$  之圖形。

5. 綁鞋帶的方式五花八門，以下兩個圖案是常見的綁鞋帶方式，美式綁帶法與鞋店式綁帶法：



圖中的符號  $n$ 、 $d$  及  $g$  分別代表：

- 數目  $n$  ( $n \geq 2$ ) 是指鞋子左右兩側各有  $n$  個鞋帶孔。
- 距離  $d$  (公分) 為相鄰兩孔的距離。
- 間距  $g$  (公分) 為左右對應兩孔的間距。

若在穿孔之後打一個蝴蝶結，左右兩側的鞋帶各需 15 公分，則在上述兩種綁鞋帶的方式之中哪一種方式所需之鞋帶較短？並證明你的結論。