師大數學

魔數師六

《突現》施茂祥

許多小的組成分子彼此相互作用後，會讓總體「突現」出一個新的、獨特的特質…

《音樂中的數學》謝佳叡

彈撥繃緊的弦所發出的聲音，其音高取決於弦的長度…

《好書推薦--阿草的葫蘆》

會有驚訝之感，原來數學也可以這樣貼近自己啊！

《五大常數》

如果你將π代入 x ，就會看到$e^{i\pi} = -1$，也就是$e^{i\pi} + 1 = 0$

《葉伴蓮》梓君

「小小姑娘！只要你願意，我，白玉辰就一定帶你離開。」

《蟬鳴》蒼月雫

那年的夏天，「知了知了」蟬鳴聲已成追憶…

《楓葉》蝸牛

這一年的冬天，讓我在數學營裡一待就是三年…

目錄

會長曰...

2003 春天，數學系系刊出版，是理性數學和柔性文學交會的時刻，同時也意味著我即將卸下重任。

不知不覺的已經到了大三的尾聲。還記得大一參加數學系的活動，因為年幼無知，就誇下海口一定要當上會長，為數學系的同學服務，當時的我可說是「人小心不小」，到大一下，我抱持著想幫師大同學做點事的心加入了學生會，沒想到一碰就是一年半，在這期間，因為辦活動的關係，對整個師大有很深的感觸，總覺得渺小的我能做的實在有限，對於學會會長的位置已經敬謝不敏。但最後還是出來了，因為我對數學系的心一直沒改變過，我的熱忱沒消散過，這也讓我堅持到現在。每年因為參與的角色不同，我的視野和心境也因此有所改變，從唯命是從的小大一到具有決策力的會長身分，這些不同的經驗豐富了我的大學生活，而我也很慶幸能為我的生活配上豐富的色彩。我一直相信著，掌握權是在每個人的手上，生活過的好或是壞，彩色或是黑白，個人的心態是很重要的，懂得轉換自如，知道自己所要追求的目標，每個人也都能恣意的遨遊在廣闊的藍天之下，在此也和各位分享。

時光飛逝，轉眼間數學學會將近尾聲，我很高興有機會能和所有的股長、股員一起為數學系所有成員服務，各位熱烈參與的心對我們而言就是最大的鼓勵，在此藉著系刊出版的機會，我要感謝一同走來的夥伴們，因為有你們，數學學會才能平安的過完這個學年；我還要感謝所有數學系的同學，因為有你們，數學系的動力、活潑和團結才能搭配的天衣無縫，讓我們成為別人稱羨的對象，真的很謝謝你們。

自認文筆不好，從沒敢投稿過系刊，這次卻有幸寫了會長的話，外加特權讓我的文章直接錄取，真是要感謝上蒼啊！

在此敬祝各位

天天順心

身體健康遠離 SARS

吳佩蓁 于 2003.5

突現

師大數學系教授 施茂祥

突現(emergence) 這個名詞是哲學家用語，用來說明「全部比各部分的總合來得大」。科學的一個基本問題是：個別行為如何總合成集體行為？諾貝爾物理獎得主Phillip Anderson在其1971年著名的文章(1)"More is different"說明物理已經相當透徹了解基本粒子、了解單一原子的個別行為。但是當一串原子聚在一起，突然間整個理論完全不同了，這說明了在一個系統中，許多小的組成分子彼此相互作用後，會讓總體「突現」出一個新的、獨特的特質。這個「突現」的特質點燃了研究複雜科學(Complexity)的開端(2)。

人類的中樞神經系統包含著數以萬計互相作用的個體，我們稱之為神經元。而每個神經元僅僅依循著少數一些規則運作著，但我們知道，由這些神經元所產生的集體行為卻是極其複雜：人類是如何思考？如何記憶？情緒如何產生？等等，這些深刻的問題至今仍舊深深的令人著迷。而要研究這些神經元集體的行為，單單只從研究神經元個體的角度出發已經漸漸的不可行，如今科學思考的新方向是從整體下手，也就是分析由個體所組合成的網路，試圖去了解這些看似簡單的個體，如何突現出集體行為的複雜現象。唯有充分掌握住突現的意涵—由小而大，由簡入繁—我們才能真正的解釋人類大腦所擁有的眾多複雜功能。

在1943年，McCulloch和Pitts首先針對神經元個體提出一個簡單的數學模型：他們把神經元個體看做是一個二元固定閾值的單元。這個理論不僅僅為以後神經網路的研究奠下良好的基礎，同時對於computer languages甚至是natural language的發展亦扮演關鍵的角色，也是科學家首度嘗試把精神活動看成資訊的形式來理解。隨後，在1949年，Donald Hebb對於神經元之間的連結關係—突觸—提出了一套看法，他的中心思想是：Cells that fire together, grow together.他更進一步的利用這個突觸增強理論，建立人類學習理論。

美國生物物理學家J.P. Hopfiled於1982的名著(3)試著解決神經元集體行為所產生的複雜現象，研究"可定址記憶問題"(Content-addressable Memory Problem)，他藉由1943年McCulloch及Pitts的神經元模型還有1949年Hebb突觸的增強學習法則，建構了一個能夠學習的網路，並利用能量最小法，證明

了當回想的運算是非同步執行時，則網路收斂至穩定平衡狀態。Hopfield的網路說明了只要很多神經元連結在一起，這些神經元就擁有計算能力，這是突現的明證，也是「網路理論」改變人類思想根本變革的明證。

科學最迷人的奧秘在於突現變化無窮的特性，突現的現象，您能在數學上發現嗎？突現的思考注入數學，期待有更深刻的數學產生。

參考文獻：

(1) P.W. Anderson, More is different, Science, 177,393-396,1972.

(2) M.M. Waldrop, Complexity: The Emerging Science at the Edge of Order and Chaos, Touchstone, New York, 1992.

(3) J.P. Hopfield, Neural networks and physical systems with emergent computational abilities, Proceedings of the National Academy of Sciences, 79, 2554-2558, 1982.

音樂中的數學

音樂中的數學
音樂中的數學

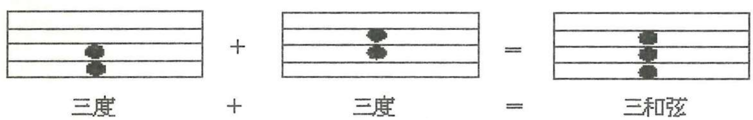
台灣師大數學系助教謝佳叡

對於自己所從事或研究的科目，由於是興趣的所在，研究層次也較他人更深更廣，在與其他各領域之間的關聯上，往往會凸顯它的地位與價值而強調其重要性，因此聽到某個領域的工作者誇稱該領域有多麼重要，也是自然而然的事了。但誰也無可否認，任何一門學科是難以長期單獨發展的，有各領域的相輔相成才能讓一門學科跨出自身的囿界，呈現更成熟、更多樣的面貌。數學也是如此。古希臘人對數字的崇敬影響了他們對自然與哲學的理性態度；沒有了透視、射影方法，就難以產生歐洲文藝復興時期主要的繪畫風格；邏輯學經由數學的論證方法與符號系統，讓它擺脫了語意的干擾而跨出了關鍵的一步；物理學更是數學的好伙伴，藉由數學的幫助，天文學、地理學、力學、航海學、經濟學...等也更加多采多姿。相對的，這些學科也刺激了數學的發展，將數學的理論付諸實踐，讓數學不再只是一門只能在腦中、紙上運作的抽象之學。

音樂也不例外。音樂史的研究與振動學、聲學、冶金、製造等科學技術一直有著密不可分的關係，自古以來，音樂和數學更有著不解之緣，就連數學上常用的「調和（harmonic）」一詞一般都相信是源自於音樂的用語。當然了，這不是說每個音樂家都是精通數學，或是每個數學家都彈得一手好鋼琴，而是這兩門學科在發展史上有著相伴而行的階段，特別是在音律上。音樂理論的基礎包含了「律學」，而「律學」是「聲學」的一部份，它是以物理和數學理論為基礎發展出來的，對於各種不同的律制和各音階音高的精密性，如不經由數學的推算與研究加以確定，光靠感覺是難以達到需求和統一的。

古希臘著名的畢達哥拉斯學派其信條是「萬物皆數也」。他們發現了兩件事實，觸發了用數學來整理音樂之念：（一）彈撥繃緊的弦所發出的聲音，其音高取決於弦的長度。（二）當彈撥長短不等的弦，其長度成「簡單」整數比時（請注意，對他們來說任兩線長都會成整數比）就會產生諧音。因

此畢達哥拉斯學派把音樂聯結為數和數之間的簡單關係。前一項是各音階產生的原理，這個簡單實驗可由吉他的琴格上看出來。例如彈撥吉他一弦和其半長的弦，音高恰好差八度；而一弦長所發出的音高如果為 C（即 Do），則其 3/4 長所發出的音為 F（即 Fa），其 2/3 長所發出的音為 G（即 So）。而後一項是和聲學的基礎，當部份長度成簡單整數比的弦同時發出聲音時(此指的是同材料、同緊度的弦），就會產生諧音，我們稱做和弦（chord）。一條旋律線配上和弦之後使得音樂的構造更充實且富有變化，便產生了「和聲」(harmonious）的觀念，而「和弦」及「和聲學」可以說是西方音樂發展的命脈，因此音樂成了「萬物皆數」的最佳實例。

另一方面，數學也解釋了部分音樂的現象。例如將兩個三度音程疊在一起所產生的和弦稱做「三和弦」，若三和弦是一個大三度疊一個小三度，就叫做『大三和弦』(如1 － 3 － 5）；相反的，就叫做『小三和弦』(如6 － 1 － 3），但如將這兩個和弦做一對比，則『大三和弦』聽起來更為和諧。從數學的角度解釋，那是因為『大三和弦』的比為 3：4：5，較『小三和弦』的比 10：12：15 更接近『簡單』整數比。

畢達哥拉斯學派也把行星運動聯結為數與數的關係。他們相信物體在空間運動時會發出聲音。物體運動的越快所發出的聲音也越高(管樂即是利用空氣運動，以發出不同音高的聲音)。根據他們的天文學，離地球越遠的行星運行越快，發出的聲音也越高，而且各行星間所發出的聲音都配成了諧音，此即所謂的『天體音樂』。由此可推知，對他們而言，行星的運行速度及距離的遠近間也存在一個美妙的關係，宇宙天體的模型理論也必然遵循著數學的原則。因此，算術(純粹數)、幾何(固定數)、與音樂(應用數)、天文（運動數）聯結在一起，併稱為希臘的四學科，甚至到了中世紀，這「四學科」仍被包括在學校課程中。

克卜勒（Kepler ，1571 － 1630）承接了這個理論，在他的著作 Harmonices Mundi（Harmonies of the World ，1619）裡，企圖找出這些星球成和諧比例的關係。他在試過了體積，質量、速度，週期及公轉半徑...後，最後終於得到答案。土星的遠日點和近日點比為4：5，是一個大

三度；而火星的為2：3，是完全五度。木星的遠日點與土星的近日點恰為1：2（八度），他甚至發現，若將這些行星關係給一個共同調性，由土星的遠日點開始算起恰為一個大調音階，近日點算起則為小調音階。一般相信，克卜勒的這個發現與他不朽的三大定律息息相關。

	I	II	III	IV	V	VI	VII	I
音 階	C(Do)	D(Ra)	E(Mi)	F(Fa)	G(So)	A(La)	B(Si)	C(Do)
大二度	8 :	9						
小七度		9			:			16
大三度	4	:	5					
小六度				5		:		8
完全四度	3		:	4				
完全五度				2		:		3
完全五度	2	:	3					
完全四度					3		:	4
大六度	3		:			5		
小三度								
大七度	8			:			15	
小二度							15	: 16
八度音階	1				:			2

在音程的確定上，畢達哥拉斯這個希臘哲學家兼數學家用數學方法研究音階的定義法則，找出了音樂史上影響深遠的「五度相生律」；柏拉圖的老師阿基塔斯（Archytas，400 － 365 B.C.）在音程方面一些理論上的創見創造了「純律大三度」的音程；數學家伊拉托斯瑞那斯（Eratosthenes 276 － 195 B.C.）發現了「純律小三度」音程（順道一提，此人利用了一根竹竿及一口井算出了地球圓周，與近代測量的數目誤差僅100公里）；天文學兼數學家托勒密（Ptolemy ？－ 168）構造了一種純律的「四音列」。畢氏學派成員之一尼克馬庫斯（Nichomachus 大約紀元後100年）把各種比例加以分類並給予命名，認為研究比例對自然科學和音樂非常重要，並且稱a：（a＋b）/2 = 2ab／（a＋b）：b為「音樂比例」。（請不要將這個比例想得太複雜，仔細觀察內項便能發覺妙處，代入a＝1，b＝2就更能體會為此稱呼的精神。）

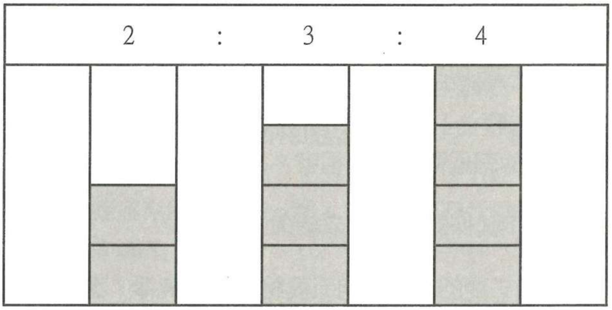
尋找幾何平均數對音階的確定有著絕對的影響。阿基塔斯利用兩個數之間的兩個比例中項嘗試去解決『倍積』問題，相同的，這個方法也被用在音階的找尋上。而『音樂比例』在音樂理論中就是試圖確定八度音階，尋找1和2之間的幾何平均數，有人甚至認為這是導致無理數發現的因素之一。

十八世紀起，歐洲進入了十二平均律時期，所謂十二平均律就是把一組

八度音，按頻率等比分為12個『半音』(又是幾何平均數)，其中後一音的頻率為前一音的$\sqrt[12]{2}$ = 1.05946倍，國際間目前以A(La) = 440.00赫茲為標準音調，如升一個半音：$A^{\#}$為440 ∗ 1.05946 = 466.1624決了半音音程上的困擾，舉個例子來說，我們知道在G(So)跟A(La)之間是一個全音(或想像成兩個半音)，在十二平均律之前，G升一個半音($G^{\#}$)和A降一個半音(A^{b})卻不是同一個音[註1]，因此在當時的大鍵琴上(鋼琴的前身)，半音鍵上還有一個小鍵就是分別代表這兩個音(夠複雜吧！)，十二平均律後這兩音才合一了。十二平均律的另一個優點，就是易於轉調，也就是你可以由任一音當C(Do)開始一個大調音階，這種現象除了用數學方法解釋以外別無他法，因為每個音之間都前後公比都一樣。十二平均律這麼數學的音樂創新，對音樂發展的影響，尤其是近代的鍵盤樂器，是無法估量的。

之後，法國音樂理論家拉莫(P．Rameau 1683－1764)深受笛卡兒(R．Descartes)的影響以物理學作為和聲理論，完成了【和聲論】，奠定了近世和聲學基礎。振動弦(vibrating string)所引發的問題更帶來數學界無限的活力，如偏微分方程、富立葉級數、集合導論，不少１８世紀的數學家因而致力於常微分方程和偏微分方程等新興學科的研究。泰勒(B．Taylar 1685－1731)在確定振動弦的形狀問題時，首先引進二階常微分方程，導出了一根伸張的振動弦的基頻。丹尼爾．伯努利(D．Bernouli，1700－1782)和他父親約翰．伯努利(J．Bernouli，1667－1748)都曾為音樂理論做過工作。但在弦振動的諧音或高階模式方面丹尼爾超過了泰勒和他父親，對顫弦上較高泛音及和聲有更深一層的認識。尤拉(Euler 1707－1783)也做過這方面的研究，得到與丹尼爾很相似的結果。

至於在中國這邊，古籍中記載律學理論，以【管子．地員篇】為最早。該書相傳為管仲所作，書中把五音的精密作了完全合乎科學的論斷，即從數學的角度提出了「三分損益」律，把一個振動體(如琴弦)在長度上三等分，捨其一形成三分之二，稱為「三分損一」；加其一形成三分之四，稱為「三分益一」，如此繼續相生而成各律。這種方法分別得到2：3與3：4的振動體，形成了純五度和純四度的音程，這與畢達哥拉斯所創的五度相生律完全相同。



C－－－－－－G－－－－－－C

F－－－－－－C－－－－－－F

繼管仲後【呂氏春秋．音律】把三分損益法由五律推廣到十二律，使音樂調式的範圍擴大，可在十二律上進行「旋宮轉調」，也可看出儘管在不同地區，這種純粹的知識是有其共通性的。五律中由各音為主音所構築出來的音階對旋律的外形與情緒有極大的影響（因為比例有了調整），而被分為宮、商、角、徵、羽五種調性，每一種調性都被賦予一種心情的代言。受陰陽五行之說的影響，五聲「宮、商、角、徵、羽」與「金、木、水、火、土」及方位又被聯繫起來；而十二律按陰陽也被分為陽六律和陰六律，此和十二地支，星象十二宮、十二月分也相聯繫，產生了許多與命理有關的論點，姑且不論其中玄學部分，從另一個角度來看，這些聯繫就離不開數學在古代的重要功用之一－－－－「與天溝通」。

後記

本文原刊於HPM通訊第二卷第八、九期中，在數學系學會計劃出一本「數學與文化」相關的系刊時，請我提供一篇關於數學與音樂相關的文章，因而找出原文稍作修改（順了順文句，加了些說明）重新刊登。這種炒冷飯的作法實有怠惰之嫌，然而，一來學會幹部看過原文，認為十分符合他們的需求；二來這篇文章當初實在下過功夫，自認為也寫不出更好的了。加上刊登也有些時日，想來也沒幾人看過，就這麼個一魚雙吃也算是另一種舊雨新知吧！

大學時代加入了合唱團，有機會接觸到樂理，也因而特別留意與這個標

題相關的資訊，這也促使本文的產生。本文的主要目的不是想闡述：「你看，數學有多麼偉大，什麼都跟離不開它！」，而是想為「數學不會自己玩自己的」提供一個實例。其實只要稍加留意，就會發現坊間這一方面的資料不算少數，本文提到的絕對只是鳳毛麟角，有太多可深究的議題可以探討，例如振動弦為何會跟偏微分方程扯上關係？五度相生真能生出十二個音？十二平均律的無理數比跟純律的有理數比怎麼相容？...

最後也學學其他書列幾本延伸閱讀，當成結束。

註1：在十二平均律以前主要的音程來自五度相生律或純律，這些都是由一些整數比例所生成，由於較吻合於人的感覺，因此也稱為自然音階。在這個規則下，半音跟半音之間也是一個整數比，除非這個整數是一個幾何平均數，否則由底下的一個音升半音是不會跟上頭的音降半音相同的。不幸的是，此時的整數比不會是幾何平均數。

還有另一個試驗方式，可以體驗一下自然音階(不過這個方式需要有一點點的音感）。你從Do開始音階往上唱到高音的Do，再從高音的Do唱回來。多唱幾次，並仔細的感覺Si這個音，你會發現往上唱和往下唱時Si這個音是不一樣的，往上時Si這音個會略高而傾向於高音Do。這並不是錯覺，而是人的自然感覺。

參考書目：

1.Victor J·Katz(1993)，A History ofMathematics，HarperCollins College Publushers·

2.Morris Kline(民72)，數學史－－數學思想的發展(上)(中)，林炎全等譯，九張出版社

3·龔鎮雄、董馨(民84)，音樂中的物理，牛頓出版社，台北市

延伸閱讀：

1．龔鎮雄、董馨（民84），音樂中的物理，牛頓出版社，台北市（主要介紹音樂和物理之間的關係，與本文異曲同工）

2.Douglas R．Hofstadter（1979），Gödel，Escher，Bach：an Eternal Golden Braid，Basic Book，Inc．（一個數學家、一個畫家、一個音樂家竟然被連在一起，之間到底有什麼關係？絕對值得一讀的好書，而且有中譯本）

3．Edward Rothstein（2001），心靈的符號－音樂與數學的內在生命，李曉東譯，吉林人民出版社（閱讀本書像一個音樂之旅，也像一個數學之旅，描述兩者之間的深層相似，閱讀時要帶一點文學氣息，不過是簡體字版，在找不到原文的情形下不妨一讀）

4．曹亮吉（2003），阿草的數學聖杯，天下文化（剛出爐新書，主要是對pattern的探索，其中第三篇提到不少相關於數學和音樂的關連）

5．謝佳叡（2000），HPM2000論文發表讀後感，HPM通訊第三卷第八、九期（HPM2000國際研討會熱情的巴西學者Oscar的發表將音樂教材用於數學教學上的實例，由筆者作一個心得分享，野人獻曝一下）

好書推薦－
阿草的葫蘆－文化活動中的數學

本著這次系刊主題一人文數學，我們挑了本好書想跟大家分享。阿草的葫蘆在講的就是人類文化活動中的數學，也許有些人的數學跟生活是分開的，但在唸這本書的時候，常常會有驚訝之感，原來數學也可以這樣貼近自己啊！希望帶著大家一窺數學的另一番風貌。這本書也許有時會讓你覺得某些部分相當深奧難懂，但不用勉強自己，慢慢看就會懂的，即使不懂，跳過去也無所謂。

全書14章，每章分別由學術股內不同的人撰寫，以各章順序陸續介紹，內容包含心得以及此章的簡介，我們所寫的文章唸起來或許會有些難懂，也許是不自覺的假設大家都看過此書而作此文的關係，建議自己也去找這本書來看看，再來分享我們的心得，這樣會更有收穫也不一定喔！

※接下來的文章，參考資料來自於：

阿草的葫蘆－文化活動中的數學　曹亮吉著　遠哲出版

我的墓碑我來刻

鄭宇晴

數學，要緊的是概念而不是符號。－Guass

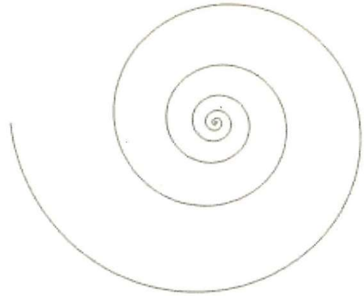
當課本談到算數級數時，往往提起Guass小時計算1＋2＋3＋…＋100的故事；Guass是一個十九世紀最具代表性的科學家，在他十歲的時候，有一天老師考了此題，全班同學們一個個都在埋頭苦算，但Guass以配對法〈1＋100＝101、2＋99＝101、…，共有50個101，所以答案是50×101＝5050〉在幾秒內就解出了此題；這件事是Guass的數學生涯中第一個轉折點，因為這件事，老師與助教倆人勸説Guass的父親答應讓他學數學。

Guass在老師與助教的協助下繼續求學，他的博士論文—代數學基本定理，把前人的缺失一一指出，並提出自己的見解；同時他在論文中使用的存在型的數學證明是劃時代的方法，因為自古以來，數學的證明往往是『實體必先找到〈建構型〉，再談找到的是否是要找的』。從Guass開始，這種存在型數學逐漸蔚為風氣，變成現代的代數學的特色之一。另一方面，Guass的研究觸角上天下地，在1801年1月1日有一顆星飛向太陽，Guass只觀測三次就利用他於1794年已發展的最小差方法，計算出它的軌道，從此開始他數學家與天文家的一生。

然而在Guass十八歲之前，事實上他還沒有決定要做個數學家或語言學家，因為在這兩方面都有相當的天份。十九歲那年(1794)，他以直尺圓規做出正十七邊形，因此就在滿二十歲的前一個月正式決定成為數學家。能做出正十七邊形，讓Guass感到很自豪，他告訴友人説，他的墓碑上一定要刻正十七邊形。

墓碑留圖的傳統是從Archimedes開始的，因他證明了圓柱含球這樣的圓柱和球兩者的體積比和表面積比一樣，都是3比2；雖然他的墓碑早已湮沒不可考，但是根據古羅馬時代一位政治家的著述説明了他的墓碑上刻有此圖。其後Stevinus〈這位仁兄比Galilei更早注意到落體的問題〉考慮到斜面上的靜力學問題，在他之前，大家都只會考慮平行的力，同樣的，Stevinus也頗為自得，要人刻在他的墓碑上。

同樣的，瑞士的Bernoulli世家——一共產生了十三位著名數學家的家族。其中 Jacques I 一生中最鍾情於等角螺線〈經過大部分數學變換之後，依然還是等角螺線〉，他在欣賞之餘，還要人在他的墓碑上刻上等角螺線Eadem mutata resugo〈拉丁文〉—歷劫不變。可惜的是，墓碑上的等角螺線變成了Archimedes螺線〈等距螺線〉！(按：有興趣的人可以看看《毛起來說 e 》P.178)



然而Guass留圖的願望也沒有如願以償，倒是他的故鄉〈Brauschweig〉的Guass紀念碑上刻著一顆十七星形。因為負責的雕刻家認為，正十七邊形實在跟圓形太像了，所以大家一定分辨不出來。記取Bernouli和Guass的教訓，墓碑千萬要自己刻呀！

你有沒有什麼東西值得刻在你的墓碑上向後人炫耀？或是讓人一看到就可以想到你曾經存在？Guass經歷了兩次人生的轉折而踏上數學家的道路，你的人生現在確定了嗎？把握自己的選擇，努力留下值得後人欣賞與討論的東西，相信你的未來一定會是光明燦爛的。

平行線的交點

許勝溢

平行線，這個概念屬於幾何學，這章就是在介紹幾何。

講到幾何，就一定要講到Euclid，《幾何原本》(簡稱《原本》)這本書大家都聽過吧？也很少人不知道這本書就是Euclid的大作，據說印刷次數僅次於聖經。這本書很重要，他是世上頭一本將所有理論架構在公設系統上的專書，也就是說，在唸這本書的時候，你唯一需要接受的就是那幾個簡簡單單的公設，其他的論述只要你接受了公設，自然就會接受，他會說服你。

這麼說來，《原本》很厲害，無懈可擊囉？沒錯！在那個時候他可是創舉，看起來相當完備，然而以現代數學家的眼光看來，卻還是有漏洞。在近代有位叫做Hilbert的數學家，才將公設重新架構，真正完備了幾何的系統，但是誰知道會不會在未來數學家的眼光中，又是有漏洞的呢？

那《原本》這本書到底在說些什麼呢？大部分是幾何學，其他甚至有代數方面的，在那個時代還沒發展出未知數的概念，所以他用幾何的方法來解釋代數恆等式，雖說在今日沒什麼價值，但是這樣的創意卻沒幾個人想得到吧。有幾個相當有名的定理其中都有證明，例如說畢氏定理之類的，畢氏定理據說目前有三百多種證法，也許自己也可以試著證證看喔！

這本好書，我們中國是在1582年，利馬竇來華的時候才接觸到的。那時候他跟徐光啓合譯了這本書，定名為《幾何原本》，只翻譯了一部分，剩下的要等清末的時候才由李善蘭譯完。現在我們視之平常的很多幾何名詞、形容詞之類的，都是那個時候傳下來的，什麼曲線、平行線等。想想那時他們還真是厲害，很多詞都造的很貼切，而且國內也沒有可供參考的對應名詞，完全是無中生有的。

跟中國古代的數學比起來，中國的算書一向都是先舉兩三個例子，說明解法，再說明通解，然而卻沒說明為什麼可以這樣解。《原本》演繹式的數學，對國內造成不小的影響。

《原本》著名的第五公設(也是本章標題的原因)，早就讓一堆數學家看不順眼了，因為他很冗長，看起來又好像可以從其他公設推得，所以許多人嘗試著把他去掉，然而卻都失敗了。不過這樣的嚐試卻帶

出了另一門相當重要的非歐幾何，合乎邏輯卻違反直覺，卻是宇宙空間中的幾何。神奇吧！數學一路走來，就是有這樣的意外、一樁樁有趣的故事...

　　很多故事都略去不談，但希望有興趣的朋友能自己去找出來看看喔！像是對第五公設的嚐試又是如何生出非歐幾何呢？

十九年七閏

十九年七閏

張嘉福

相信大家都有過兩次中秋節的經驗吧，而最近一次閏八月是在民國八十四年，我覺得很神奇的，就是為何農曆有時是閏八月，有時是閏五月，而不是像國曆一樣，固定每四年一閏，逢百年又不閏，四百年又再閏，而且是固定二月多了一天，由二十八天改成了二十九天。國曆的原理比較有規律，因為每一年共有365.2422日，所以才會有以上的規則，但陰曆則較為複雜。小時候的我，就存在一個疑問，為何每次農曆過年時，國曆的日子都會不一樣；為何每過十九年，國曆與農曆的生日會相同；為何陰曆一個月會只有30或29天，都是當初讓我產生疑惑的地方。這次在各種因緣際會之下，我看到這本書，書中對於曆法的詮釋，我覺得頗為清晰，也不會艱澀難嚼，可以作為國中的課外讀物。且書中以與生活相關的數學為主，是一本相當不錯的讀物。

我看的部分，是與日常生活息息相關的日期變化。本章除了介紹曆法的改變與如何計算曆法之外，還有天干地支、生肖等等相關的東西。一開始以輕鬆的對談導入對於曆法的觀念，之後開始介紹曆法。我從書中發現，原來對於曆法困惑的人，非常的多，原因是各國採取的曆法制度不同之外，還有古代的曆法制度尚未相當完全。如在凱撒時期，就曾出現過一年有445天的情形。一開始最早使用的曆法是陰曆，因為人類社會的演化乃是採集、漁獵進而農耕，之後更衍生出其他職業，但在這之前，中國人乃是以農立國的，所以古代的祖先們採用農曆，這我覺得很正常，但我發現一件我以前都沒注意到的事，那就是農曆並不等於陰曆。就我以前的印象，並沒有人很強烈的告訴我這件事，所以當我得知時，我覺得有點驚訝。書中提到説，其實農曆是陰曆再加以修改的，它其實是陰陽合曆。我從以前只知道國曆的修改過程，但農曆的由來倒是第一次聽説。繼續讀下去，才知道陰曆這詞，是只用在調和日月的關係，而未與季節變化搭配。但對於未與季節配合這件事，對一個農業國家而言，是相當嚴重的事情。你若配合時節耕作，必定無法有好的收穫，沒有人會在寒冬種稻子的吧。所以當你看純陰曆上明明就是十二月了，但卻有可能已經是春天的天氣，如現在的部份回教國家，依然採取純陰

曆的制度。之後我回想以前對於閏月的記憶，發現似乎只有幾個月比較有機會是閏月，從來都沒遇過兩個閏正月，無法理解閏月的制度到底是怎麼規劃的。之後發現，原來閏月真的是很神奇的數學，因為一年是365.2422日，一陰曆月有29.54306日，兩者相除，其值約為12.368，所以每年有十二個月。至於0.368的部分約為7/19，所以定十九年中，共閏七次月，這也是為何每個人今年的生日與十九年前的生日的國曆跟陰曆相對的日期會相同的原因。之後書上介紹兩種閏月的方法，一種是以節氣定的，把一國曆年24等分，並劃分為十二中氣與十二節氣。當兩中氣相距達到三十日以上，則誕生一個閏月，這就是所謂的定氣。至於另一種，稱之為平氣。平氣的方法，雖然多了更多的科學根據，但卻讓有些閏月不會出現。根據克卜勒第二定律，地球並不會等速前進，所以在清朝有外來的科學家，採用把中氣不等間距的排法，這也是流傳至今的曆法。而因為採取這樣的排列方式，使得閏正月、閏十一月及閏十二月都變成了不可能。

另一項對中國有特別意義的就是天干地支了。首先，在引入地支之前，先把它與生肖作為連結。因為地支與生肖二者恰巧皆為十二個，而我們又對生肖較為熟稔，所以從此引入讓我覺得讀起來，更是快速。稍微簡介一下書中所敘述的推算法：首先有一個地支與生肖的相對表，其中子對到鼠，而亥對到豬，所以可以從生肖推出地支以外，還可以直接從西元紀年上直接去推算，其中因為1994年是狗年，然後我們把1994除以12，可得餘數2，再把2放到時鐘上，並把狗的順序也放到時鐘上，發現兩者差3，所以我把它稍微做了一下整理，其中西元的年數除以12的餘數減掉3即為該年的生肖，再搭配地支與生肖的對照表，便可很快的知道該年的地支是什麼了。天干的規則更為簡單，因為它只有十個，跟一般數字的十進位搭配起來，更是淺顯易懂。首先，我們得知1994年的天干是甲，之後每過十年，天干會循環一次。也有另一種更為精簡的算法，就是把西元紀年的個位數字減去三，所得的數極為該年天干中的順序，若減出來有負的，就自動加上十就可以了。

就難易度而言，這章對我們並不會很困難，但它所介紹的東西相當有趣，也讓我們發現，原來日常生活所使用的日曆，居然包含著這麼大的學問。也讓我理解到，一個地方的數學，必定與其文化有相當大的關係。

蛛網上的串珠

賴瑩綺

這一章由作者初中時代的生活插曲揭開序幕，到了高中，學習過指數與對數的概念後，作者靈機一現，有了數學的論證來支持他的想法，推到六十四代遠祖，對於現今的曹姓的人而言，產生血緣上的影響僅僅只有十億分之一，而又從另一個角度來看，某一支追查上去的某一個祖先也許也是可以由另一支追查到的，這些人有許多是重複的。這兩種觀點全是由合理的數學邏輯來解釋，產生了令人和平共存的詮釋，微笑落幕。就以這樣一個有趣的例子看來，生活中的許多思維，也深深對對數以及指數這兩個高深莫測的數學運算，衍生出來的代表涵義感到興味盎然！

在第一小節，作者將同一時期（約十八至十九世紀）中西對照，竟意外發現一種同樣論調，清朝學者洪亮吉曾為文，户口數的增加比田屋數的增加要快得多，英國經濟兼人口學家也提出如果毫無限制，人口數如幾何數列的增加，但物質生產不過以算數數列的增加，Malthus提出的人口成長數學模式很不錯，有相當的準確性及分析。然而，理論是理論，人口數的消長還有許多影響的因素，食物、醫藥、疾病、社會變遷以及戰爭，都大大影響了人口的增長量，而科技的突飛猛進也左右了人口數，所以理論的定量預測只適用於短暫的穩定期間，是否能找出更好的辦法來面對人口數的問題仍有待努力。

對數和指數並非在數學領域的研究上孤芳獨賞，在人口數學、族群大小的變化、利息的計算方式、放射性元素的衰變、碳14定年法，甚至於科學研究中星系的運行，都和對數指數有強烈的關係，涵蓋了人口學、化學、物理天體學，如果說它是得天獨厚的一門學問，地位是無庸置疑的了！

另外，作者提到非常有趣的自然界中的指數函數－－e寫在蜘蛛網上，"符咒式的e又出現了，就寫在蜘蛛絲上，在有霧的清晨，仔細看看昨晚織成的蜘蛛網，黏性的蜘蛛絲負著水滴的重量，變成一條條懸垂線，水滴順著彎曲排成精緻的串珠。當陽光穿透霧氣，帶著串珠的整個蜘蛛網輝映出虹彩七色的亮光，就像一叢燦爛的寶石，榮耀歸於e這個數"，多麼美的一段描述，發覺自然中數學之美，許許多多不為人知的數學奧妙蘊藏在這萬物中，被數學教科書制約的學生們，如果能親身感受，領悟原來數學一直在身邊，也讓我們的世界在變化萬千中找到一種規律的美感！

嫦娥離我們多遠

許文寧

你也許沒想過下列這些問題：埃及的金字塔有多高？月亮離我們有多遠？甚至是緯度或經度一度的距離有多長？在現代科技的日新月異之下，我們可以使用的測量儀器越來越多，也越來越精密。要測量這些問題對我們來說並不是一件非常困難的事，但是，以前的人是要怎麼解決這種問題呢？他們手邊沒有我們這樣精密的儀器輔助，但是卻也想出了一些簡單的方法求出答案，滿足了他們對這個世界的好奇心。

我們都知道在古老的埃及，尼羅河每年一次的氾濫之後，埃及人必須重新精準的丈量分割土地，所使用的就是三角測量的方法。而在三角測量中最為大家所知的例子，應該算是古希臘的數學之父–泰勒斯，他在遊歷埃及的時候，用了一種簡單的方法，輕而易舉的測出了金字塔的高度。他選了一個天氣晴朗的日子，在金字塔旁設立一根小木棍，利用木棍陰影長度的變化，等到陰影長度恰好等於木棍長度時，測量金字塔的影長。就這樣巧妙地利用了相似形的概念，得知了金字塔的高度。

其實，這種相似形的運用，不只可用來測量金字塔的高度，還有一個有趣的例子，在希臘愛琴海附近有一個叫Samos的小島，因為首府Samos處於缺乏飲用水可用之苦，決定開挖山洞，以便於將山另一頭的泉水導引過來，可是要如何讓分別從山的兩頭開始挖的工人接在一起呢？當時的工程師Eupalinus在首都和泉水之外，找了一個不共線的參考點，讓三地成為一個三角形，並且在地上畫了一個與其相似的小三角形，利用了三角形相似其角度相同的道理，求出了挖山洞的方向。可是地勢高低起伏不平，角度也不容易測量的很精準，所以當山洞挖到中間的時候，並沒有接在一起，只好用一個迴彎來接通。雖是沒有真的完全連通，但在以前其實已經是個不錯的成就了。從這裡也可以看到，在我們應用數學來處理問題時，通常把實際情形「理想化」了。所以，得出來的答案往往也就是近似值而已。

把這個有趣的小問題，試著用我們所學過的餘弦律來看，既然已知兩地到參考點的距離，亦可求得之間的角度，其實可以把相似的小三角形給去掉，只要利用三角形本身，加上餘弦率就可以解決了。事實上，相似形的原理本來就是三角學的起源，我們在清楚相似形原理的本質後，以正弦、餘弦定律和三角函數值表來取代之，轉移到抽象的三角形中，就進入三角學的理論了。這些理論也許很簡單，但是它們在生活上的運用卻是無遠弗屆的呢！如果你也想知道嫦娥離我們有多遠，可少不了他們喔。

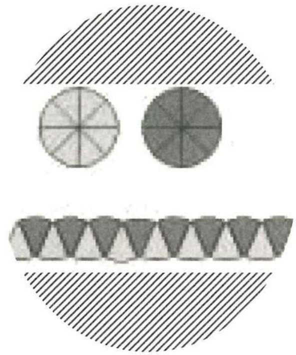
山不轉人轉，咫尺可以量天涯，善加利用三角學，玉兔搗的藥，嫦娥吃了到底有沒有效？你也可以自己找到答案！

圓

劉晉宏

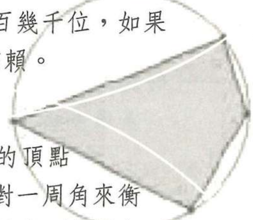
本章從一位名叫「賓漢」的美國歷史學家拉開序幕，賓漢來到祕魯想找尋失落的古印加城市，經過千辛萬苦、跋山涉水終於來到了目的地，遺跡上有著道路、石階、建物、神殿、家屋。但從目的地遭竊的情況來看，讓他覺得這地方不是他所想找的地方。他有些失望但又為這些巨石組合成的建築物產生了疑問：「印加人不會用滾木、不會用車子、不會用滑輪，他們是如何把這些巨石運到此處的？」，和十六世紀征服印加的西班牙人一樣，他為印加人沒有動圓（滾木、車輪、齒輪…等）的高度文化感到讚嘆不已。但這並不代表印加人沒有圓的文明，他們用泥條逐漸加高，盤旋而上造出了精美的陶瓷；他們崇拜太陽神，當然有圓的觀念。那是靜態的圓，雖然動態的圓使這世界變的多采多姿，靜態圓文化也不失其偉大之處。此外還有抽象的圓，被運用在注意星球運動的變化，而天文的知識都離不開圓的觀念。

圓會因半徑不同而大小有別，但圓周長與直徑的比值卻是一個定數，這個認知是數學史上的一大成就，這比值稱為圓週率，表示法為 π。西元前四世紀希臘的數學家 Eudoxus 給了一個相當嚴格的證明，其推理過程的概念如下：假定有大小不同的兩個圓，考慮內接其內，邊數相同的兩個正 n 邊形。這兩個正 n 邊形因為相似，所以周長與半徑之比相等，讓邊數趨向無窮大時，大小兩圓可以看成為兩正 n 邊形的極限；有限邊數周長與半徑之比相等的性質，也隨著會傳給作為極值的圓。



而圓面積為π r²，其理論是將圓等分割成許多扇形，在將這些扇形重新組合成上下"邊"為波形曲線的" 平行四邊形 " ，其高為半徑r，一邊的波形曲線長為半圓周長π r。當分割數越來越大，則"平行四邊形"就越接近高為r，底為π r的矩形，所以圓面積為π r²。

後人用了許多方法來求圓周率，有正多邊形逼近法、級數方法，到了計算機和電腦的出現，又把π值推算到上億位的小數。不過這樣做有什麼好處呢？為了計算更多更快，就要發展更好的逼近公式計算程式，所以一丁點的改進，可以省下好幾小時的計算。另外，每一架新計算機正式使用之前都得試機，方法之一就是讓它計算π直到幾百幾千位，如果無誤則表示其計算功能可信賴。



角有多大呢？我們以角的頂點為圓心作一圓，則角的大小可用相對一周角來衡量，角：周角＝弧長：周長＝＞角＝(周角／周長)×弧長。又規定周角為2π個單位弧度，弧度＝（弧長／半徑），由角：周角＝扇形面積：圓面積＝＞扇形面積＝（圓面積／周角）×角＝（π r²／2π）×θ＝（r²／2）×θ。

最後提供了幾個簡單的圓弦公式：(1)圓周角＝圓心角／2。(2)四點共圓的條件：對頂角要互補。另外也介紹為什麼正弦叫sine？還有一個重要的三角不等式：

$$\cos\theta < \theta / \sin\theta < 1 / \cos\theta$$，及其極限

$$\lim(\theta / \sin\theta) = 1$$，當θ趨近0。

做一個燈籠

趙國亨

寶石需要以特殊的形式出現在世人面前，才能表現出她的璀璨美麗，這樣的形式也是數學世界裡最典雅的象徵—「多面體」。

阿草在『做一個燈籠』這一個章節中，談到了多面體的許多形象，在建築中、在平面上、在自然界裡、在數學家心中——當然也免不了她優雅的數學性質，體積、夾角、點線面。

看著這稍嫌零碎而且令人有種隔靴搔癢的章節時，不由想起多面體曾經一次次帶給我的許多挫折與隨後造訪的驚奇，尤其是那角錐體積公式，更是讓我曾經深深懷疑多面體這種玩意兒，是不是需要極高悟性才能理解的領域？而第一次見識到牟合方蓋卻讓我大喊「傑克！這真是太神奇了！」〔按：當年正流行這句話〕，因為我終於可以用幾何的方式理解這個體積公式了，雖然它不能免俗地需要微積分的一些概念。

相同於我對多面體的讚嘆，古希臘人很早就發現了正多面體只有五種，這種特殊的情形幾乎被視為世界組成的秘密之一，而古希臘人認為世界是由四種元素所組成，再加上人類所獨有的靈魂元素〔按：第五元素在電影裡是“愛”，但那些是Hollywood星人〕，正好可以跟五種正多面體對應，同時肉眼可以看到的五顆特立獨行、遊走夜空的星星，其實這五種多面體正是五顆星星的象徵呀！我能接受也能理解古希臘人將這件事進行如此的過度詮釋，因為這實在是太神奇了！想想…如此美妙的契合，若不是世界的基本結構，這樣的巧合未免也太不可思議了吧？

為此我說，多面體是數學界的寶石。

那一端叫福爾摩沙

鄭宇晴

地球很大，大到古人以為除了山川、海洋之外，大地基本上是平的；但古時候有智慧的人也不完全認為地是平的，他們知道船隻進港先見其桅，後見其身；月蝕時地球的陰影總是圓形；往北走，背後的星座就會落到地平線下，直到1522年Magellan的環球壯舉終於証實地是圓的。

西元前三世界的希臘天文家Eratosthenes首先用數學的方法推測地球的大小。到了1669年法國天文學家Picard首創用望遠鏡來量各種角度，其準確度比目測好多了。1684年Newton用Picard的結果計算出天上的力與地上的力確實遵守同一法則，於是開始寫他偉大的著作Principia。

在平面上過兩點只能有一條直線，在球面上有些小小的例外，譬如所有的子午線都通過南極與北極。球面上任一點與球心的連線會交於球面的另一點，這兩點互稱為對蹠點。台灣的對蹠點在哪呢？是阿根廷最東北叫Formosa的省。

在平面上，兩直線可互相平行而不相交；在球面上，任兩大圓一定相交於對蹠的兩點，因此無所謂的「平行」。在球面上兩點之間最短的路徑就是大圓，所以航海要循大圓前進，以便走最短距離，所以方向必須時時改變，非常不方便。通常在大圓上取幾點，順次用固定方向的航路相聯。此固定方向的線稱為斜駛線。

如果地球是一個平面或是一個圓盤，那麼實地有多大，就在紙上(按比例)畫多大，但不幸的很，地球是個球，無論怎麼剪裁，球面總是沒法攤成平面(你剝橘子的時候就知道了)，因此顯示大區域的任何地圖都免不了有誤差。

天文學家Ptolemy不但留下天文學(含三角學)鉅作「Almagest」，而且還寫成八大冊的「地理」一書。他不但引進了經緯系統，還討論到地圖的一些投影原理，這是繪製地圖走向科學化、數學化的一大步。但Ptolemy卻犯了一大錯誤，他把地球估計的小了一些，以至於在他的地圖中，Canary島到長安竟漲成了半個地球大(180°)，而不是應有的130°寬。而使

Columbus勇於向西方航行，以及錯以為美洲為印度，或許就是Ptolemy的這個錯因所結的後果。

Ptolemy之後一直到地理大發現之前，製圖原理可以說毫無進展；地理大發現的時代，Mercator 對繪製地圖的原理貢獻最大。那時候的地圖通常以垂直相交的兩組平行線代表經線和緯線，而經（緯）線和經（緯）線間的距離與兩者的經(緯)度差成正比。但這與事實不符，緯度越高固定兩經線之間的距離就越小，其縮小率為 $\cos\theta$，θ 代表緯度，基於這個道理，Mercator讓經線之間距離保持不變，但以 $\sec\theta = 1/\cos\theta$ 這個乘法因子來調整緯線間的距離，此繪圖法有個好處，斜駛線在此種地圖上就是一條直線。我們用投影的觀點來看，Mercator 的方法即為修正過的柱面投影法，通稱為麥氏投影法。

除了柱面投影外，還有平面投影及錐面投影。從幾何的觀點來看，這些投影法中，有的保持局部地區的形狀，有的保持局部地區的大小比例，但不可能同時保持形狀與大小，這是球面異於平面的地方；製圖離不開數學，而製圖所引起的投影問題也給數學帶來許多研究題目，這是文史與數學間有親密關係的又一個例證。

世紀大審

許勝溢

微積分，這門學問大家應該打從高中的時候就開始學了吧，還記得一開始是說些什麼嗎？假設你已經有函數的概念了，那麼接下來要講的就是極限的概念。世紀大審這章就是在說明微積分的簡史，他先提出了有名的芝諾(Zeno)詭論引出極限問題：有一個叫做阿其李斯(Achilles)的健將跟烏龜比賽賽跑，他被要求讓烏龜十公尺，同時開跑。於是芝諾就做了以下的結論：阿其李斯永遠追不上烏龜。怎麼可能？如果你第一次見到這個問題，心中一定會有這樣的疑問。他的解釋是這樣的：開跑後過了一段時間，阿其李斯跑到烏龜起跑的位置，不過同時呢，烏龜已經在更前面的地方了；當阿其李斯再度跑到烏龜剛剛所在的位置的時候，烏龜又在更前面的地方了，如此進行下去，阿其李斯永遠落後烏龜，永遠追不上。學過了微積分，你應該(也必須)知道這個問題出在哪，不知道的話，那就請好好研究吧！

文章前面不只提到烏龜的詭論，還有其他三個，但不多做介紹了。總之，作者利用這些詭論，引導我們進到古代人一向棘手的極限問題。我們可以發現到，類似的極限問題，在我們日常生活中通常都發生在運動的問題上，說到這裡，大概大家也可以漸漸發現，微積分的創建正是在處理這些運動的問題(所以我常說數學絕對不只是關在房間裡的學問)。古時候大家專注在處理天體運動的問題，有人貢獻數據，有人利用數據算出些具有價值的發現，我要說的就是刻卜勒(Kepler)，他發現了天體運動的三大定律，後來牛頓(Newton)所提出的萬有引力就是站在刻卜勒的運動定律上的，現在漸漸地說入重點了。

牛頓，大家都知道他是個物理學家，也是個數學家，為了證明他物理上的推論，他必須建立起一套研究極小瞬間運動的方法，微積分因此成形。微積分是一項相當有力的工具，牛頓得天獨厚，早別人一步使用他。他在微積分上最重要的貢獻，就是將微分與積分經微積分基本定理連在一起，合流成微積分。刻卜勒的運動定律再加上微積分，牛頓終於證明了當時許多物理學家所猜測的平方反比律。

今天我們所用的微積分符號卻跟牛頓當初用的不一樣，現在用的符號是萊布尼茲(Leibniz)所創的，看來萊布尼茲跟微積分也有相當大

的淵源了。沒錯，其實就在牛頓創建微積分的同一個時期，萊布尼茲也創建了他的微積分。那他對於微積分最重大的貢獻為何呢？就是把微分跟積分的技巧整理得很清楚。而他創的符號由於比牛頓的更加明白，而且也讓人更容易了解微積分的內涵，所以就漸漸的掩蓋過牛頓式的微積分。

本篇篇名—世紀大審—就是在講牛頓跟萊布尼茲，由於他們兩個的微積分幾乎是在同時所創立的，所以就有某人抄襲某人的嫌疑，兩人分別有擁護的人，兩派的爭執很激烈。終於有人(John Keill)提出了對萊布尼茲的控訴，指他抄襲。調查單位是誰呢？英國皇家學會的委員會(牛頓為學會會長)，可想而知萊布尼茲當然抄襲罪名成立了。這一個審判讓英國的數學家沉溺在自己的世界中達百年之久，後來就失去歐洲科學研究的主導地位了。這就是世紀大審一詞的由來。

微積分的發展過程，發生了著名的牛頓與萊布尼茲的瑜亮情節。若沒有他們兩個，微積分會不會問世呢？我猜是會的，而且不會晚他們的時代多久。在他們之前其實已經有人在拓展微積分這個新領域了，到牛頓的時代剛好達到某種程度的累積，加上又有這樣聰明的人才誕生，微積分就這樣被創建出來了。從這個例子中，我們可以看出數學是代代人類智慧的累積，這不也就是文化的一種嗎？

孟德爾的豌豆

張嘉福

此章的開始，便敘述統計學與一般數學的不同，之後再引進孟德爾對於遺傳工程的研究。首先是達爾文提出演化論後，開始豌豆實驗，但並沒有進展。但在另一個地方，此時還默默無名的孟德爾修士，也做著豌豆的實驗，使他成了遺傳學的先驅，因為他懂得從數字中統計出有意義的資料。從兩堆不同的豌豆中，他看到了豌豆的表皮有平滑跟皺褶兩種，於是他再把這些表皮不同的加以互相交配，產生出下一代不同的豆子。孟德爾依照七種特徵（種子表皮、種子顏色、花的顏色、花所生長的位置、豆莢的皮、豆莢顏色以及豌豆莖的高矮來加以實驗），他得到了一些數據，並加以分析、再實驗。由之前所作過的實驗中，他得到了以上七種的一些資訊，他把平滑的種子定為顯性，皺褶的定為隱性。並得出純種的顯性與隱性後，再加以交配，得出第一子代。其他六種亦然。之後第一子代再自交，得出了第二子代以及數據。

但之後問題來了，我們知道，統計學並不是完全準確的，他只是個大概的數字統計。簡單的說，如擲骰子，一般說來丟出六的機會只有六分之一，但幸運的話，你可能丟個十二次卻丟出了八次的六，難道說統計學錯誤嗎？並沒有，只是統計學在另一個情況下，才會出現這種比例。也就是要擲很多次時，比例才會接近這種情形，我們稱之為大數法則。但遺傳基因沒那麼好解釋，因為有可能是兩個性狀在同一對染色體上。孟德爾之所以會成功，是因為他的運氣好，實驗數據剛好能看出來之外，就是他選的性狀恰巧都在不一樣的染色體上。他藉由數字中推出，顯性比隱性大約是三比一的比例，於是他定出了基因：控制顯性的基因是A，隱性是小a。最後再由實驗加以驗證，依照完整的科學程序，依靠數學的分析與統計，完成他的遺傳法則。

之後就是數學家接手的範圍啦，由於A與a兩者出現的機率和為1，所以我們可以改用二項式來觀看。令A出現的機率是p、a出現的機率是q，

則（p+q）=1，而且（p+q）的n次方=1(對於任何n)。由此，我們的統計學可以應用在很多的地方了，如試驗一種藥物是否有效或有害，都可以藉由統計之後的數據加以分析比較。二項分佈還牽扯到一個名為常態分佈的東西，此處有個小故事：當二次世界大戰後，德國實施糧食配給制度，規定每天要發固定重的麵包。某個數學家發現有個廚師始終在偷工減料，他便是利用常態分佈曲線發現的。事項分佈的常態分佈曲線是呈現鐘型曲線，很明顯的可以由二項展開式看出來。

至於最後本章提到了統計學的解釋，統計學，是由它的應用領域、統計方法以及機率論三方面著手的。大數法則是由機率論衍生出來的，而大數法則出現後，對於統計學也大有裨益，但大數法則只是使其數字接近我們的估計值，但並不會完全等於我們所猜測的值。後來常態分佈於十八世紀登場(機率論主要進展之一)，後來更因極限定理與中央極限定理使得它成為機率論的中心。至於統計發展上，一開始是各自獨立的，如人口統計、保險是一類；而想把以前的數據加以歸類，以推出未來的數字又是另一類；這些因為還沒有機率論的基礎，所以各自為政，一直到十九世紀中，才開始快速發展。統計學就被廣泛的用到其他各類科學上，如物理、化學及生物。（看到這裡忽然有股數學果然是科學之母的感覺）。

最後它提醒了統計學所需注意之事。首先，統計學要有大數法則配合才會準確，但事實上，不可能每次都使用大數法則，所以以抽樣調查取代大數法則。但怎樣才會精準呢，其實是很難的，而本章也沒有加以介紹抽樣的原則，讓我覺得有些遺憾。

心臟線　　R=1+COS θ

戈巴契夫的胎記

賴瑩綺

　　這一章的緒論提到印度教崇拜的婆羅門，維士奴及濕婆三神，分別主司創造維持及破壞世界之職，印度教説這三神合一，要維持的是平順的秩序，秩序如何導成破壞，這三者間的協調是否有規則可尋？人類的了解不深，這些變幻多端還無法深入了解的現象稱為渾沌，渾沌是新興的學門，在數學上也有這麼一塊渾沌地帶。

　　第一個提問是海岸線到底有多長呢？根據地圖及比例尺來計算不盡正確，很多地圖為了簡化，在該有曲折的地方也打直了，光就西班牙與葡萄牙兩國邊境的資料來看，兩者有相當程度的出入，如果以公里數公尺數更甚以公分數當成兩個測量點之間的距離，理論上測得的海岸線長就一再增加，由於海岸線是太不規則的了，數學家 Mandelbrot 也因此發表了海岸線是無限長度的，就實用性而言，這樣的理論只可説是個吊詭，卻也在我們數學領域中掀起軒然大波。

　　海岸線的幾何學不是微積分這個犀利的工具所能應付的，一百多年前，數學家創造出一些怪異的曲線，它們到處都不平滑，許多數學家認為這是不常見的沒有用處的。但是在最近，無論是物理、化學生物、氣象等領域，甚至是股票市場期貨買賣等，都發現有些以前無法研究的現象，現在已漸漸有些頭緒，讓渾沌的世界露出一道曙光。

　　作者也提出一個電腦氣象。氣象預報現在已是新聞中很重要的一環了，前一陣子，氣象預報還被炒作的沸沸騰騰，有許多人質疑氣象預報到底準不準確？文中提到 1961 年某個氣象學家，選定三個微分方程式作為計算軟體，將溫度溼度壓力等變因輸入後，再隔一段時間回到電腦前一看，結果讓他目瞪口呆，越往後的資料和原記錄相差越大，以至於兩者看起來毫不相干。沒想到，問題只是重新輸入的某數值差了一點點。在經過長期科學訓練後，總認為初期條件只差一點點，結果也只會差一點點，這樣的想法完全在氣象預測中被推翻了！往後，某系統如果有：初期條件差一點點，結果會很不穩定這樣的性質，就稱為蝴蝶效應。

數學裡有很多自我相似自擬的例子，迭代自擬隨機選擇，其結果構成了如假包換的海岸線，由這樣的製作過程，我們很快領會到如何用類似的方法，做出星際大戰的場景，許多令人嘖嘖稱奇的電腦特效，就在自我擬似的設計下拍出來，生物的成長基本上是種迭代，今天的你是由昨天的你變化而來，看起來大體相同，但總有不同的地方。這樣子有點人文的論調，結合了數學的概念非常新鮮。

原本碎形幾何是數學世界中避之唯恐不及的一學門，但是在許多數學家的努力下，這渾沌的地帶似乎有撥雲見日的趨勢，而在資訊發達科技爆炸的時代裡，在看似不規則的混亂中找出那可依循的軌跡愈顯重要！

停格看Heron

許文寧

乍看之下你一定以為我要說的海龍公式吧，那你就只猜對了一半囉！為什麼這樣說呢？其實在這個部份中，我們主要是從討論海龍公式來看數學，不同於文化的、教育的數學，這裡要提的是有關技術層面的。

相信大家對Heron是一點都不陌生吧，大部分的人聽到這公式還可以朗朗上口的背出來呢，而海龍的證明，對大家來說也是易如反掌。但是在當大家第一次聽到海龍公式，並且發現用它來算面積是個很好的工具時，你是不是有想過海龍公式為什麼長這個樣子？甚至懷疑過海龍公式為什麼是對的呢？同樣是以邊長來算面積，那如果放到任意四邊形還可以用嗎？這不是只能用很嚴謹的證明來討論的，我們可以從一些不同的角度和觀點，來推測和感覺。

首先可以從單位因次來看，它既然是一個面積公式，所以算出來的單位一定是平方的面積單位，不會是體積，也不可能是長度的單位，因此為何要有根號，也就是一件自然的事了。從對稱性來看，如果我們把三邊長度各代表的abc兩兩對調來看，可以發現公式也不會改變，這個海龍公式就又通過一次考驗了。此外，我們還可以找一些特殊的三角形，來檢驗看看這個公式是否合理。然後我們可以再利用這些合理性來推廣後，猜測四邊形海龍公式的面目。(Heron推廣到任意四邊形雖然失敗，但是卻可以用於圓內接四邊形。)你也許覺得對於這樣的探討，不知道可以從中得到什麼，但是這樣做對於一個公式的教學，其實比直接導公式、記憶，顯然來的有趣也較重要。畢竟，學習數學重要的是得到答案的過程，而不是答案的本身。這也是阿草想要傳達給我們的概念吧。

從我們切入海龍公式的這些觀點，用於我們平常看到的問題，也是很好用很方便的，舉例來說：利用對稱來看問題，(這裡說的對稱可以是圖形、地位、角色或過程的對稱)，可以讓一些問題變的很簡單；而在單位因次方

面來說，雖然在代數學和三角學的現代化中，減免了單位而讓計算看起來清爽簡單許多，但是也讓人容易陷入計算的迷陣中。像是我們在算標準差的時候，總懷疑為什麼要開方，覺得開方很麻煩，但是如果你用單位因次來考量，因為標準差要衡量的本來就是樣本和其離散平均的情形，所以單位很自然的要和它們一樣，而不是和它們的平方一樣阿。運用單位因次來看我們遇到的一些公式，發現他們其實會變得自然許多；若你能自在的遊走於一般化和特殊化之間，就可以找到一個對的角度來切入問題；運用類比推敲的技巧，可以在茫然的思路中，找出答案的可能形式；觀察歸納更是不可少的技巧，可以指引你解題的方向；換個角度來看問題，你也可以感受到「柳暗花明又一村」，大叫 A Ha！的喜悅。

除了之前所說的這些解題的方法之外，我們還得學會監控能力，才算是真正的了解數學的技術層面，它指的是能以之前所提過的觀點，來檢驗解題的過程和結果是否合理、是否有明顯的差錯，例如兩個不大於４０的數字相乘如果結果大於１６００，我們就該知道錯了。這種能力不是對於些數學分支才需要具備的，而是要普遍的深入各個領域的。

書中也提到：狹義的解題，是將數學某分支的題目去細分歸類，指出什麼題型用什麼技巧來解，如果是自己來分類，對數學的學習是好的。但是我們常常是光看他人的分類和求解，於是缺少了過程的磨練，我想在中學的學習過程中，很多人都有這樣的解題經驗吧。但是廣義的解題，是利用一般的解題原理來處理未曾見過的題型。我們應該具備擁有的，就是這樣一個廣義的解題原則。學會這樣的解題原理，數學才會顯得真正有趣。在這章末，阿草把解題做了一個有趣的比喻，他把解題比擬成狩獵過程，並以「抄、圍、推、轉」四個字來代表。抄：簡單來說就是模仿。圍：要圍住獵物，則需要觀察和推測。推：獵物有時候會留下足跡或排遺，仔細觀察可以發現其行為的規律，有時獵物深藏不漏，還可來個陸空聯合作戰指揮。轉；有時獵物偽裝的很好讓我們看不透，有時候非常警覺讓我們無法靠近，這時要轉適當的方向，才有希望。「抄、圍、推、轉」相較於以前聽過有人把解題比喻為「童子拜觀音」、「偷天換日」、「移花接木」、「釜底抽薪」我想也有異曲同工之妙吧！

最後，大家可以試試看，如何巧妙靈活的運用這些妙計，也許可以達到如庖丁解牛般「審視運籌，各種難題迎刃而解」的境界喔！

英雄的語言

魏崇益

當古老的文明早已預言了真理，我們會不會只是一顆初芽的種子，在偌大的空際裡發出一聲微弱的回音？

當象形除了表意也可拿來當拼音，當輝煌的文明遺留下智慧的謎語，我們循著脈絡層層往上推移，溯著數學的語言，不斷地分析歸納演繹推測，解讀出時光機中透露的名字，在一團迷霧之中發現了堅固的結構，彷彿活生生地展現在我們面前。

於是，不管是古埃及還是古希臘，抑或兩河流域的蘇美人巴比倫人腓尼基人，在出土的文字中，我們發現數的起源，多麼令人驚訝的美，讓我們引發思考的是內容本身，與文化的關聯。在那樣的時代背景下，古老的先賢已經發現語言的奧妙，存活在生活的週遭及傳承的責任。

也許，我們的智慧遠不及歷史洪流中累積的一點，微小地反覆咀嚼前人的語彙，但語言的流失與傳承的責任已承攬在我們的肩上，要讓智慧的光更加燦爛。

只是前些日子的美伊大戰，不僅摧毀了無數人民的家園，國家文物館也慘遭攻擊，上萬的楔行石塊已化成土灰，古老的文明之水在迷濛的沙塵中，已隨著底格里斯河注入波斯灣的咽喉，模糊成一粒沙，不尊重老祖先的資產的現代人，貪婪地走向滅絕之路。

我們的文明將往哪裡去，全賴正在使用文字的我們，決定他的生死命運及色彩，有時候不妨回頭想想古老的預言，帶領現今走向真正英雄說的語言。

為什麼學數學

趙國亨

在一個個的數學小故事之後，或許阿草認為已經足以營造一種氣氛，讓讀者用較不偏頗的觀點，回歸到「為什麼學數學」這一個常常叫人困惑甚至於嗤之以鼻的議題作為本書的結尾。

Columbus認為他到達了亞洲，為什麼他相信？因為他用了正確的邏輯推論，只可惜一開始的條件就錯了，他用了錯誤的地球大小資料〔按：整整差了一萬公里！〕，同時他估錯朝東向到達日本的距離，以至於他所以為的亞洲，距離真正的亞洲還有一萬六千公里！

在這個故事裡，值得數學系學生引為借鏡的，不是Columbus鬧了個笑話，而是當我們在引用一個定理時，是否有正確地檢驗條件是否符合呢？或者你也是跟Euler一樣，將首項1公比−1的等比數列代入公式得到1/2的人呢？

然而回到為何學數學這個主題，曾經在《為甚麼要學習數學》這本書的讀書會上，聽到這樣的答案——「讓生活更美好」，乍聽之下似乎有點含糊、老套、不知所云，然而仔細想想，我們的生活中有多少事物，是利用數學知識所創造的，甚至用金錢來衡量的話，我們會發現收入排名前三分之一的職業，有一半需要微積分以上的數學知識，銀行、保險、會計、建築…等等，若將其中受過專業數學訓練的成員抽掉，你會發現這些行業將無以為繼！

然而我問自己為什麼要學數學，很遺憾地我的答案並不能增加你對數學的喜好，因為我學數學是為了一個字—爽，學習新的定理就像是學習新的武功，解決難題更有如與強敵對決般刺激，訓練解題技巧其實就是增加功力，讓人更容易一眼看穿形形色色的問題罩門所在！

將《阿草的葫蘆》推薦給不喜歡數學的人，他將告訴你數學並不是背公式的學問，每一段公式都有它的故事。也將《阿草的葫蘆》推薦給喜歡數學的人，它會讓你知道數學的無所不在、數學的平易近人——以及數學的美。

Math in China

中國有許多出色的發明，例如指南針。在數學上也有不少有趣的發明喔，而且是獨步全球的，例如說零的使用（雖不是中國人發明的，但我們很早就開始使用了，對於計算上有相當大的幫助），這些東西我們沒有辦法每個都提出來介紹，所以以下我們就針對四個中國所特有的數學工具，來跟大家做個介紹：中國剩餘定理、珠算、天干地支、算籌。

中國剩餘定理

鄭宇晴

相傳漢朝大將軍韓信點閱帳下士兵人數時，不一個一個算，卻令士兵分別以三個一隊、五個一隊、七個一隊，再分別記下剩餘未足一隊的人數，根據這些數據，韓信很快地的得到全部的人數。他所使用的方法是運用有名的「孫子問題」，宋朝周密稱它為「鬼谷算」，現在的數學家則稱此解法為「中國剩餘定理」。

中國古算書—孫子算經

目前發現有紀錄此種問題的典籍中，最早的一本是約西元四世紀成書的《孫子算經》，作者孫子不知何代人，一般認為這部書可能是三國或晉朝〈西元280—420年〉時候的著作。它是一部涉及乘除運算、求面積體積、處理分數及開平方、立方的著作。

其中收錄於卷下第26題，即是聞名世界的「孫子問題」。原題如下：

「今有物不知其數，三三數之剩二，五五數之剩三，七七數之剩二，問物幾何？答曰：二十三。」

將其翻譯成白話，即為：「有一堆東西，不知道它們的個數，三個一數剩下兩個，五個一數剩下三個，七個一數剩下兩個，問這堆東西有幾個？」

《孫子算經》還給出解這題的方法：「術曰：三三數之剩二，置一百四十；五五數之剩三，置六十三；七七數之剩二，置三十；並之，得二百三十三，以二百一十減之即得。」

即是：$x = 70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 - 2 \times 105 = 23$〈運用同餘之概念即可得，不加贅述〉

而明朝程大位在1583年寫的一部流傳很廣的應用數學書《直指算法統宗》裡頭就有一首孫子歌：「三人同行七十稀，五樹梅花廿一枝；七子團圓正半月，除百零五便得知。」更便於讓人們記憶與運用。

中國剩餘定理

遲於中國人，古代的印度數學家也曾考慮過類似「孫子問題」，而歐洲

則在1202年義大利學家Fibonacci的《算法之書》〈LiberAbaci〉才有兩個一次同餘問題。孫子問題的推廣，直到十八世紀才被Euler重新發現。因此歐洲數學家為了紀念中國數學家在這方面的成就，稱此定理為「中國剩餘定理」。

秦九韶之大衍求一術

中國古代的天文是相當發達的。事實上，《孫子算經》的「物不知數」問題跟古代曆法的推算有關。

古代曆法中有種稱為「上元積年」的東西。現在我們模擬一種情境來看看上元積年是怎麼一回事，假設這一年冬至前半，日月五星在同一個方位上，因為日月五星的運動週期是不一樣的，所以分別設為a、b、c、d、e，如果在N年後之某一時刻〈M月P日Q時〉進行觀測，用a、b、c、d、e除以M月P日Q時得到的餘數為r_1、r_2、r_3、r_4、r_5，剛好是日月五星從現在起點到軌道上共同起點之間的距離。所以如果我們知道a、b、c、d、e以及n_1、n_2、n_3、n_4、n_5，由《孫子問題》的解法，就可以推算出總年數N。稱N為「上元積年」。

在西元462年祖沖之的「大明曆」就要計算到11個n的同餘聯立一次方程式。直到南宋末年，秦九韶才第一個發展它的理論。他寫了一部名著《數書九章》，在此書中提出解聯立一次同餘方程式的方法「大衍求一術」；此方法在五百多年後，才由德國數學家高斯再度發現。

秦九韶改進太史推演開禧曆上元積年的大衍術，使之完善而規格化，原文如下：「大衍求一術云：置奇右上，定居右下，立天元一於左上，先以右上除右下，所得商數，與左上一相生，入左下，然後乃以右行上下，以多除少，遞互除之，所得商數，隨即遞互累乘，規左行上下，須使右上末後奇一而止，乃驗左上而得，以為乘率，或奇數已見單一者，便為乘率。」

舉例說明：求3800 K＝1〈mod 27〉中的K值。

按照秦九韶的大衍求一術法：

$$\begin{array}{c|c}1&20\\\hline &27\end{array}\qquad\begin{array}{c|c}1&20\\\hline 1&7\end{array}\qquad\begin{array}{c|c}3&6\\\hline &7\end{array}\qquad\begin{array}{c|c}3&1\\\hline 4&1\end{array}\qquad\begin{array}{c|c}23&6\\\hline 4&1\end{array}$$

商1　　商2　　商1　　商5，使右上餘1

(1×1+0=1)　(2×1+1=3)　(1×3+1=4)　(5×4+3=23)

驗左上所得為23，以為乘率

雖說大衍求一術在中國數學史上佔重要的地位，可惜當時研究、學習的人很少，到了明朝中葉，這方法就失傳了。直到十九世紀初葉，清朝數學家研究古籍，才從《永樂大典》中重新發掘這個方法，才能把這個數學遺產加以發揚光大。

1852年英國傳教士偉烈亞力最早將「大衍求一術」介紹到西方，使中國獨特之算法才開始為歐洲人所知。

現在一般數論中將滿足同餘式組數的存在及特性稱為「中國剩餘定理」或「孫子定理」。

參考資料：

中國數學五千年，李信明著。
Mathland，http://spm.hkcampus.net/~spm-ccs/
數學網站，http://www.twghfwfts.edu.hk/~maths/
中山數學資訊網，http://www.csjh.tpc.edu.tw/~doing/

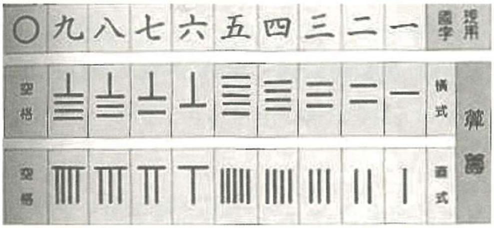
籌算

劉晉宏

籌算一幾千年前中國人為了生活的需要所利用一種獨特的計算工具。

「籌」就是一些小竹棍，中國的數學家們就用這些小竹棍擺成不同的形式來表示不同數目，並進行各種計算，這種用「籌」來進行的計算就叫做「籌算」。這種用「籌」來進行計算的方法，究竟是從什麼時候開始的，現在還找不到可靠的資料來做精確的說明。不過可以相信，至遲在春秋戰國的時候，人們已經可以十分熟練地運用算籌來進行計算了。

現在來解釋用算籌來計數的方法，用"算籌"來表示數目，有兩種形式：一種是縱(直)式的，另一種則是橫式的。其擺法如右：

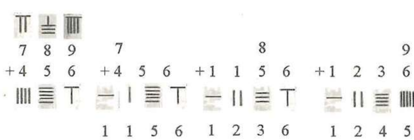


中國的籌算記數是十進位位值記數法，那該如何使用這種擺法和十進制配合起來呢？方法是縱式代表：個位數、百位數、萬位。而橫式則代表：十位數和千位、十萬位。利用橫式與縱式的區別來做位數的依據和判斷。縱橫二式的採用是為了區分籌算所處的不同的「位」。籌算沒有『零』的符號，在中國古代有「０」的觀念，卻沒有「０」的寫法，於是就用空格表示「０」。

籌算的加減乘除四則運算：

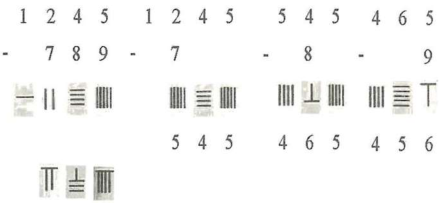
加減法＝＞（１）先將上下位數對齊（２）由高位數算起，即由左向右計算。這和現代通行的筆算運算法相反，現代的筆算是由低位數算起，即由右向左計算。

例如：４５６＋７８９用籌算進行時則為：首先用籌算列出４５６，然後將百位７加入百位４中，依次再加十位和個位的數碼，"由高位數算



起"，即由左向右計算。如上頁圖。

例如：１２４５－７８９用籌算進行時則為：首先列出１２４５，依次由百位減去７，依次再減十位和個位的數碼，也由左向右計算。如右圖：



乘法＝＞把相乘二數一上一下對列，使其中一數的最高位數和另一數的最低位數對齊；中間留一列空著。然後用上面數中的最高位數依次自左而右地乘下面數目的每一位，其結果隨乘隨加，寫入中間空著的一列中；上面的某一位數每乘遍了下數之後，便將該一位數去掉，並將下面的數右移一位；再同上步驟直到結束。例如：２３４×４５６

2 3 4	上位
	中位
4 5 6	下位

===>

2 3 4	上位
9 1 2	中位
4 5 6	下位

3 4	上位
9 1 2	中位
4 5 6	下位

=>

4	上位
1 0 4 8 8	中位
4 5 6	下位

=>

	上位
1 0 6 7 0 4	中位
4 5 6	下位

除法＝＞在除法中，被除數稱為"實"，除數稱為"法"，除得的結果稱為"商"。例如：１０６７０４÷４５６：先將實１０６７０４與法４５６對列，次將４５６左移，至能使１０６７被４５６除為度，除得的商數２，記入上層空著的一列。以商數２，遍乘４５６各位，隨乘隨減，得到第一次餘數１５５０４，然後將法４５６右移一位，再同上步驟直到結束。如圖：

	商（上位）
1 0 6 7 0 4	實（中位）
4 5 6	法（下位）

==>

2	商（上位）
1 0 6 7 0 4	實（中位）
4 5 6	法（下位）

2 3	商
1 5 5 0 4	實
4 5 6	法

=>

2 3 4	商
1 8 2 4	實
4 5 6	法

=>

2 3 4	商
	實
4 5 6	法

參考資料：中國古代數學簡史　李儼，杜石然著　四版　九章出版社

神奇的天干地支

賴瑩綺

從國小時期，我們在讓人又期待又害怕的成績單上，就可以看到甲等、乙等、丙等……這樣子的文字，而國小在學習書法時，老師或許會選出最滿意的作品，教我們如何在帖子旁題上自己的姓名外，也要很有專業架勢地寫上是哪一年的作品，例如：戊寅年。2雖然當時的我們，對於這樣子的紀年法感到百思不得其解，但是，至少我們可以感覺到這跟我們中國歷史發展有相當的淵源，等我們到了國中階段，數學考題又出現了給西元某一年，要求我們算出相當於天干地支的什麼紀年法？終於，我們一步步越來越了解天干地支的真面目，從渾沌不清的面貌，漸漸露出全貌。除此之外，中國人的八字，也含括了一種出生時間的紀法，例如：子時出生的，這些天干地支，對於我們傳統社會扮演舉足輕重的地位，紀時、紀年等作用都充斥在社會文化之中。但是，說真的，一提到天干地支，還是令人摸不著頭緒，它的背景、它的起源又是來自何處呢？接下來，請不要移開你的視線，讓我們一起來好好的像名偵探柯南來找出所有的線索吧！

確實出現的時間為時之早，遠在殷（商）朝以前，因為商代曆法需要，創造了一種所謂「天干地支」的六十循環紀日法。天干是：甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸。地支是一種表示順序的符號，有十二個字：子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥。在殷商時代就使用六十干支紀日法，一日一個干支名號，日復一日，循環使用，從不間斷，六十也就成了殷人一周的日數。從甲子表中又可看出他們的紀旬法：從甲日到癸日是一旬，共六旬為一循環，於是甲子表也稱為「六旬表」。而在七十多年前，河南彰德附近發現殷朝遺留下來的甲骨文字甚多，其卜辭皆以六十甲子紀日，關於整數性質中，最小公倍數及最大公因數非常早出現在干支紀年中，確實令人讚嘆！

其實在夏代已有天干紀日法，用十個天干週而復始來紀日，並有十天為一旬的概念，夏代後期的幾個帝王名孔甲、胤甲、履癸，猜想是在甲日、癸日出生，因此就附上出生的天干名。

商代紀錄一些天象，還寫上發生或觀測的時間，雖然歷史久遠，只要順

著干支往上推，歷史日期就清清楚楚，這是商人創用干支法的功績。舉例來說，在＜殷契佚存＞第347片紀載：「癸酉日占，日夕有食，佳若？癸酉貞：日夕有食，非若？」這意思是：癸酉日占，黃昏有日食，是吉利的嗎？癸酉日占，黃昏有日食，是不吉利的嗎？這塊紀載日食的紀錄，人們認為是發生在公元前1200年左右，比巴比侖的可靠日食紀錄公元前763年還要更早一些，在甲骨文中就有五次日食紀錄。甲骨卜辭中也有月蝕的紀載，但因為沒有一片是年、月、日具備的，所以無法確定其日期。中國人也是最早觀測到新星，由干支紀年法我們都可推算回發現的大致年份，追溯祖先的智慧遺產。

干支紀日法使用數千年，從春秋魯隱公三年（公元前722年）二月己巳日起到宣統三年（公元1910年）為止，已有二千六百餘年的歷史，是世界上最長久的紀日法。

東漢建武三十年（公元54年），紀年法和歲星的運行沒有關係，只按六十干支的次序來紀年，這就是所謂的干支紀年法。每一循環必須從甲子開始，所以滿六十年，我們稱為「一甲子」或「一花甲子」。這就是現在我們對滿六十歲做壽的人要稱為「花甲榮壽」的原因。

由於干支在歷史紀載上的出現，要換算成現在的紀年變成一個重要的原因。中算史家李儼先生提供這樣的公式：N－3－60 n ＝R，R表示公元的年數。

參考書目：

中國古代數學簡史　李儼，杜石然著　四版　九章出版社
中國數學五千年 李信明著　初版　臺灣書店

珠璣妙算

許文寧

提到算盤，相信很多人應該都不陌生吧。有些人也許學過珠算，甚至到郵局或銀行也可以看到算盤的影子，它是一個古老的計算工具，但是您知道算盤是怎麼來的嗎？

算盤是什麼時代發明的？算盤是誰發明的？其實這些問題在歷史上都沒有人可以講清楚說明白。這個情況剛好可以說明，其實算盤並不是由單一個人發明的，而是整整一個時代下的產物，是在人民日常生活所需的推動下，逐漸改進發展而成的一種計算工具。而算盤的出現是中國數學史上的一件大事，它不但取代了以往所用的計算工具，而且還普遍運用於亞洲國家中。

珠算跟籌算之間其實有相當大的關係，珠算是由籌算的基礎演變而來的，所以在運算的本質上也有相當大的關聯性。為什麼已經有了籌算還需要有珠算的產生呢？如果大家對籌算有一些了解的話，也許不難發現，籌算雖然是用我們現代最常見的十進制，可是他的計算方式卻非常的繁複。特別是在乘除法的計算上，不只是需要進行很多次的擺列，也因此很難計算得十分迅速。北宋的沈括在《夢溪筆談》中提到：算術「見簡即用，見繁即變，不膠一法。」這已經非常恰當地道破了對籌算進行改革，必然要化繁為簡的一個趨勢。

珠算其實包含了兩種東西：算盤和口訣。在籌算和珠算的改革過程中，把許多算法的歌訣化，正是當時中國民間數學的一個顯著特點，並且在演變過程中佔有相當重要的地位。我們常常聽到的「二一添作五，逢二進一十」之類的歌訣即是「歸除歌訣」，利用這樣的歌訣，我們在計算除法時就可以不用反覆的商議才能得到商數，只要口訣一呼，商數馬上可以得到；乘法的每位得數也一樣，按照九九歌就可以馬上知道。在這種情況下就越顯示出，籌算這樣的工具根本趕不上時代的要求，不只是手擺列算籌的速度跟不上口訣，更趕不上計算時思考的速度。這時，籌算就變的非改變不可了。

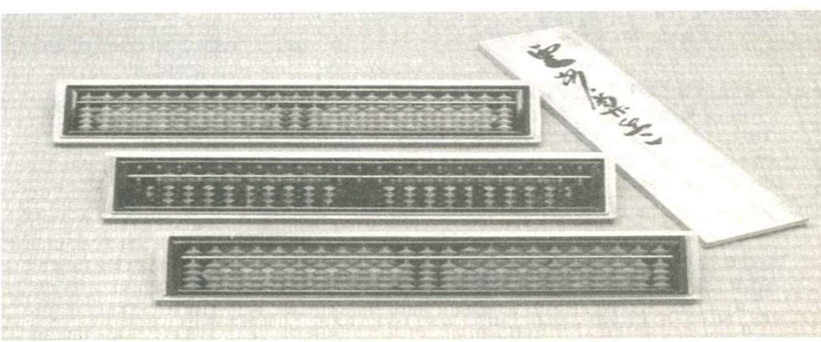
於是，人們用一顆顆的算珠來替代一根根的算籌，並且把它們串起來，

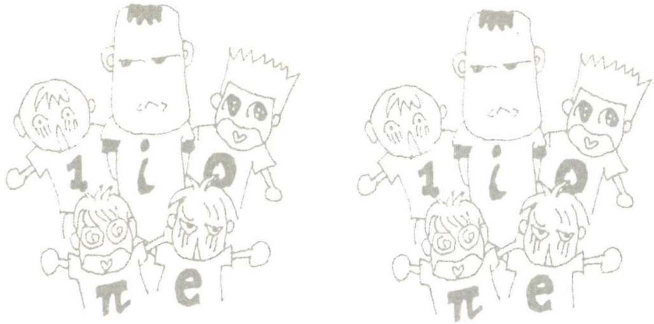
這樣就可以利用撥動算珠的方式來代替增加或是減去算籌。並且在設計算盤的時候把上面的算珠和下面的區分開來，下面的以一當一，上面的以一當五，這是和籌算相類似的地方。總之，珠算盤的模式是模仿籌算而來的，它繼承了籌算記數法上的一些制度，是在古代籌算的基礎上演變而成的。

既然提到珠算，就一定要提到明朝的一個數學家程大位。他所著的《算法統宗》是一本在有關珠算的書籍之中，傳播最廣的，也是影響最大的書。這是一部應用數學書，它是以珠算為主要的計算工具，書中並收錄了五百多個數學問題。這本書除了實用性以外，還有一個受人歡迎喜愛的因素，是因為它的文字活潑優雅，程大位把枯燥的數學問題編成有趣的小故事，而且還用朗朗上口的詩詞形式表達出來，讓人讀的時候感到興趣。值得提出的是，這本書中所引用的珠算加減乘除歌訣都已相當完善，直到現在都還通行使用，而沒有進一步的變化。

《算法統宗》的編成及其廣泛的流傳，標誌著由籌算到珠算這一轉變的完成。從這時起，珠算就成了主要的計算工具，而古代的籌算也逐漸被人遺忘以至失傳了。後來的一般人大部分都只知道珠算，而不知道有籌算。甚至還有一些人以為珠算是從西方外來的產物，這種情況一直到了十八世紀中葉，清朝的學者們對古代數學深入研究後，我們才真的了解古代籌算演變為珠算的經過。

參考書目：
中國古代數學簡史　李儼，杜石然著　四版　九章出版社
中國數學五千年 李信明著　初版　臺灣書店





五大常數

如果說你是物理系的學生，看到這個標題大概會想到波茲曼常數之類的，但數學系的就不會是這個答案了，大概會是i、π、e吧。沒錯，這正是我們要介紹的其中三個，另外兩個就更常見了，分別是1還有0。也許你會認為這沒什麼好介紹的，不過就幾個數字嘛。但是數學上，常常一個新觀念的誕生，是經歷過長久的時間，許多數學家的矛盾以及紛爭，大家才普遍承認這樣的觀念。像是負數的產生，這是一個負的量，天底下哪有負兩個蘋果呢？經歷了很久的掙扎，它才被數學家們所承認。現在大家所學到的，都把它當成是定義或者是必然的結果，像是0，在代數中就是定義中的加法單位元素。但人類的數學絕對不會是這樣(先定義，後定理)發展的，認識了數學的發展，你會發現數學也是人文面的東西，它是貼近生活常識的，而不是憑空造出公理公設，自己發展出來而完全跟“人”脫離。

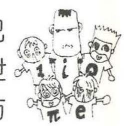
所以我們就挑出了大家所熟知的五個常數來做介紹，其實這五個常數，不但有其價值，還是傳說中“數學界最美的式子”構成的元素喔！我們篇末(自然對數的底數e)會提到這個式子。不過對於1的介紹，因為資料來源有限，能夠敘述的不多，所以我們重點不侷限在1。接下來就請大家好好欣賞這五個我們所熟悉的常數i、π、e、1、0。

一二三木頭人！！

陳淑鈴

你是否曾經好奇過，數是怎麼來的呢？在古時候，有"隸首作數"的傳說。據說，在黃帝掌管天下之後，命令他的大臣們分別辦以下這些事：羲和觀察太陽，常儀觀察月亮，臾區觀察星星，伶倫編樂，大撓制曆，隸首作數。於是隸首就成了數產生的原因了。而在西方也有上帝造數的說法。Pythagoras 認為，數是構成這個世界的基本元素，而這個世界是由上帝所創造的，所以數也是來自於上帝。

事實上，數的概念的形成，遠在文字之前。在文字出現之前，人們早已使用其他的方法來記數和記事。《周易．系辭》說："上古結繩而治，後世聖人，易之以書契（在骨、竹、木、石上刻文字）"。其實結繩記事的方法，並不只是出現在中國，在日本、非洲、澳洲等的古代民族都使用過。後來"易之以書契"，用刻畫符號來代替結繩，於是產生了文字。



跟語言文字一樣，數的發展經歷過一個漫長的歷程。甚至一直到現在，還有一些地區仍使用不發達的數字系統。如澳大利亞和波利尼西亞（Polynesia）群島，托列斯海峽（Torres Strait）群島等，只有1，2的名稱。3叫做2-1，4叫做2-2，5叫做2-2-1，6叫做2-2-2，而6以上的數就說成許多或無數。

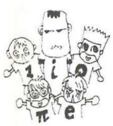
漢字一二三四五，殷甲骨文作：

許慎《說文解字》作

頭三個字古今沒有變化，四開始有變化，有

等寫法。後面幾個是口裡呼氣讀＂四＂的樣子。

五在《說文解字》中寫作 X ，許慎解釋說：＂五行也，從 二 ，陰陽在天地間交午也。＂將五和五行聯繫起來， 二 表天地，交午就是縱橫交錯的意思。5羅馬數字寫成V，是一只手四指合併，大拇指張開的形狀。10寫成X，就是兩只手掌。

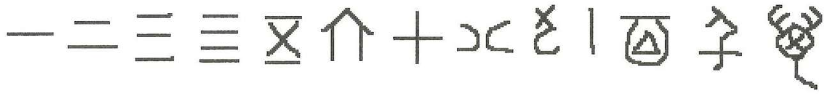


有些地區，＂七＂這個數字長時間用來表示不確定的大數目，在俄羅斯的諺語中有＂量七次，剪一次＂，（相當於我們的＂三思而後行＂）；＂七個保姆，沒有人看小孩＂（相當於＂一個和尚挑水吃，兩個和尚抬水吃，三個和尚沒水吃＂）。

類似地，中國人常用＂九＂來表示不確定的大數目。例如：＂九死一生＂指歷經險難，死裡逃生；＂若九牛亡一毛＂（司馬遷《報任安書》），這裡的＂九＂指多；＂善攻者動於九天之上＂（《孫子・形篇》），＂九天＂指高不可測。古代帝王對於＂九＂似乎特別有興趣，諸如名為＂九龍壁＂、＂九龍柱＂、＂九桃壺＂的造景不勝枚舉。同時，＂九＂和＂久＂同音，有著既大且久的吉祥意義在，宮殿的大紅門都是九九八十一個銅釘，象徵著永久無限。

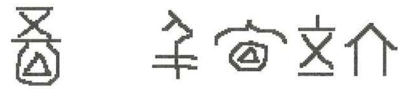
在數字的概念中常常也參雜著宗教的意味，如＂三才＂（天、地、人），＂四靈＂（麟、鳳、龜、龍或蒼龍、白虎、朱雀、玄武），＂五行＂，＂六神＂（道教認為人的心、肺、肝、腎、脾、膽各有神靈主宰），＂七夕＂，＂八卦＂，＂九泉＂等等。

以下是甲骨文的一些記數符號



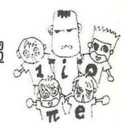
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 100 1000 10000

而組合這些符號就可以表示出更多的數字，例如：



500 2656

我們現在所使用的是十進位，十進位產生的原因與人有十個手指頭有關。古代人民不只需要數數，還要度量路途長短、容器大小等等問題，於是漸漸形成了長度、面積、體積等概念。最初丈量的標準是利用人體的某個部位的長度，《孔子家語》："布指知寸，布手知尺，舒肘知尋，斯不遠之則也。"意義是說，大拇指與中指張開，兩指端的距離叫做一尺，中指一節的長叫一寸，兩手伸長得八尺，叫一尋。



度量衡的單位並非一成不變，而是會隨著時間的轉移而有所改變。但趨勢是由小變大。

後漢（公元25～220年）：一尺＝23.04cm
魏晉（3、4世紀）：一尺＝24.12cm
隋（581～681）：一尺＝29.51cm
唐（618～907）：一尺＝31.1cm
宋元（10～14世紀）：一尺＝30.72cm
清：一尺＝32cm
現代的市尺：一尺＝33.33cm

在封建制度下，統治者向老百姓徵稅，收的是布帛、米、粟等實物。因為國家規定的稅率不能隨意更改，所以只要把尺稍微加大一點，就可以多收許多實物。況且古代度量衡的器具不可能做準確的校正，所以尺和斗就越來越大了。

參考資料：

《數學誕生的故事》，袁小明，九章出版社，民國８４年。
《世界數學簡史》，凡異出版社，民國７６年。

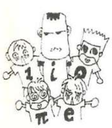
零之神奇的數

神奇的數

張嘉福

零，是一個很神奇的數，為何這麼說呢？因為在很久以前，數字發明的最初，零是不存在的。為何零不存在呢？這是一段很神奇又古老的故事了。我們從遙遠遙遠的古文明國度－－埃及談起。

在以前，古埃及時代，數學只是用在幾何方面，所以不會存在零這種東西。中國也是大同小異，因為我們不會說我有零塊土地，而會說我沒有土地。當時許多人反對零這個數，因為當時沒有什麼概念，大家都會認為，一個數加上另一個數，一定不會等於它本身(應該說阿基米德公設)。所以零這個數，對當時的數學是一種挑戰。零代表的意義是「空無」，一種人無法看見，又會對它產生莫名恐懼的東西。就像以前的畢達哥拉斯學派，曾經因為無理數瘋狂過一次，也是因為無理數違反他們的學派信條，超出他們的認知範圍以外。因此，零一開始並沒有廣為接受，甚至遭受忽視，除了希臘與巴比倫人例外。雖然希臘人知道有零的存在，但依然盡可能的避免使用它，儘管他們都知道，零對於計算是十分有幫助的。



為何大家會排斥零？因為與零同在的還有另一個兄弟－－無限。若大家承認零，也就等於承認了無限的存在，而這也就會打破西方當時的重要哲學觀念。也因此，當時一位學者季諾所提出的問題，也是我們曾聽過的一個謬論：一隻兔子與一隻烏龜賽跑，兔子速度是烏龜的兩倍，而烏龜在兔子前一百公尺處，兩者同時起跑，則烏龜永遠都不會被兔子追上。我們都知道，這個是錯誤的，因為我們有極限的觀念在，當兔子跑了一百公尺，則烏龜跑五十公尺，此時兩者差五十公尺，接著差二十五、十二點五、……，最後兔子與烏龜的差距會接近於零，很基本的極限觀念。但對於當時的人來說，這是一題無解的題目，大家都知道，季諾的題目給的結果是錯誤的，但對於沒有極限、無限與零的畢達哥拉斯學派，始終解不出來。

所幸，雖然西方的文明畏懼零，但東方的文明，如印度，不但不排斥零，反而還張開雙手歡迎它。因為印度人信濕婆，祂本身即是掌握創造與毀滅的神，它的全名有「沒有實體」的意思存在。所以，印度人本身就有無限的概念存在了。而印度人對零做了很大的轉變，就是他們把零從位置記號的

角色改成數字了。印度人不採用希臘人的數字系統，而是把巴比倫人的系統由六十進位改成十進位，所以其實我們現在所使用的阿拉伯數字，極為可能是由印度人發明的。印度數字，是讓數學跳脫純粹在幾何學上的應用，不僅僅只用來測量物品。

之後阿拉伯人攻下了印度，也接管了他們的數學，然後流傳到各地，最後又流回了歐洲。這些數字，恰巧在亞里斯多德的學說崩潰時傳入，也因此才能造就更多後世的學者，如著名的笛卡兒，因為有了阿拉伯數字，才能創造出笛卡兒座標。也因為有零，才讓牛頓能誕生出微積分。微積分是數學中最強大的工具，正如望遠鏡，可以讓我們看到更多宇宙的星球一樣，微積分則是帶給我們計算天體運動的方式。

在古代，人們極想否定零，但是在現代，大家都把零看的很自然，似乎只要講到數字，零就是很自然的一體。其實零之所以那麼為其排斥不外乎兩個原因：一、古代講究幾何學，而零派不上用場，很自然的被忽略。二、古代的零伴隨著無限，而其若被接受，等於是挑戰自己對神的信仰，也挑戰西方的哲學。但它依然還是豎立了它在數學上無可忽視的地位，這就是零。

參考資料：

1.零的故事（Zero-The Blorgraphy of a Dangerous Idea）
作者：查爾斯•席夫（Charles Selfe）
譯者：吳蔓玲
出版者：商周出版

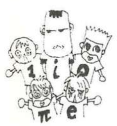
2.從零開始—追蹤零的符號與意義
作者：羅伯•卡普蘭（Robert Kaplan）
譯者：陳雅雲
出版者：究竟出版社股份有限公司

閒話圓周率

許勝溢

每個圓都有喔！

如果我問你：每個圓不管大小，都具有的相同不變量是什麼？照道理來講，每個人都會回答我π才對。圓這種東西，我們的老祖宗們不曉得打哪時開始就用到現在了，他們就著經驗、直覺，發現圓這種完美對稱的事物，不管他大還是小，直徑：周長＝常數。公元前兩千年左右，巴比倫人跟埃及人分別運用他們各自的公式計算圓面積。假設他們已經知道圓周率的意義，那麼，我們可以說巴比倫人得到 $\pi=25/8$，埃及人則得到 $\pi=4(8/9)^2$。至於他們的可能做法呢？大概是在地上畫一個很大的圓，該量的量一量，一算就出來了。說起來簡單，如果我要你不可以用現代的除法、丈量工具、十進位，也許就難了吧。更重要的是，換做是我們，我們怎麼發現這樣的一個每個圓都具有的量呢？這是很困難的事吧，不過祖宗們辦到了，也許是比例的概念再加上一點猜測，再一點點的運氣，不過也只是也許啦，搞不好是外星人講的咧！(這句純屬筆者胡言亂語，但也不失為一種可能性)



值的進步

知道π的存在以後，人們開始在找他到底等於多少。前面已經提到兩千年前的巴比倫人跟埃及人；約在西元前兩千年，中國人以3作為π值；550B.C.舊約聖經說π等於3；西元前三世紀，阿基米德算出π介於223/71及22/7之間，並以211875：67441=3.14163為π的近似值；三世紀，劉徽得到π約為3.14159；西元五世紀，祖沖之算出 $3.1415926<\pi<3.1415927$，這麼精確的值，歐洲直到16世紀才發現。更重要的是，阿基米德和劉徽都發現了算π的方法，你可以用一樣的方法，想算到多精確，就算到多精確。十七世紀，牛頓發明微積分，並算π值至16位以上。接下來就是瘋狂計算機魔人的驚人成就了，這些魔人們靠著驚人的毅力耐力，沒有計算機，憑著腦袋、雙手、紙筆，前仆後繼地算到了620位小數。如果你看到這裡還不知道為什麼我稱他們為“魔人”，那請你徒手算算π值到10位小數即可。後來有了計算機(現普稱電腦)，π值動輒千萬小數(魔人們也許會瘋掉吧！)，求π的工作，漸漸就變成了測試電腦精確度的工具了。據《神奇的π》說，現今已知至510億位小數。這個持續了幾世紀的π值精確戰，雖然在數學上至今沒有比較特殊的意義(未來也許有喔)，

但也算是π的故事中，相當有趣的一頁。

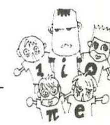
從何而來？

記得高中的時候，我曾經試過自己去找出π值來，我得到的答案是

$$\lim_{n\to\infty} 10^{n-2}\sin(1.8\times10^{-n})^{\circ}$$

，有興趣的話可以用電腦的小算盤算算看，應該是沒錯才對。那到底我是怎麼找的呢？其實我用的方法跟阿基米德他們沒差到哪去，就是圓內接正多邊形，當正多邊形的邊越多的時候，周長就越趨近圓周長(這是很直觀的，事實上應該拿出ε－δ那一套來驗證)，把周長算出來再除以圓直徑，答案就出來啦！但我用的是三角函數喔，而且我用未知數，其他就交給電腦處理，那個時候的人們，哪有這種東西，於是紙筆上的苦工就免不了啦。祖沖之算到16384邊，已經很可怕了，前面沒提到的魯道夫(Rudolph ， 1539-1610)，竟然用$60*2^{29}$邊形算到小數點後20位！後來又更推進到35位！可怕！為了紀念他，在德國圓周率也叫做魯道夫數。

大家應該對泰勒展開式這個名詞不陌生吧？另外一個求π的方法，正是利用展式求得的。為何會發展出展式來算π值呢？因為多邊形等方法逼近的速度實在太慢了，而且計算過程繁複。在1706年，英國人Machin(1680-1752)發現了如下的展式：$\pi=16(1/5-1/3.5^{3}+1/5.5^{5}-\cdots)-4(1/239-4/3.239^{3}+1/5.239^{5}-\cdots)$，他大約用了第一個括弧內的前70項，第二個括弧內的前20幾項，就算到π的第100位小數。其實創造求π的展式似乎並不困難，利用微積分的方法，加上反三角函數，在靠近值是π的地方做泰勒展開，就可以得到了。我所見過π最簡單的展式是：$\pi = 4(1-1/3+1/5-1/7+\cdots+(-1)^{n}/(2n+1)+\cdots)$，但收斂速度相當緩慢，《神奇的π》有說到：若你想用這條展式算至小數點100位，那麼你計算的項數將比全宇宙的原子數目還多！



求π的方法歷史上還有很多，在此就不再多做介紹了。

不但無理，而且超越！

實數有兩種，一種叫做代數數，而另外一種叫做超越數。所有的超越數都是無理數，簡單的說，超越數是無理數的subset。而π就是最著名的超越數了，讓我們從化圓為方這個歷史有名的問題談起吧。看字面也知道，化圓為方就是要做一個正方形跟已知的圓等面積(限尺規作圖)，這個問題好像還頗有趣，要試的話就去試試看吧，但別花太久時間，因為這是

無解的問題啊。這一個問題從西元前 n 百年就被提出，直到 1882 年，Lindemann 終於證明了 π 是超越數(利用了傳說中“數學界最美的式子”)，也就是說根本別想化圓為方了，因為超越數的長度是無法用尺規作圖完成的。但事情沒那麼簡單就結束了，有許許多多的“業餘數學家”們，自認成功的解出了化圓為方的問題，歷史上甚至有議會(美國印第安那州州議會)要為這莫名其妙的結果立法，竟然還一讀通過！好在被一位數學教授給挽了回來。還有個叫做 Heisel 的人更是誇張，出版了化圓為方一書，自以為成功的解出來。這些不勝枚舉的故事，無法細說，希望大家能去查書看看，真的相當有趣，如果你有一點專業數學素養的話，你一定會覺得又好氣又好笑的。

參考書目：

1. Peter Beckmann(1970) 《π 的故事》(姜家齊、朱建正、林聰源譯) 新竹：凡異出版社
2. David Blatner(1999) 《神奇的 π》(潘恩典譯) 台北：商業週刊
3. 曹亮吉(1997) 《阿草的葫蘆》 台北：遠哲科教基金會
4. 梁宗巨(1995) 《數學歷史典故》 台北：九章出版社

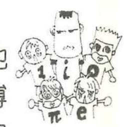
π 的發展有許多意義，從一開始的發現，到推進小數位數，證明其超越性，這些可以看出人們數學知識的進步，例如利用展式求 π 值，用代數方法證明了尺規作圖。一路走來還有許多有趣的小插曲，誠心建議大家有空時不妨多接觸，會有相當的收穫的。如果還想再更了解 π 的話，強力推薦大家看看《π 的故事》及《神奇的 π》。

i 生探逅

鄭勃毅

「文明和數學的進步都需要產生新數！」，虛數 $\sqrt{-1}$ 就隨著這歷史進步的巨浪而誕生。

其實，負數平方根早在古希臘的文獻中出現了。任何數學知識的發展，都是由解決問題開始，虛數的誕生當然也不例外。希臘數學家丟番圖（Diophantus,250~275）的《算術》(Arithmetica)書中，就已出現負數根的問題：「一直角三角形周長為12面積為7試求其邊長」，把這敘述換成數學式去解，我們不難發現其解會有負數根。而那時的丟番圖完全不去考慮負數根的問題。而在數學家還沒有發明虛數的時候，那些數學家就跟我們在國中的時候一樣，認為那些方程式沒有解。



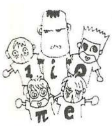
而在十六世紀中一位有名的數學家卡當（C.Cardano,1501~1576）。他可以說是第一個認真地討論虛數的人，卡當是數學史上有名的怪人，不但博學多才，通曉醫學、數學與天文學，且喜好賭博與占星術。他對當時一切知識的研究相當的投入，也因此著作包羅萬象，他將古代、中世紀以及當代所能蒐集到的數學知識，做成百科全書的形式。而在1545年時，卡當發表了《Ars Magna，原意「偉大的技藝」》《大術》，這是一本在代數學領域佔有一席之地的書，其中介紹一般三、四次方程的求根公式最為著名。

在《大術》這本書中，有這樣的一個問題：「把10分成兩部分，使其兩部分的乘積為40...」卡當解得此兩部份為：$5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$，而用我們現代的符號，可列成方程式 $x(10-x)=40 \Rightarrow x^2-10x+40=0 \Rightarrow x=5\pm\sqrt{-15}$，而當時卡當將 $5+\sqrt{-15}$ 寫成5.p.℞m:15，其中p代表加的意思，℞相當於根號，m是減（即負）的意思。卡當稱負數的平方根為“詭辯量”（quantitates sophisticae），並懷疑這種數的運算的合法性。而他自己也分析道：「**讓我們解除思想的束縛，用 $5+\sqrt{-15}$ 乘 $5-\sqrt{-15}$，我們便得到 $25-(-15)$，也就是 $25+15$。因**

此乘積為40。」然後，他寫道：「算術就是這樣的精巧奇妙，它最根本的特點，正如我所說過的，是既精妙又無用。」。卡當雖然認為虛數是精妙卻無用，卻引起數十年後一位義大利數學家邦貝力深厚的興趣。邦貝力（R.Bombelli,1526~1573）用它來解決一些三次的方程式，並建立了虛數的運算法則，這是人們對數認識的一大進步，儘管他仍認為虛數是人為而非真實的數。

而「虛數」這名詞的出現，是1673年笛卡爾（G.Descartes,1596~1650）在《幾何學》中第一次給出虛數的名稱"imaginaries"（虛的）和"reelles"（實的）相對。後來，尤拉在一篇論文中首次的使用 i 來表示 $\sqrt{-1}$。而虛數在取得數學正統的地位又經過了尤拉、高斯、柯西……等等偉大的數學家的努力了。

在許多數學家意識到在直線上不能找到虛數的幾何表示時，真正給出虛數合理的解釋是在1797年一位出生於挪威的數學家未塞爾（Caspar Wessel, 1745~1818），在未塞爾的一篇論文中，他用+1來表示正方向的單位，$+\varepsilon$ 表示另一種單位，方向與前者垂直且有相同的原點。並記作 $\sqrt{-1}=\varepsilon$，$\cos v+\varepsilon\sin v$。除了符號不同之外，其餘的都跟我們所學的複數平面表示法一樣。其實，在1799年時，高斯就已經知道複數的幾何表示，他主張用數偶 (a,b) 來表示 $a+bi$，這樣複數的和與積都可以用純代數的方法來定義，而無須作任何的解釋了。



在虛數的幾何表示被發現之前，虛數總給人們一種虛無飄渺的感覺。而複數的幾何解釋幫助人們直觀地理解它的真實意義，也因此在19世紀中葉以後發展成了一門數學分支—複變數函數論。

參考書目：

〔一〕王懷權編著，1986，【數學發展史】，新竹市，凡異發行。

〔二〕HPM通訊第三卷第二、三期合刊，【虛數 $\sqrt{-1}$ 的誕生】。

〔三〕世界數學簡史，凡異出版社。

～自然對數的底數e～

趙國亨

滄海桑田世事非　始終不變未曾悔

高中教師常常用這麼一則笑話幫助學生記憶一個很特別的微分公式，故事是這麼說的——

> 在一家精神病院裡，有個病患整天對著別人說，「我微分你、我微分你」，也不知為什麼，這些病患都有一點簡單的微積分概念，總以為有一天自己會像一般多項式函數般，被微分到變成零而消失，因此對他避之唯恐不及，然而某天他卻遇上了一個始終不為所動的人，他很意外地問他為何不會害怕，這個人淡淡地對他說，「我是e的x次方。」

這個微分公式就是e^x不論對x微分幾次，結果都還是e^x，一絲不變！難怪數學系的學生會用e^x比喻堅定不移的愛情！

熟悉數學的人都知道，在π之後，第二個最重要的數學常數是e，但是不同於π的歷史輝煌，甚至有「由π的準確位數可以看出一個文明當時的數學水準，甚至是文化水準」這般地位，自然對數的出現幾乎不可考，僅知道人們發現$(1+1/n)^n$在n趨近於∞時，會趨近於一個常數，這個數列是由於金融業的發達，為了處理複利的計息週期而出現，然後這個常數的價值要等到對數出現後才能被真實地評定。

對數函數無所假　天文學家延生涯

十七世紀初，蘇格蘭數學家Napier“發明”了對數(logarithm)，其實筆者也不知道該不該稱呼Napier為數學家，畢竟他是個對宗教狂熱、具有機械天份、喜歡用鬼點子解決問題的有趣貴族，更讓人意外的是他居然紮實地做了廿年的苦工，完成了史上第一張對數表。

與我們現在所熟知的對數不同，這張對數表的底數是$1-10^{-7}$而不是10，以10為底的常用對數在Briggs與Napier見面之後，才在Briggs的手中誕生，而可敬的Napier在做出對數表的三年後與世長辭，這門不假其他數學

研究的學問才正要席捲數學界，在此容我用西北雨來形容對數這項發明的出現——

> 埋首計算那煩悶一如夏日午後的龐大乘法，毫無預兆地幾滴名爲「對數」的斗大雨滴落下，轉眼整個數學界的天空變了顏色，狂洩的雨水淋濕了厚重的計算紙，雨過天青，計算紙上繁複的乘法變成加法，簡單一如雨後的清爽空氣。

雨後，天文學家，減少了計算時間，延長了學術生涯。

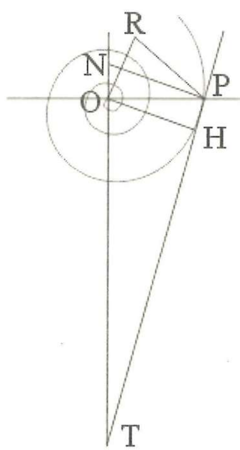
充斥於天地萬物　閃爍在晨曦蛛網

在一片空曠的草地上，甲、乙、丙、丁四隻狗分別站立在一個正方形的四個頂點 A、B、C、D上。狗主人要甲狗緊盯著乙狗、乙狗緊盯著丙狗、丙狗緊盯著丁狗、丁狗緊盯著甲狗。一聲令下，四隻狗以相同的速度同時衝向目標。假定每隻狗在每個時刻都是正面朝向它的目標，那麼，這四隻狗所跑過的路徑是什麼形式呢？

出自趙文敏老師的文章《等角螺線及其他》，有興趣的人可以看看：http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_20_09_1/index.html

他的答案是等角螺線，如果用極座標表示，等角螺線的基本形式就是 $r = ae^{\theta}\cot\theta$。

等角螺線有著驚人的美妙相似性質，這使得大自然中許許多多的生物身上都顯示等角螺線的存在，鸚鵡螺的截面線條、鳳梨、向日葵的螺旋紋都是這種形式，另一方面，等角螺線在數學上也有許多神奇的性質，如右圖中，做一過P點的切線截y軸於T點，則從O點沿著螺線到P點的距離恰等於PT的距離，是由Galilei的學生Torricelli證明出來。



另一方面，有個經常被誤認為是拋物線的曲線也跟e分不開來，它被稱為懸鏈線，是由開始大量使用極座標研究螺線的Jakob Bernoulli提出來的問題，「把一條細繩掛在兩定點上，讓他自

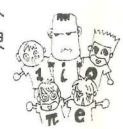
由懸垂下來，求：這細繩會構成怎樣的曲線。」這個曲線的基本形式是（ $e^x + e^{-x}$ ）/2，同時也是相同條件下位能最小的曲線，當然這個答案在當時不是這個樣子，因為要等到 Euler 來為自然對數命名。

隨手拈遊戲之作　遺我以美麗結果

相對於π是希臘文字中圓周的第一個字母，e的由來是較不為人所熟知的。一般皆認為Euler是提出e作為自然對數的數學家，因此偶爾總會有人認為根本就是Euler取自己名字的第一個字母作為自然對數，但是別忘了大家稱呼e為自然對數而不是Euler對數——或Euler常數(註一)。

Euler選擇e的理由較為人所接受的說法有二，一為在a，b，c，d等四個常被使用的字母後面，第一個尚未被經常使用的字母就是e，所以Euler很自然地、毫不避嫌地選了e這個符號代表自然對數的底數，一為e是指數(exponential)的第一個字母，雖然你或許會懷疑瑞士人Euler的母語又不是英文，很不幸地法文、德文的指數都是exponential(註二)。

不論如何，我們已經接受e代表著自然對數，現在讓我們先拋開折磨人的嚴謹性，一起來感受一下Newton與Leibniz創造微積分之後，屬於數學界的大航海時代精神：



1.首先大家都知道 $e^x = 1 + x + x2/2! + x3/3! + x4/4! + x5/5! + \cdots$

2.用 ix 代替 x

3.$e^{ix} = 1 + ix + (ix)^2/2! + (ix)^3/3! + (ix)^4/4! + (ix)^5/5! + \cdots$

$$= 1 + ix - x^2/2! - ix^3/3! + x^4/4! + ix^5/5! + \cdots$$
$$= (1 - x^2/2! + x^4/4! + \cdots) + i(x - x^3/3! + x^5/5! + \cdots)$$
$$= \cos x + i \sin x \text{（註三）}$$

4.如果你寫下另一個用 $-ix$ 代替 x 的式子，就可以加減得到Euler三角函數公式

$$\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2 \quad 、\quad \sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$$

5.如果你將π代入 x ，就會看到 $e^{i\pi} = -1$，也就是 $e^{i\pi} + 1 = 0$

感謝Lagrange、Cauchy、Weierstrass等等後來許多數學家們的努

力，Euler的遊戲之作在今日已經成了人們眼中最美麗的數學式！而這個過程的嚴謹性讓大家等著看他怎麼出現在數學系的課程吧！

註：

一、

事實上 Euler 常數 γ 是另一個跟對數有關的常數。

二、

不過筆者在懷疑會不會是 l 這個對數的開頭字母的書寫體壓扁的結果？畢竟 l 常常拿來代表長度，所以要將它變體一下囉~~

三、

在 Euler 之前已經有一位英國數學家 Roger Cotes 計算出那個常數是 2.7182818，同時提出以那個常數作為底數得到這個式子

$$i = \log(\cos\phi + i\sin\phi) \text{ where } i = (-1)^{1/2}$$

(Logometria,1714、Harmonia mensurarum,1722)

參考書目：

[1] American Council of Learned Societies(1991). *Biographical Dictionary of Mathematicians*. NewYork：Scribner。
[2] Eli Maor 著，鄭惟厚譯，毛起來說 e，台北，天下文化。
[3] Ian Stewart 著，葉李華譯，大自然的數學遊戲，台北，天下文化。
[4] Ian Stewart著，蔡信行譯，生物世界的自然遊戲，台北，天下文化。
[5] 趙文敏撰，等角螺線及其他，科學月刊第二十卷，台北，北市科學出版事業委員會。
[6] 曹亮吉著，阿草的葫蘆，台北，遠哲科學教育基金會。
[7] 蘇惠玉等編，HPM 通訊，台北，師大數學。
[8] 吳文俊等編，世界著名數學家傳記，北平，科學出版社。

寫在最後…

很遺憾地刪掉了很多東西，像是許多可以讓文章更加生動的圖片、提到等角螺線就讓人自然而然聯想到的黃金比例及Fibonacci數列、e身為一個超越數對數學界的影響…等等，這次是很難得的經驗，看了很多書，也學到很多過去沒注意的知識，很累、很有充實感。

Find Literature

上邪

俊瑋

上 邪

失去速度的狂奔是剽悍的張望
失去張力的呼嘯是謬誤的哀嘆
失去顏色的夢境是荒涼的笑靨
失去溫度的愛戀是絕版的烙記
失去記憶的誓言是別離的啟示
失去信念的等待是光年的遙遠
失去意識的肉體是絕對的斷念
失去靈魂的軀殼是遺落的永遠
失去聲色的大地是渾然的孤默
失去光芒的長日是毀滅的開端

我欲與君相知

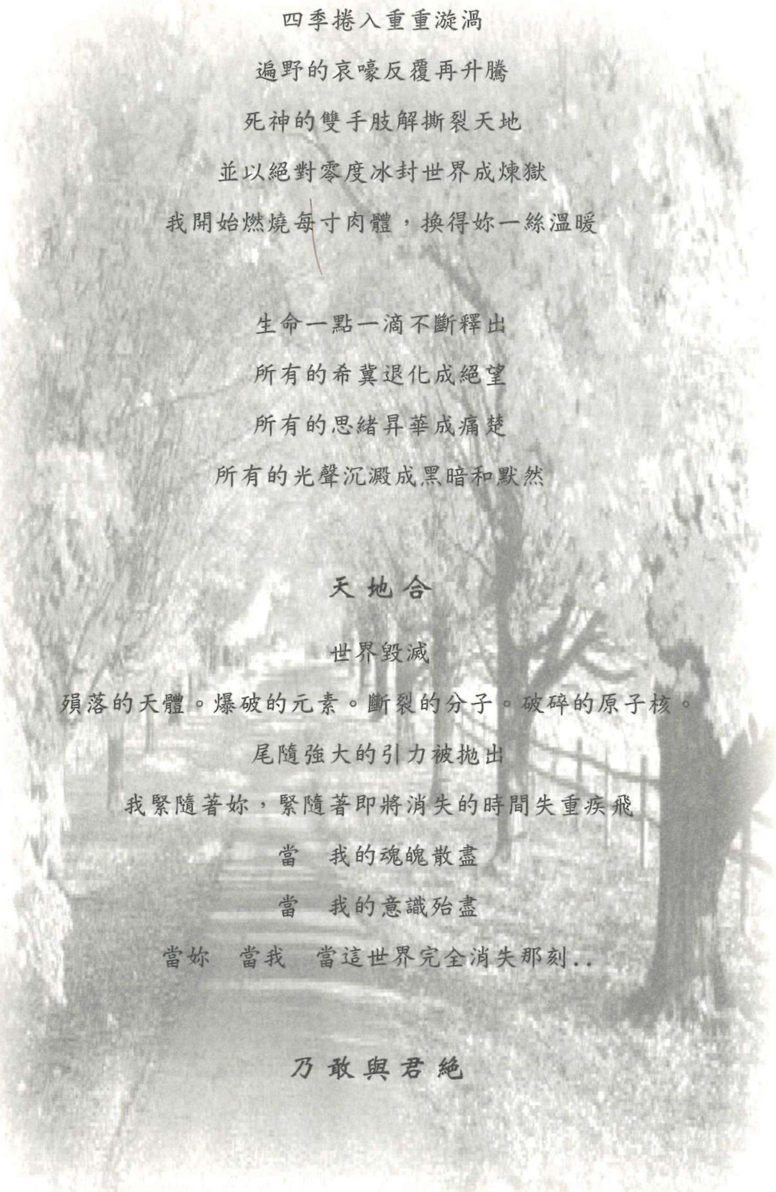
你隨著時間的步伐走來
悄悄侵入我的軀殼
從神經中樞緩慢流竄蔓延
漸漸...漸漸...
漫溢了每寸筋肉，每塊骨髓，每滴血液和每單位細胞
最後
徹底占據我的心和我所有思緒

長命無絶衰

選擇
把妳的名字刻入腦髓
滿滿地綢密於我的記憶和思念
選擇
把妳的容顏印入視膜
每段思緒的空白用妳填滿
直到
時間把你我流往無止盡未來式
直到
山巒頹圮成曠野　江河乾涸成絕路
而我日慕夜盼的依舊只有妳......

山無陵　江水為竭

時間野性似地狂奔......
睜開眼睛
我們相遇在末日
－大江決堤，群山倒毀，諸神哀逃
無垠颶風伸入重天
揚起長沙滾滾悲歌狂嘯
濁流掩滅原野
狂石煙覆生靈
折翼的天使由天邊殞落
妳笑容的剪影從我眼前風化而去



冬雷震震夏雨雪

四季捲入重重漩渦
遍野的哀嚎反覆再升騰
死神的雙手肢解撕裂天地
並以絕對零度冰封世界成煉獄
我開始燃燒每寸肉體，換得妳一絲溫暖

生命一點一滴不斷釋出
所有的希冀退化成絕望
所有的思緒昇華成痛楚
所有的光聲沉澱成黑暗和默然

天地合

世界毀滅
殞落的天體。爆破的元素。斷裂的分子。破碎的原子核。
尾隨強大的引力被拋出
我緊隨著妳，緊隨著即將消失的時間失重疾飛
當　我的魂魄散盡
當　我的意識殆盡
當妳　當我　當這世界完全消失那刻..

乃敢與君絕

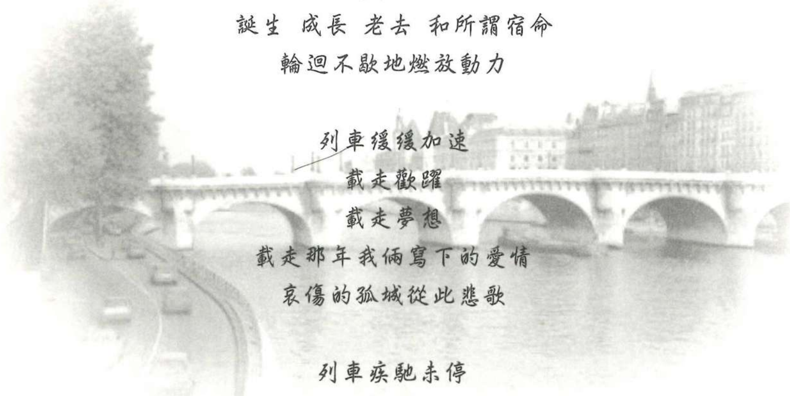
心城

健豪

像一顆塵埃在天地間浮游了好些年
突然刮起的一陣颶風將塵捲離　落定在台北城
悄悄在沒人注意下落苗紮根　準備發芽生葉結果
建築工人也同時在我心中動工　擴建一個新城
愈趨規模完整的城市　裡頭住著的是赤裸裸的自己
這座城跟台北市很像　布滿盤根錯節的街道和各式各樣的建築
只是少了人聲鼎沸　沒了繁榮喧囂　缺了車水馬龍
充斥白晝的光線　明亮刺眼卻夾雜不出一絲暖度
蕭條的街道籠罩著一股孤寂落漠的氣氛
當光明轉為黯淡　這裡是座不夜城
色彩繽紛的霓虹燈　一不小心就會迷失在這五光十色的炫爛
我不是個認路高手　在找不到引路者的無奈下
只有選擇連結城市各聚點的地下鐵
地鐵從一開始的棋盤式連通到如今的蜘蛛網狀分布
說明著整座城正無限延展繁衍　而且毫無章法
一切自動化的設計　讓作業變的輕而易舉
所以每個人不會想在外頭冒險　寧願與城市隔絕
隨地鐵穿越過密密麻麻的隧道
每天我都在尋覓　那個出口是通往森林、草原和海洋
身旁的人似乎各有心事　沉默讓空氣也凝結膠著
熟悉的寂寞早已司空見慣　每個人都專注在自己所等待的出口
播報台所響起的靠站叮嚀　滿足下站人迫不及待的解脫
有時　也想跟著眾人下車　但我知道現在還在市中心底下
夠了　何必在心裡面為了等待而糾結呢
現實中的森林、草原　就動身讓一切盡收眼底
好好記住草的芬芳　花的嬌嫩　在心城內闢出該有的花園
事情可以變的很簡單　只要懂得放手去做　溫暖就可以傳達給全世界

流

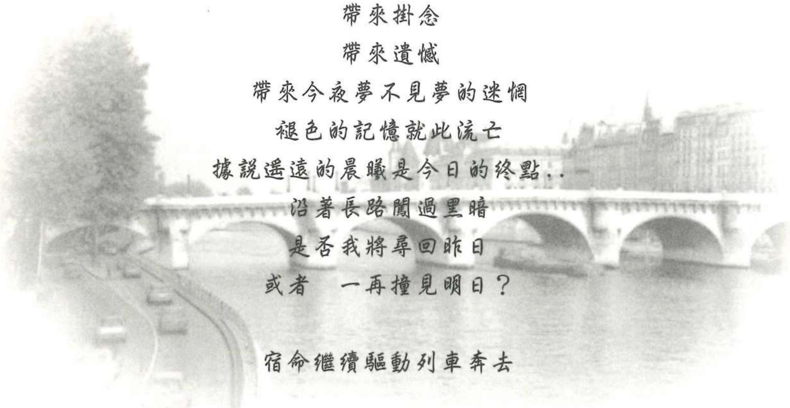
俊瑋



里暗吞沒光的影子
列車開啟
誕生 成長 老去 和所謂宿命
輪迴不歇地燃放動力

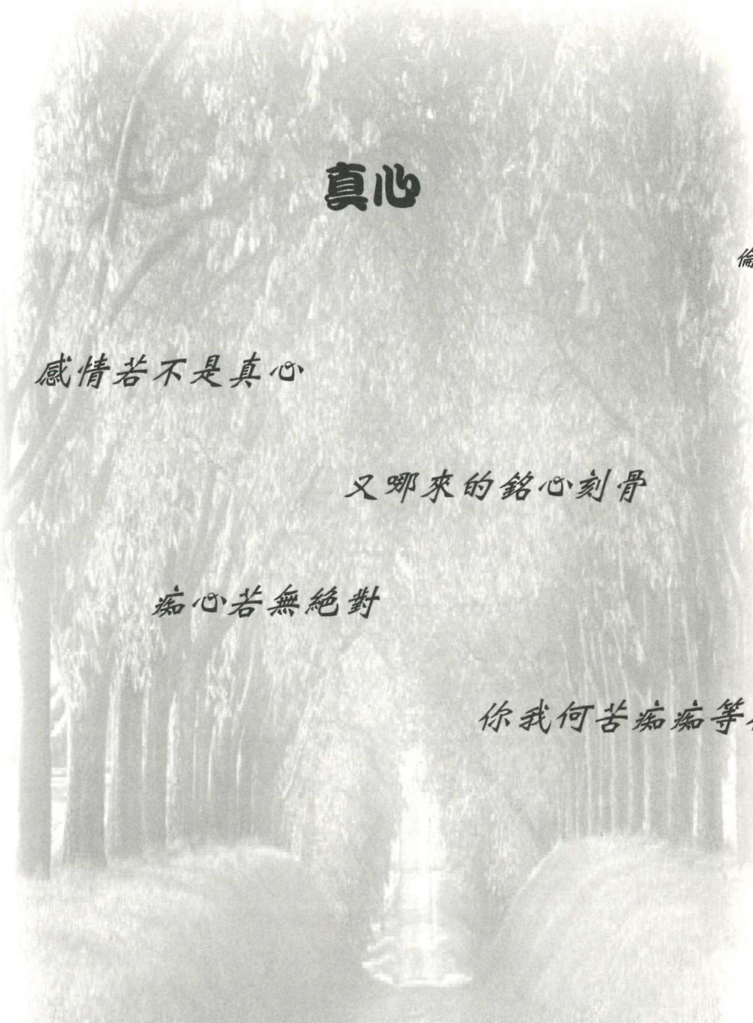
列車緩緩加速
載走歡躍
載走夢想
載走那年我倆寫下的愛情
哀傷的孤城從此悲歌

列車疾馳未停
信仰昇華
慾望充斥
臨界的情绪極度不安
太多執著和矜持失重拋出



列車匆促過站
帶來掛念
帶來遺憾
帶來今夜夢不見夢的迷惘
褪色的記憶就此流亡
據說遥遠的晨曦是今日的終點..
沿著長路闖過里暗
是否我將尋回昨日
或者 一再撞見明日？

宿命繼續驅動列車奔去



真心

倫耀

感情若不是真心

又哪來的銘心刻骨

痴心若無絕對

你我何苦痴痴等待

秋後

俊瑋

小葉新凋
雲層邊緣擴張的暈漬漸深
潮滿，遍野猖浪無情張揚
殘日顛簸地隱向血紅的歸宿
燎起一原火舌急劇傾斜
燃掉長晝
燃燒城市
燃盡往日遼遠憂悒的夢境
而後孤影迤邐跌落萬丈黑夜

城市，已於迷濛的雲影中老去
延遲的蕭索策馬而起，以風行之姿流竄
沉然的秋色就此浩蕩灑落
分隔了上季輝煌　這季淒涼
歲月遂也掩不住遺落豐華
那嬌柔的面龐已凋零
猖朗的笑容也頹
他絕望的眼眸連悲喜都看盡

潮落，衰老的餘瀾退盡
仰頭23.5度你常憶起的華日　尾隨
遠走的星芒一致向西殞落
似你　歸去那聲無奈和歎息
波堤外，欲墜的風化岩依舊啜淚
而我的思念輕搖，傾倒
無人擾醒的涼荒
恰如絕望和長夜　一直沉然地吶喊

葉伴蓮

梓君

夜，在秦淮河畔永遠都是富麗而喧囂的，特別是今晚！幾乎所有的人都想擠進玉霄樓—秦淮兩大青樓之一。

走進玉霄樓，人聲鼎沸著；不爲別的，就爲了玉霄樓第一名妓—柳小小！柳小小的美，是眾家公認的！男人、女人都愛看她！姣好的面容，不需脂粉的襯托；靈秀的身段，不需華服來相映！最讓人訝異的是她的氣質，出淤泥而不染。不曾因她置身青樓而有所消減改變！而柳小小另外爲人所稱道的是她的才氣！除了琴棋詩畫樣樣精不打緊，她的玉笛可是秦淮一絕！

所有人都說，柳小小向來賣藝不賣身！老鴇從不讓客人佔了她！所有人原以爲老鴇想一輩子護著柳小小，但半個月前玉霄樓傳出了柳小小招標的消息，讓人不禁懷疑老鴇是不是早就看準柳小小會有更高的身價。是的！今夜是柳小小的招標日！在她二八生辰的今天。

「兩位公子，不是本地人吧！進來坐坐吧！今晚可是個大日子哩……。」儘管人已經來了很多，但站在門口的龜公，一眼就在人潮中看見了這兩位公子！憑著他閱人無數的經驗，他知道這絕不是簡單的人物！或許是私心，柳小小是他看大的，他希望她可以給個好人！甚至希望那人可以把柳小小帶離這煙花之地。

「嗯？看樣子今晚趕上了一趟熱鬧。」漾開了一抹笑，白玉辰拉起葉寒的手就打算進去！

「不了。」語調裡透著平淡。知道白玉辰向來愛玩，就隨他去。

「你不進去？那我自己進去了！等會兒我們客棧見。」話說完，人眞的就自顧自的進去了！料準了好友的個性，知道他一定不會跟進來。哎！沒辦法，那人就這樣。從小的玩伴兼師兄弟，白玉辰這輩子最大的沮喪就是沒辦法把那潭水變得熱情一點。葉寒他的個性就這樣，像水一樣的溫和、平淡……近乎無聊的少有情緒波動，似乎泰山崩於前都可以面不改色！

唉……想到他就覺得自己挺失敗的！除了十五歲那一年他不小心摔到葉

寒的蓮池裡，不小心的折斷了葉子他的寒雪蓮那一次之外，眞的很少看過葉寒的表情有過太大的改變！！唉唉唉！不過，那次是眞的被葉寒他嚇到了！他想，如果他們不是這樣的好朋友，葉寒極可能會殺了他！想到這裡他突然打了個冷顫！因爲從那個時候起他就知道葉寒並不是如表面上的平淡！只不過會引起他心緒波動的事不多罷了。

踏進玉霄樓的一剎那間，周圍的人群突然噤了聲……正當他自得地想著『哈！我白玉辰有這麼偉大嗎！』的同時，耳畔響起了徐徐的撥絃聲，琴是彈得不錯，他抬頭看，一名姿容秀雅的紫衣姑娘在前臺撫琴！美則美矣，但白玉辰頗失望的就是了！畢竟他美人看的多了！正當他打算轉身離去時，琴音轉弱，一線笛音柔柔地、婉轉地，似怨還訴地揪住了白玉辰。不用回頭，他就知道這笛音的主人才是今天的主角。

一曲將罷，白玉辰此時方才仔細的端詳起柳小小。白玉辰雖然是第一次見到她，卻有一種熟悉的感覺！那份熟悉的感覺困惑了他！他決定一探究竟。於是，他重金買下了柳小小的初夜！不爲別的，只想釐清這分感覺！

蓮茵閣，是柳小小的閨房。她定定的瞧著坐在身旁的男子，心底下有了一些釋然。畢竟，這是她的命，長年的陪笑生涯，她早知道有這一天的來臨！她不是不想離開這種生活，只是在她八歲賣身進玉霄樓後，她就知道她沒有退路了。她知道眼前的男子是阿娘—她對老鴇的稱呼—爲她揀的！阿娘儘管再疼她，也畢竟是個老鴇…而阿娘對她的恩情，唉…！

「小小姑娘，妳願不願意陪我聊聊天啊。談談妳的身世好不好？」讀出柳小小的愁思，白玉辰給了小小一個大大的笑容。

「小小命薄，沒什麼好和公子談的。不如，讓小小爲公子吹首曲子吧！」白玉辰的君子讓小小覺得奇怪。身處青樓，她雖是處子，但卻明白清楚男人到青樓就是爲了尋歡，而今晚買下她，不就是想要了她嗎？但她直覺地知道這個男子和別的人是不同的！眼神澄澈，對她，是尊重的！白玉辰只讓她有種舒服的感覺。所以她願意爲白玉辰獻藝，心甘情願的。

小小取出玉笛，正準備吹奏時，白玉辰像是想到什麼了一樣的跳了起來！此舉嚇到了小小。

「公子…」小小看著興高采烈的白玉辰，突然不知道要說什麼好了。她

只有一種很羨慕的感覺…眞好…可以這樣快樂。

「蓮…蓮！就是蓮！我知道了！哈哈！！」他開始仔細地審視小小的香閨。他發現，小小應該是很愛蓮的女孩！房內逕是素雅的擺設，處處繡著朵朵的蓮伴葉。他突然想到…蓮伴葉…蓮伴葉！難怪他覺得小小給他一種熟悉感，他跟葉子這個蓮癡生活了十幾個年頭，今兒個遇上個像朵蓮的女子，難怪他會有這種感覺。

「小小姑娘，你想不想離開青樓？」白玉辰下了一個決定。

「公子，謝謝公子的美意，小小心領了…」小小的眼神在聽到白玉辰的話時亮了起來，但隨即想到，她是走不了的，眼光就黯了下來。她還能去那裡呢？

「小小姑娘！只要你願意，我，白玉辰就一定帶你離開。」

「但…公子…小小早已無處可去了！」眼底，有著更深一層的悲哀！是啊！想她一個弱女子，到那裡都是受欺負的！在玉霄樓，至少她還有選擇的權力。

「不怕！我認你做妹子！以後跟著我就好啦！」白玉辰在心底補上，葉子…我可給你找到蓮相伴啦…！白玉辰看著小小，很認眞地對她說。

看著白玉辰，小小燃起一絲希望。她知道她如果跟著白玉辰離開，會面對的將是一分茫然不知的未來。但，她願意賭！小小雖然柔弱，但是她很堅強！雖然她總是默默的承受自己的命運。在爹爹死的時候，她自己進了青樓賣身葬父。對阿娘她是感激的！但她也清楚，自己並不欠阿娘什麼了，在過了今天之後。

「小小，就跟大哥走！」小小的臉上展開了一朵前所未有的燦爛笑容。

洗盡鉛華，在白玉辰重金壓迫下，玉霄樓放了人。小小拎著自己的行囊，一身白素的跟著白玉辰回到了落腳的客棧！

在回程的路上，小小跟白玉辰提了一些往事，小小決定改回本名，蓮思涵。

白玉辰在聽到小小的本名時，著實嚇了好一大跳！他想著，自己是不是

運氣太好了啊！…葉子啊葉子！我眞對得起你了！這樣都讓我給碰上了！哈哈！蓮思涵…“蓮”思“寒”！眞是太配了！

踩著雀躍的步伐，白玉辰一腳踹開了客棧房門。

「葉子葉子！我給你介紹我的新妹子，思“涵”。」說著說著，他把蓮思涵從身邊往前推了一步！

「思涵見過葉大哥！」張著一雙美眸，水靈靈的看著眼前的男子。

在葉寒錯愕的同時，白玉辰補了一句話，「眞巧，我妹子姓蓮…」

漾著重生的光彩，蓮思涵給了葉寒一抹微笑！

一朵白蓮在葉的面前展露了它最美最美的風情！找到了彼此…

—完—

流星

流水行雲

我的心情像下雨 胡亂飛濺 散落一地 因為沒有妳

細雨又在窗外綿綿細語，明明是應該靜靜地散落，卻聽到點滴在耳邊輕聲低訴，斗大地、緩慢地落下，以及，紊亂心情披在肩上理還亂。

那一年見到妳，一樣的是，台北慣有的雨天，不一樣的是，台北少有的雨後天晴，大地的氣息由土裡竄出，撲鼻盡是生意盎然，最是纏人不休的雨天倏地轉眼消失。

細數有妳的台北，雨天竟意外地少，縱有也不再是雨打芭蕉人讀書。

雨天 是爲了思念而存在

下雨 是爲了眼淚已流乾

我的心情像流星 劃破天際 慘淡光陰 因為沒有妳

流星靜靜劃破天際，又是怎樣一段傷心故事畫下了句號？

每顆心都是天上某顆星，雙星彼此圍繞而永不交會，變星明滅不定而神秘誘人，超新星盡將殘紅點明眸，白矮星更似黃花添清瘦，他們的美驚心動魄足以令天地爲之動容。

記得幾年前規模龐大的獅子座流星雨，一度讓我以爲那是921大地震的傷心人灑下，直到後來我才知道那是妳的眼淚你的心碎，而妳從不看令人著迷星空，是因爲天上不再有妳的星？

星辰 是熊熊燃燒的璀璨

隕星 是靜靜消逝的美麗

我的心情像風鈴 沒有主見 無法成形 因為沒有妳

晚風吹過，依舊沒聽見妳的聲音。

風可以將一個人的心聲傳到世間的任何一個角落，和煦的風讓人心中感到溫暖；涼爽的風帶走人心中的煩惱；冷冽的風則會提醒你等待著你的那雙溫暖的手。

但是一般人是聽不到風所帶來的信息，所以想聆聽風的聲音、卻又聽不到的人，會用風鈴來留下風聲。然而，被妳繫住的風箏我的心，卻未曾響起鈴聲，究竟妳的心吹向何方？

風吹 繫在手中的細繩上

鈴靜 停在窗邊的屋簷下

我的心情像問號 鉤子心碎 一點茫然 因為沒有妳

淚眼問花花不語，亂紅吹過秋千去。

問號問號問號，永遠都得不到答案的問號，一道道劃過身影，撕裂著肉體，勾扯著靈魂，我試著去逃避，轉眼間問號已淹沒了我，陷入一池令人窒息的沉默之中。

一個個的夜裡，一個個問號尾隨著不可數的刪節號，刪節號之中有刪節號，刪節號之後有刪節號，無界、稠密、處處連續、處處不可微，猶如一點墨水滴入心湖，暈開、混合、處處存在、處處見不著…

鉤子 扯向奈何橋勾著心

點滴 濺出夢婆湯映著情

我的心情像冰塊 沒有溫度 化了一地 因為沒有妳

躺在冰冷的地上，鮮豔的紅色中，竟有一種將要溶化的感覺。

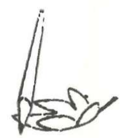
麻木的手腳，加速的心跳，逐漸失溫的身體終於讓暴走的靈魂有了安歇的機會。比起妳冰冷的眼神，失去知覺反而意外地輕鬆，除了心臟不爭氣地顫抖了幾下，最後幾下。

冰冷 眼神輕淡地訴說出

顫抖 心臟狂亂地怒吼著

我好想妳 我好想妳 我好想妳 我好想妳

我我我 好好好 想想想想 想 想 妳妳妳 妳 妳 妳 妳 妳 妳



是妳嗎 是妳 曾出現夢裡

想妳嗎 想妳 已不在心裡

塵歸塵、土歸土，雨水滲入地底，只爲破土而出等待；鳳凰引火自焚，終於化作灰燼重生。

美麗與哀愁

數93丙黃俊瑋

總在最華美的那刻，它正開始緩緩衰敗傾頹…

一張照片旁的文字註解著〝教練都比球員高了，接下來的仗，金教練該怎麼打呢？〞

2002年末，HBL的複賽如火如荼的邁向尾聲，而一向被稱爲王者的屏東高中籃球隊，到底是怎麼了？

約莫是四、五年前，或者再久遠一點，尚韋凡，簡明富，張智峰他們仍在的時候…

隱約記得六年前，一向是常勝軍的高市立志中學，一路踉蹌地打進四強決賽，卻也是他們最後一場的八強複賽。當時，另一所南霸天〝屏中〞仍舊屹立不搖。

還清晰記得那畫面——擠爆了雄中體育館的人潮，用掀翻屋頂的加油聲，挺著我們所熟悉，和我們有著深厚地緣親近的屏中籃球隊。我們有著同樣的情懷，也有著同樣的喜愛和支持，我們擁有共同一致的目標，我們用滿腔沸騰燃燒的熱血，鼓動著每一顆來自南台灣的心，團結地對抗那自北方我們所憎惡的強權——再興中學，即使最終以些微之差屈居亞軍。然而當我不經意地回首把目光投向滿場球迷之中，似乎很多人在飆淚，更多更多的人則是帶著滿滿的無奈和嘆息，遲遲不願步出場館。但，短短的時間裡，曾經擁有過的激情和感動，卻是怎也揮之不去的記憶，無法忘懷……

隔年，屏中四名升上三年級主將不負眾望，以秋風掃落葉之姿，再度搶回了冠軍。然，此刻，南部其它多所私校業已悄然竄起，在屏中礙於公立高中既有制度的同時，再來呢？似乎已有預感，也許王朝倒毀之日已不久矣。

打從開始著迷的那一場HBL球賽，時隔多年的這些日子以來，總不忘持續地關心著屏中的戰績，和整個HBL球隊的生態。然而，隨著日復一日，年復一年的過去，他們王者的路程卻也越趨艱鉅，終於，十多年來建立的王朝

瞬間瓦解。

2003年1月5日中午，我無意地在書局翻到那張照片，球員們喪氣地低著頭，金亦清教練仰望著計分板上，所剩不多的時間，和遙不可及的比數……

這場景，彷彿當年Jordan最後一次離開公牛隊時，帶走了勝利，帶走了人們的美夢，也帶走那些曾經熱情，曾經瘋狂的心，那般令人感到惋惜和感傷。

一切美麗的事物終有盡頭，緊接而來的，只是不堪回首的唏嘘與哀愁。而我們所能擁有的，就只剩粗淺的文字和回憶。

蟬鳴

蒼月零

蟬鳴不已夏日如焰

那年的夏天，「知了知了」蟬鳴聲不絕於耳…

走出屋子後門即是山腳處，穿過荔枝林衝向山路另一側的竹林，陽光灑下彷彿霓虹燈打在身上，今天哥哥們被留在家裡禁足，聽母親說昨晚玩得太晚回來而進不了大門的兩人，居然爬上屋頂掀開瓦楞鑽進自己房裡，不過父親怎麼會知道呢？該是大哥跟他說的，總之今天沒人跟我爭，我可以挑最大隻的蟬了！雖然阿榮也跟來，不過要是他敢跟我搶，我就一狀告到伯母家去！

母親說下學期要把我轉學去草屯唸書，父親看三位哥哥雖然聰明，卻都沒能好好讀書，所以要把我送去草屯最好的國中，才不會書沒讀好，盡學些翻牆鑽狗洞的事，可是這樣一來我跟阿榮就沒有同校，就不能考試考第一名贏他，就沒有機會讓伯母請我吃糖果了。那種糖果矸仔店都買不到喔，阿榮說是他姨媽從外國帶回來的，還說村子裡的小孩都沒吃過，連他們家小孩都沒得吃，這是當然囉，因爲伯母最疼我了，總是說要讓我當她女兒呀！而且阿榮雖然還蠻聰明的，但是還是比我差上一點啦，每次都得乖乖地把第一名拱手讓給我。

我跟阿榮說，以後就沒有人跟他搶第一名了，那就有機會吃到伯母的糖果啦！沒想到他居然說沒有贏過我，就不是眞正的第一名，我只好告訴他，那就幫我保管第一名吧…

蟬鳴不已夏日炎炎

那年的夏天，「知了知了」蟬鳴聲此起彼落…

正坐在家裡看著電視的我，隱約聽到門外有個人正在叫著我的名字，推開門看到傑跟他的結拜兄弟排骨祥兩人出現在三合院外進門口，看來又是排骨祥要我替他找阿娟出來，看在哥兒們的份上，當然是二話不說，去找阿娟過來「討論功課」啦！

嬸婆三不五時就要我多幫她家的阿娟照顧一下功課，看會不會書讀得比較好，以後嫁個好夫婿就不用一輩子下田辛苦了，所以，我隨時都可以把阿娟找出來指導功課。

爲了不讓附近的人撞見，我們往往是到後山去散步，阿娟總說她不敢單獨跟他們走一起，所以要我陪她，其實，每次他們倆都會莫名地失蹤，只因爲傑這個呆瓜都會跟在旁邊當電燈泡，而他們又擔心把他一個人丟在後山會讓他迷路，所以需要我去確保他不會變成失蹤人口。

傑的祖父是芬園人眼中的傳奇性人物，原本家境不好，沒田沒地的，唸完小學後，從行腳商人開始做起，偶爾也靠著識字的本領幫鄉里的人們解決問題，幾年前竟然在街上開了家肥皂工廠，而且還聯合一些地主創辦了芬園國中，隱約成了芬園鄉的領導人物之一。閒暇時候父親總會帶著大哥去他家批一些肥皂，載到草屯或彰化去賣，加上傑的祖父是大伯的國小同學，所以我們家也算是世交了。

不過，今天不同於以往，傑在他們“失蹤”之前突然問起，要不要來霧峰玩？頓時，悉悉的腳踩落葉聲消失，只剩蟬鳴聲襯著這陣沉默。

蟬鳴不已夏日拳拳

那年的夏天，「知了知了」蟬鳴聲喧囂一夏…

轉眼，肚子裡已經懷了傑的孩子，聽說那次去霧峰玩時，傑的祖父知道他帶女孩子回家，急急忙忙地趕到了霧峰，一個月後，就有人上門來提親了，父親知道是趙家來提親，也很乾脆地答應了，正好能在二哥成親之前，讓我嫁出去，這是芬園的習俗，讓家裡的人數不變。

當年轉學到草屯的時機不對，我沒能參加編班考，所以被安排到放牛班，結果可想而知，父親也不支持我繼續唸二專，只是沒想到留在芬園唸書的阿榮現在已經是大學生，或許父親是因爲這樣的原因，才這麼乾脆地讓我嫁入趙家吧！以免讓阿榮家尷尬…

熱鬧喧囂的傳統婚禮，不過有熟悉的樂隊在樹上不停地演奏。另一方面，排骨祥的終身大事還在不停地碰壁，因爲阿娟的父母親希望能看到排骨祥有足夠能力保證阿娟的幸福，倒是我被阿娟笑作「惦惦吃三碗公」。

蟬鳴不已夏日淪陷

那年的夏天，「知了知了」蟬鳴聲零零落落…

外頭突然停下了三輛轎車，幾名彪形大漢兇神惡煞似地走進店裡，帶頭一個走近了我正趴著休息的櫃檯。

「姓趙的，你給我滾出來！」

「請問，有啥貴事？」原本正在廚房炸排骨的傑聽到聲音走了出來。

「你錢是要還嗎？」

「你要我還，我當然也很想還，可是我現在沒錢還呀。」

「幹！不還？不還我們就砸了你的店。」一個手勢揮下，只見那幾名大漢已經開始掀桌子了。

「等一下！」我猛然站起來喊了一聲，「這位大哥，我想你也不希望收不到錢吧，可是你這樣砸我的店，我賺不了錢又怎麼有辦法還錢呢？…這樣好了，我明天湊一湊先還你一半，如何？」

「明天先還一半是吧？好！衝著妳這句話，我們走。」

彷彿西北雨來去無蹤，轉眼似乎什麼事都沒有發生過，除了握著的菜刀的手心濕漉漉地教人幾乎握不住，告訴我這一切都不是幻覺。

去年投資失敗，不但拿工廠去抵押的資金全部失去了，當初爲了暫時應付利息而借的錢成了沉重的負擔，但是最讓人痛心的是傑的好友排骨祥在經營失敗後，竟然無聲無息地跑到了大陸。

幾天前，傑才被這些討債的人在家門口堵到，揍了一頓天昏地暗，不希望讓孩子看到他的樣子，只好一整晚睡在車子上，車子停在工廠裡，已經沉寂好幾年的工廠裡。

用這麼沉重的代價學到了「人心險惡」這個教訓，但是亙在眼前的問題是，趕緊先把高利貸還清才是辦法。

蟬鳴不已夏日如煙

那年的夏天，「知了知了」蟬鳴聲已成追憶…

在親戚們的幫忙之下，暫時解決了高利貸的問題，銀行的借貸在工廠拍賣之後，剩下的部分就由傑的薪水中按月被銀行抽走，孩子們也漸漸靠著自己的雙手賺取生活費，家裡的開銷目前用我遊走各餐館的臨時廚師薪水也能暫時應付過來。

前次回娘家，聽伯母說阿榮現在在台大數學系當教授，她一直很後悔當年遊說我的父親讓我轉學到草屯去唸書，因爲當時鄉下學校上省中的人都不超過一人，在我的前幾屆剛好都只有我的大堂姐以及兩位哥哥，也很剛好地他們一人一屆，結果她以爲一個學校最多只能有一個人上省中。

如果當年留在芬園國小，我那任性的笨兒子會是阿榮的兒子嗎？還會是跟現在一樣在唸數學系呢？雖然華髮過半早已告訴我青春不再，然而會去想這種沒營養的問題，看來眞的是年紀不小了。

曾經，拿到全省美展第二的雙手，不再擁有揮灑畫筆的機會。

過去，用來打算盤寫傳票的雙手，早已忘記撥弄算珠的觸感。

如今，終日拿菜刀握鍋鏟的雙手，終於領悟控制火焰的訣竅。

過幾年孩子們也該都成家立業了，再等到爺爺奶奶的身體也不用我們操心的時候，我就可以去流浪了，靠這手廚藝去當個眞正的“流浪廚師”，或許會在哪個街頭遇見早已失聯的阿娟，或許會在哪個餐館與阿榮錯肩。

也或許會再次聽見那令人懷念卻久久未曾聽見的蟬鳴聲。

楓葉

蝸牛

當秋天灑下最後一把楓葉時，正是我要離開的時候。看著收拾好的行李，想起遠方的你，心裡竟然有一股幸福的感覺，就在這個時候，地上的楓葉剎那間……

那一天在眞理大學，她正努力向我說明楓葉和槭葉有什麼分別。原來楓葉和槭葉的分別在於，楓有三瓣葉子而槭有五瓣葉子。於是用三楓五槭來記憶他們的差別就相當容易了。

三是我的幸運數字，楓有一種秋天的瀟灑。於是楓葉終於進駐到我的生命中……

飛起來，飛過來，飛進我深深心懷……

那時候我還是個小毛頭，一個大一的新生。對於大學的一切事物都還陌生時，我加入了一個數學系的營隊，就叫數學營。像所有的高中畢業生一樣，我充滿著自負，數學營設計課程。設計數學課程有什麼難的？於是終於在最後發現到自己的不足。想要設計一個好的課程出來，對於一個大學新鮮人來說，實在是相當的困難。對於上台也充滿著恐懼，作夢也夢到了課程上得不好，那時候有這種情況的不只我，有一個頭很大的人，他姓王。他的夢話就是在試教。那時候，一雙雙的手就出現了，是學長姊的，很溫暖、很可靠，那一次我成功地完成我的課程，並且在這個營隊中，得到了相當的自信，那一個寒假我認識了六十多人。我的朋友於是非常的多……這一年的冬天，讓我在數學營裡一待就是三年。

越過那寧靜海，充滿著回憶的海……

大二了，在大二接課程組長。除了學長的肯定以外，需要的是自己面對挑戰的勇氣。大二，懂什麼東西呢？什麼都不懂，還要人家來教呢！竟然當上了組長，組長是要給人家東西的。憑藉著不認輸和挑戰的心情，我和一個共匪佬創造了空軍的傳說。那一年的課程組就叫做空軍。於是空軍飛翔，於是感情醞釀，於是空軍到今天還是糾纏不清，全因爲那一年的相遇。那一年，每一個組員，都很可愛；每一個準備的過程，都很感動。空軍裡的回

憶，褪色了，卻帶著依稀中的熟悉。

伍佰在演唱會的時候說：十年了。好深刻的一段話。每每聽到這句話，淚都快奪眶。我也說：三年了。有很多的人陪我在數學營裡，感動和哭泣。我也有兄弟，共闖天地。大三的這一年，我獲得了一位對我非常重要的伙伴。從不甚熟悉到衝突到互相包容到互相關心到至今夢裡竟也會夢到。那一年，依賴和衝動。我和數學營的伙伴，完成了數學營一直以來的夢想，拿下了最佳營隊。不管別人怎麼說，我就是敢大聲的說，這個獎屬於我們本來就是應該的，因爲我們值得。

數學營就像是我的楓葉，在我身旁飛舞，很多人都不懂爲何我對數學營這麼癡情。但數學營懂；你也懂的是不是？所有在營隊中感動的人兒。

楓葉啊　載滿著我的感動　　楓葉啊　傾訴著我心情哀

又是一個夏，看著收拾好的行李，想起遠方的你。秋來臨的時候，便是離開的季節。就在這個時候，地上的楓葉……

化成了滿山和滿谷的對你思念，寫滿了滿地和滿天的愛的詩篇，詠歎著生命的美麗和世界的無限，飛舞在以後和從前他連成一片……

看著楓葉，眞理大學的相遇，呵。當你看著這一篇文章，可愛的你，懂我的心情嗎？遙遠的那一邊說：幸好我懂。

楓葉落下，楓葉揚起，另一個圓圈圈的夢想起飛，另一個感動的淚水落下……

帶著楓葉的瀟灑離開，給深愛的伙伴 --- 數學營。

帶著楓葉的飛舞想念，給數學營的你。

歌詞摘自　楓葉・冬之火・伍佰 ©2002 Magic Stone Music Co., Ltd

施老講古
話說在一節課中...
今天來講Erdös數学家
Paul Erdös
1500篇論文
wolf Prize
數学家
1
他是小匈牙利裡的"大"數学家..
他是個奇怪的人.
話說....
2
某數学家
我想到一個有趣的猜想
真的嗎?
我馬上到!!
3
"心动不如"机"上行动
飛机
4
但是"天"有不測風雲
由於鬼鬼祟祟的舉动
站住!你是間諜
槍
真險誤会成...
还好最後被釋放了...
5
終於"平安"下飛机了.
飛机
My brain is open
真正高興地見到你.
滿心欢喜地....
數学家們
6
P.S open: every point is interior point
數学大師,你終於來了
其实1個人厲害不算什麼.
所謂"三個臭皮匠勝过一個諸葛亮"~
7
臭皮匠
大於
8


对了，怎么不找 xx 数学家来一起討論
哦！2年前他就死了...
9
10
難道是…
我上個月見到的人
是因為他在2年前就沒有新的作品了
被 Erdös 判数学死刑釘在"π"上的 xx 数学家
11
火車
我解完了..
我往另一個地方去了
Erdös 的一生很多時間在坐火車、飛机找数学家一起解題.
12
Erdös number
我是2哦！
13
大家要好好跟 Erdös 学習哦！
14
—Erdös number—
有和 Erdös 共同討論之者，
Erdös number 是"1"
有和 Erdös 的合作者合作过的
Erdös number 是"2"
什么都沒有的是"∞"
((气气博士時間))
15
部份內容純屬虛構，如有雷同，純屬巧合！
想更了解我的，可看"My brain is open"或者"数学爱人"、"不只一点疯狂"這三本書哦！
Painted by Jeces

魔數師－第六號
發行人：吳佩蓁
指導老師：陳創義、金鈐
主編：許勝溢、劉晉宏
封面設計：許勝溢
排版：鄭宇晴、許文寧、賴瑩綺、陳淑鈴、
鄭勃毅、趙國亨、張嘉福
發行日期：2003 年 5 月
印刷：金術美印刷社
師大學刊登字號第 2115 號

特別感謝 -- 老吳 logo 提供