數學系刊

Department of Mathematics
National Taiwan Normal University

5

我 欲 無 言

康洪元

系刊編者再三向我求稿，但我早主張，同學的園地，應由同學自已來耕耘，所以我現在選錄當代數學家Marshall Stone 的話，作爲對編者的交代。

A modern mathematician would prefer the positive characterization of his subject as the study of general abstract systems, each one of which is an edifice built of specified abstract elements and structured by the presence of arbitrary but unambiguously specified relations among them.

編 者 的 話

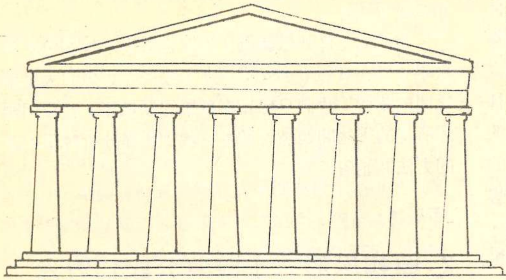
謝謝康主任給予我們完全的信任與支持！我們代表全體同學，也謝謝楊盛成，陳昭地兩位系友的來信和鄭福安系友請歐助教轉交的新台幣440元。我們非常希望更多的系友來信使新的園地繁榮起來。

學院化教育賜給我們嚴格的專技訓練，但較少使我們獲得認識與鑑賞的能力，這包括①對數學本質的瞭解：例如數學是什麼、近代數學的特徵、數學的過去與未來、公設法的意義與它在數學上的價值等；以及②對優美事實的品味：例如數學家的趣聞軼事，數學理論的起源與動機（不論是從歷史上尋得或採用舊經驗虛擬新理論誕生的心理過程）、面臨新問題的挑戰時，數學家的思考方法和概念等。我們在這一期裏，除了學術性的論著，特別选譯或創作了一些偏重"認識與鑑賞"的文章。在趣味性之外，它們的內容十分耐人尋味。

在"以自我爲中心"充斥的環境裏，我們懷著澎湃的熱誠爲一份（我們認爲）崇高的理想奔忙。爲了期望作者以負責誠懇的態度淸晰地闡述自己的論點，我們屢次地與作者商討文章內容。（對於未採用或更動的文章，我們在此表達歉意及謝意。）爲了使打字正確性提高，每篇稿件反覆校對相當多次，（希望您欣賞並提供剩餘的錯誤）。…………如今，一份喜悅逐漸從心湖湧現，爲它的點點滴滴。善意或激烈的批評將隨著它的出版而迴盪，但不論任何時候它所獲得的任何一點讚美都應當歸之於以下我所衷心感謝的師長與同學：康主任，所有系裏的助教尤其是圖書館的賴、劉兩助教及系辦公室的秦助教，研究所的趙先生，全體編輯與作者，邵萬華、黃奕杰、林雲壽、郭文聰、江滄州、計恒敬、戈文企、盧靜秋、蔡高太、李元龍以及其它熱心工作的同學。

主編

目録



THE ARCHITECTURE OF MATHEMATICS

數學是怎樣建築起來的？

NICHOLAS BOURBAKI　　數二乙　葉樹華　譯

譯者前言

形與數，是數學裏所要研究的兩個對象，前者爲連續的，後者是分散的；自有數學以來，人類總想把這兩種東西統合起來，但歷經數千年之久，總未獲得圓滿的解答。如果我們站在這種歷史背景上來看*Nicholas Bourbaki*的工作，將會覺得那是很自然的事了。在本文中，*Bourbaki* 提出了他們對於數學的見解，他們的工作信念以及他們對數學家工作性質的了解。

要想了解數學，*Bourbaki* 認爲不必採用哲學家所建立的先驗觀點（*a priori*）；數學家只要站在公設化的觀點上就行了。他們相信，藉着公設化方法的幫助，數學上很多結果就可以被歸類起來，而使過去看來很不相同的幾個部分獲得一種聯繫—這種統合的想法也許是歷史的趨勢使然。除了這種統合的觀點，*Bourbaki* 還特別强調工具的觀念。他們認爲，數學家處理問題的方法，多是在所考慮的對象中尋找一種自然的結構，這種結構便被拿來作爲解決問題的工具。

自從新數學的推行以來，已使我們多少都了解了一點公設法在數學上的重要性，然而我們的認識是否完全呢？譯者認爲，*Bourbaki* 在這裏所講的公設化方法是很值得我們參考的。

至於本文的題目爲什麽叫做〞數學之建築〞呢？這也是*Bourbaki* 的看法之一。他們認爲，近代數學的主要工作，是要在新的基礎上把已有的數學重新建立起來。在本文的第六節末了，*Bourbaki* 打了一個很有趣的比方，讀者讀到那兒時，很值得回味一下。

原文的英譯文是刊載於美國數學月刊一九五〇年四月號上。雖然距今已有二十餘年，但是這種思想已造成相當深遠的影響，且已成爲今天數學思想的一股主流。

這篇譯稿，已經有數位同學讀過一遍，他們提供了不少寶貴的意見。譯者在此一併向他們致謝！

※　※　※

1. 統一與分岐

由於數學這門領域的廣濶與多樣性，要想把它的全體作一番縱覽，乍看之下，眞是一件不可思議的事。從十九世紀末葉以來，數學的發展與其它各門科學一樣，研究的人與研究的成果，在數量上皆有大幅的增加。在正常的一年裏面，僅就純數學方面的研究報告而言，就超過了數千頁之多。當然，並非所有資料均

具相等的價值，實際上，若扣除那些難免的渣子，則剩下的成果仍然豐碩了數學的領域。並且穩健地延伸分枝出不少建立在新基礎上的理論。而後理論與理論彼此之間，再被比較、融合。在這種情況下，一個人即使願意付出他的全部時間，也無法去一一追尋各種發展的詳細經過情形。很多數學家都只佔據數學裏的一塊角落而不情願離開；他們與世隔絕，除了自己的特殊領域外，別的事一概不管。那些在另一個角落裏工作的同僚們所用的語言與術語，他們也不能了解。即使那些受過最廣泛訓練的人們，在這一望無際的數學世界裏，仍會對某些領域望而興歎。像潘迦列(*Poincar'e*)或希爾伯特(*Hilbert*)這些涉獵廣博的天才，在所有具備偉大成就的人們裏面，也只能算是很大的例外。

這樣說來，對於整個數學，連數學家本身都說不出一個所以然來，怎能使初學者對整個數學獲得精確的印象呢？但我們至少還可以這麼問：**數學底蓬勃發展，是否會趨向建立一個統合而強有力的組織？或者，紛亂就是數學的本質，而這種蓬勃正是分裂的表徵？**數學會不會像聖經裏通天塔的故事一樣，分崩離析爲許多分支，每個分支皆有其特殊的目標、語言及方法，而造成一種各自爲政的狀態？（創*11*章）換句話說，究竟我們今天擁有的是一種數學呢？還是多種數學？

雖然這個問題在目前急待解決，但是這絕不是一項新問題。這個問題幾乎在一開始有數學時，就有人提出了。姑且撇開應用數學不談，在幾何與算術的起源之間（指它們基本上的外觀），始終存在有一種二元論的說法。算術始於分散量(*discrete magnitude*)的研究，而幾何一直都在探討連續程度的觀念。自從無理數的發現以來，由這兩種外觀演變出來的兩種觀點，一直爭論不休。正是由於無理數的發現，使得第一次統一這門科學的希望破滅了。這個企圖就是畢達哥拉斯所主張的：一切都是數(*everything is number*)。

若我們真的想去追尋，從畢達哥拉斯到現在，數學上大一統思想的變遷，那就扯得太遠了。而且，這種工作由哲學家來做，將比數學家更爲適合。這是因爲，幾乎每一種統一數學的企圖，都多少要牽涉到某一種哲學體系，並且總是把一些關聯數學與二元宇宙（外在世界與內在思想）的先驗觀點(*a priori view point*)作爲開始。無論是柏拉圖、笛卡兒或萊布尼茲、*arithemetization* 或十九世紀的 *logistics*，都是作這種想法。關於這些，讀者可以參考 *L. Brunschvicg* 具有歷史性與批判性的著作。我們這裏無法講得更好。

我們的工作比較謙遜，範圍也較小。我們將不管數學與外在實體(*reality*)，或內在思想的大範疇之間的關聯。我們只想留在數學的領域裏，就我們剛才所提的幾個問題尋求解答。我們將從分析數學本身的方法開始着手。

2. 邏輯底形式主義與公設化方法
(Logical formalism and Axiomatic method)

到了本世紀初，正當以上所提的幾種體系都已頻臨破產之際，似乎不再有人想把數學特徵化，而成爲一門具有明確指向與擁有獨特方法的科學了。一種新的趨勢代之而起，就是把數學視爲"一些 *disciplines* 的組合"，每支皆有"獨特的而且可以精確敍述的觀念"；各支之間"脈胳相通"並且允許方法互相借用。然而，由於數學內部的變革（姑不論其外觀變得怎樣），今天我們已可相信，各部門的距離正日漸縮短而趨於統合。由於創造了一些核心的東西，這門科學已比從前更富有一貫性了。這項變革的要點，就是把存在於各個理論間的關係，作有系統的研究，從而走向所謂的"**公設化方法**"。

對於這種方法，經常也有人（多半是公設法的反對者）把它叫做"形式主義"或"形式化方法"；然而，這種稱呼是極爲不妥的。因爲形式只是公設化方法最微不足道的一項外觀，用"形式"來稱呼，實犯了以偏蓋全的毛病，所以奉勸大家要多加小心，以免混淆。在表面上，數學所給人的印象，正如笛卡兒所說，是一連串的推理；每一數學理論即是一系列的命題，應用邏輯推理從最先的命題開始，推出下一個命題來。這種推理在基本上，仍是亞里斯多德當年所整理的那套"形式邏輯"；數學家爲了數學上的特殊目的及便利起見，所以一直慣用這套邏輯。因此，如果把演繹推理看作數學統一的原則，那實在是太無聊了。而且，實際上的情形也並非如是簡單，這種講法似乎未考慮到數學理論中明顯的複雜性。若真如此，則物理學與生物學豈不可以統一成一門學問了嗎？因爲它們都同樣使用實驗方法。其實，一連串地使用三段論法的推理方式，只不過是一種推理機械罷了；此種機械適用於此命題，亦可適用於彼命題。因此，我們不能依靠推理來特徵化這些前題。數學家只是用這種機械來表達他們的思想及作爲和別人溝通的工具而已

（註一）。換句話說，數學家只是以它們作爲一種語言罷了。因而，定下這種語言的規則，建立其字彙，澄淸其語法，都是很有用的。誠然，這是公設法的外貌之一；而只有這項外貌才宜於稱作邏輯底形式主義（或 *logistics*，有時也這麼叫）。但要注意，這只是外貌之一而已，而且也是公設法最沒意思的一面。

公設法所揭櫫之目標，爲求得對於數學的深邃了解；而這正是邏輯底形式主義本身所辦不到的。正如實驗方法始於一個先驗的信念，卽相信自然律是恒常不變的；公設法亦自有其基本之信念，就是：**數學不僅不是一種根據三段論法盲目堆砌起來的東西，同時也不是一堆純粹要靠運氣與智巧組合而成的事物**。當兩個或多個理論之間有某種相似性存在時，公設法幫助我們發現這種類似性的深邃理由；並且從各種理論的細節背後，把共通的概念找到；然後提出這些概念並發揚之。下節就是要解釋這個觀點。

3. 結構的觀念(The notion of structures)

在這節裏，我們將看到，結構是如何形成的。我們的方法一點也不稀奇，就是先分析再綜合。這也是公設化方法與實驗方法最爲相近之處，後者得力於笛卡兒思想，主張"分析困難，直到較容易克服爲止"*devided the difficulties in order to overcome them better*。我們打算從一個理論的證明過程中，抽出論證的主要因素；然後分別式化（*formulize*）成抽象形式，再單由這些發展出結論；最後，再回到所考慮的理論，把原先分出的重新組合起來，並查考這些不同的組件彼此如何影響。

爲了讓讀者明瞭這個過程，現在我們要舉出一個相當古老的（也是相當簡單的）公設化理論，亦卽"抽象群理論"。先觀察以下這些運算的例子：

1. 實數的加法。（照通常的方法相加）
2. 對所有"*modulo a prime number p*"的整數而言（包括 $1, 2, \cdots, p-1$），定義二數的"乘積"爲其通常乘積被 p 除之餘數。
3. 考慮三度歐氏空間中所有的位移，定義二位移的合成如下：設 S、T 表二位移，則定義 S、T 之合成爲先經 T，再經 S 之位移。

以上這三個理論，都是把所考慮的任何兩個元素 x，y 經由某種固定的方法對應到唯一的第三個元素，我們將把這種唯一的元素一律表示成 $x\tau y$（在 1. 中，這表示兩個實數 x 和 y 之和；在 2. 中，這表示兩個 $\leq p$ 的整數 x 與 y 對 *modulo p* 之乘積；在 3. 中，這表示兩個位移之合成）。如果我們分別考慮這些"運算"在各個理論中的性質，將會明顯地發現一種平行的對比；我們把這些性質在各個理論中邏輯相屬的關係作一番分析，最後將可找到一些彼此獨立的性質（亦卽，其中沒有一個性質可以由其它諸性質所導出）。譬如，我們可以取以下這三個性質（註二）：

(A) 對所有的元素 x，y，z 而言，下式成立：

$$x\tau(y\tau z)=(x\tau y)\tau z$$

亦卽運算滿足結合律。

(B) 存在一元素 e，使對所有的元素 x，下式成立：

$$e\tau x=x\tau e$$

（對實數而言，此種元素卽爲零；對"*modulo p*"乘法而言，此種元素卽爲 1；對位移合成而言，此種元素卽爲本位位移，卽在原處不動）。

(C) 對每一元素 x，存有一元素 x^{-1}，使得

$$x\tau x^{-1}=x^{-1}\tau x=e$$

（對實數而言，x^{-1} 卽 $-x$；對位移的合成而言，x^{-1} 卽指 x 的反位移；對"*modulo p*"乘法而言，x^{-1} 可由一簡單的算術論證得知其爲存在（註三））。

因而，在這三個理論中，所有可用這種公用符號表示的性質，皆爲前述三條性質之推論。試明述之。譬如，我們可在三個理論中，分別用其特殊理由證得

$$x\tau y=x\tau z \Longrightarrow y=z$$

但是，我們也可用一種適用所有情況的方法來證明：

由 $x\tau y=x\tau z$，可得

$$x^{-1}\tau(x\tau y)=x^{-1}\tau(x\tau z)$$（因爲 x^{-1} 存在）；

由性質(A)，

$$(x^{1}\tau x)\tau y=(x^{1}\tau x)\tau z\ ;$$

由性質(C)，

$$e\tau y=e\tau z\ ;$$

由性質(B)，

$y=z$。　證明完成。

在上列論證中，元素 x、y、z 之性質並未在考慮之列。我們並不關心這些元素是不是實數、位移、或者 $\leq p$ 之整數；唯一重要的是，$x\tau y$ 運算滿足性質(A)、(B)、(C)。卽使是爲了避免令人討厭的重複，我們一定很想得出(A)(B)(C)的所有邏輯推論，以竟其功於一役。爲了語言上的方便，我們將把以上考慮的集合一律用一種相同的術語來稱呼。我們說，凡是一個集合上定義有滿足(A)(B)(C)的運算，則稱此集合具備有群的結構（或乾脆就叫做群）；性質(A)(B)(C)卽稱爲群結構的公理（註四），而由這些性質的推論發展起來的理論卽是群的公設化理論。

從以上的討論推廣來看，將可了解數學結構是什麼東西了。不管結構一詞所指的觀念有何不同，都是認為，結構是一種可以應用到集合上的東西，而集合所包含的元素性質則尚未指明。要定義一個結構，首先就要給定元素與元素間的關係（註五）（在群的結構裏，$z = x \tau y$ 就是表示任何三個元素間的關係）；然後再把這些關係所滿足的條件，明確地敍述下來，以作為結構之公設（註六）。有了結構之後，剩下的工作就是從這些公設根據邏輯而行推理。在推理時，一切有關元素性質的其它假設，均摒除於考慮之外。

4. 幾種大的結構類型 (The great types of structures)

我們已經知道，公設是結構的起點；這一節，我們將介紹幾種結構的類型，這些不同結構的公設，各有很不相同的屬性。基於這種差異，有些結構便叫做代數結構；有些則叫做次序結構；有的則以拓璞結構稱之。群論的公設，可以說就是一種"結合法則"（*law of composition*）。所謂結合法則，就是一個存在於三個元素間的關係，這種關係使第三個元素被前兩個元素唯一決定。在結合法則下所形成的結構，即稱為代數結構。（例如：體結構就是由兩個滿足一些公設的結合法則所定義，實數的加法與乘法就是一個例子。）

次序關係則提供了另外一種重要的結構類型；所謂次序關係就是我們通常所講的"x 至多等於 y"，以符號表示，就是"$x \mathbf{R} y$"。這裏，我們並沒有假設，x 與 y 二元素有一個完全被另一個所決定；雖然這也是一種存在於二元素間的關係。這種關係受制於下列這幾條公設：

(A) $x \mathbf{R} x$，對所有 x 均成立；

(B) 若 $x \mathbf{R} y$ 且 $y \mathbf{R} x$，則 $x = y$；

(C) 若 $x \mathbf{R} y$ 且 $y \mathbf{R} z$，則 $x \mathbf{R} z$。

整數（或實數）集合即為擁有此種次序結構之明例，其中是以 $\leq$ 代替 $\mathbf{R}$。必須注意，上面這些公設並未包含這樣的性質，即：對任一對元素 x、y，$x \mathbf{R} y$ 或 $y \mathbf{R} x$ 至少必有一個成立。換句話說，我們的公設並不排除二元素不可比較的情形。若照通常的次序觀念，可能會覺得這是很不合理的；但我們很容易就可找到一些重要的次序結構，說明的確是有這種現象。比如我們考慮一個集合的所有部分集合，定義關係 $X \mathbf{R} Y$ 為"X 包含於 Y"；或者考慮所有的正整數，而定義 $x \mathbf{R} y$ 為"x 整除 y"；或者考慮定義於閉區間 $a \leq x \leq b$ 上的所有實值函數，而定義 $f(x) \mathbf{R} g(x)$ 為"對所有的 x，$f(x) \leq g(x)$ 成立"。這些例子並且顯示，次序結構出現在很多種領域裏面，因而我們才有興趣要研究它。

最後，我們要說一下第三種大的類型，亦即拓璞結構（或簡稱拓璞）。拓璞就是我們的直覺（來自我們的空間觀念）裏，關於鄰近，極限及連續等觀念的抽象表示。這個結構的公設，比前面兩種結構具有更深的抽象程度；寫作本文的旨趣也就是要讓有興趣的讀者去參考這方面的專著。比如，可以看看參考書欄中的第二本。

5. 數學技巧之標準化 (The standarization of mathematical technique)

讀者看了以上講的這些，對於公設法大概已形成一個正確的觀念了。公設法最大的特色，就是在於使思想獲得經濟的功效。因為公設法作出了一些結構。結構也就是工具的意思。帶着這些工具，我們就不必到處另起爐灶，節省了不少麻煩。當一個數學家在他所研究的一組東西裏面，發現其間的關係正好滿足某一類型的公設時，那麼那種結構裏推演的一切成果，他便都能享用，就像獲得了一座兵工廠一樣。不過，數學家必須先親自把這些工具錘鍊一番，然後才着手去研究他自已的問題；工具的力量決定於他個人的能力，他要能在必要的時候，添加一些限制性的假設在他的工具上，以應付所研究問題的特殊性。我們可以說，公設化方法只不過是為了數學而設置的"*Taylor system*"。

這樣看來，數學家豈不成了在生產線上操作的工人啦？不然。在數學家的研究工作中，有一種特殊的直覺是不能太被忽略的（註七）；這種直覺（註八）並不是一般所認為的感官直覺，而是在一切推理之前，對於數學存有所應有的正常行為的直接預測；由於長久的體認，這種數學存有對一個數學家而言，已是相當熟悉而和實際世界的存有沒有什麼兩樣。我們知道，結構是由幾個理論經過公理化方法分析而來的。每一種結構皆有其特殊之語言，並帶有一些來自原來那些理論的特殊直覺指引。如果數學家在他的對象裏面突然發現了此種結構，他的直覺思考路線就會一下子轉到一個從來沒有想過的方向，而使他徜徉於一個風光明媚的數學園地裏。舉個古老的例子來說，十九世紀初，數學上的一大進步，就是虛數的幾何表示。

這件事從我們現在的觀點來看，等於是考慮了虛數所有可能的應用之後，在虛數中尋找一個與歐氏平面相同的拓璞結構。正由於這項發現，再經由高斯、亞培爾、歌西及黎曼等人的耕耘，使得分析在不到一個世紀的時間裏，就已異彩大放。像這樣的例子，在過去五十年中亦屢見不鮮。譬如*Hilbert spaces*（或更廣一點說*functional spaces*）就是在由函數造成的集合上建立拓璞結構；而*Hensel p-adic numbers* 更是令人吃驚，拓璞侵入了一向被認爲是分散的、不連續的領域——整數集合；又如*Haar measure*，把積分觀念的應用範圍大大地擴張，而使連續群的深入分析成爲可能。——所有這些都象徵着數學上決定性的進步。把理論中隱藏的結構外顯出來，使其轉入一個嶄新的方向，這是屬於天才的成就；但先驗原理似乎就辦不到。

總而言之，現在的數學，已較過去不注重各個孤立公式的機械遊戲；而直覺在發現的根源上，重要性却較過去有加。但從此以後，我們就擁有由幾個大型態的結構所提供的有力工具（*powerful tool*）。而過去完全處於混亂狀態下的一大片地區，現在已可由公理化方法出來把它們整頓起來了。

6. 概　觀（A general survey）

在這一節裏面，我們打算藉着公設概念的引導，來對整個數學作一番描述。我們將不再承認舊有的秩序，因爲這種舊秩序，就像是最初的動物綱目系統一樣，只限於把外表上看來很相似的理論並列在一起。我們不想把代數、分析、數論、幾何這些科目分得太過清楚；實際上，質數理論與代數曲線理論原本就是鄰居，而歐氏幾何也是緊接着積分方程式論的。我們打算按照由簡而繁，由廣而殊的原則來作一番整理，從而看出層次疊比的結構。

在這世界的中心部分，將會發現一些大的結構類型，其中幾個重要的已於前節中提到。我們姑且把這些結構叫做母結構（*mother structure*），這些類型彼此都很不相同。有一件事必須認清，就是這些母結構的公設都是最少的，它們具有最大的普遍性；然後我們再把新的公設添加進去，於是便形成了一些新的類型。這些新的類型將比原來母結構的性質更豐富。譬如，以群論爲例，由上面所說的三個公理推得的一切結論，對所有的群均爲正確；若限制群爲有限群，則得有限群論；若運算可交換，則爲亞培爾群；若此二者兼備，則所得者稱爲有限的亞培爾群論。又以有序集的理論爲例，開始時是一般的次序觀念，然後我們就注意那些全序集（*Totally ordered sets*）（任二元素皆可比較），在全序集中，我們的範圍又可縮小到完善序集（*well-ordered sets*），像整數集與實數集都是全序集，而正整數集則爲完善序集。在拓璞結構裏，也是如此由廣而殊，由簡而繁地加以分層。

此外，我們還可看到一些重疊的結構，這種結構同時包含有兩個或兩個以上的母結構。然而我們並非隨便地把兩個結構並列在一起，就算是一個新的結構，這樣根本得不出什麼新的結果。兩個以上的結構放在一起要產生意義，必須有一些公設作爲這些結構間的橋樑，這樣才是一種有機的組合。像拓璞代數就是如此產生的，拓璞代數是代數結構與拓璞結構在某些條件下結合起來的，所要的條件是：代數運算對其拓璞結構而言爲一種連續函數。此外，還有一種叫做代數拓璞的重疊結構，與拓璞代數相比，亦毫無遜色，代數拓璞是把由拓璞性質定義的一些點集合（*simplexes, cycles*,等等）拿來做爲運算的單元。次序結構與代數結構的聯合，亦產生非常豐富的結果。這裏有兩個方向可走，一個方向是走到*theory of divisibility and ideals*；另一方向是走到積分及分譜論（*spectral theory of operators*）上面去，後者另有拓璞結構加在裏面。

照這樣子繼續下去，我們可以開始把所得的理論叫做特殊理論了。因爲在一般性的理論裏，集合元素的性質還完全停留在未定狀態；但到了特殊的理論，集合的元素就開始顯出明朗的個性了。像單實變與複變函數之分析、微分幾何、代數幾何及數論這些古典的理論，原先是處在各自爲政的狀態之下，現在我們已把它們兼併（*merge*）起來。而且這些古典的理論本身，都已成了幾個廣義結構交會及相互作用之所在。

以上這番敍述，只能算是走馬看花地把當今數學裏的實際情形看了一個大概而已。爲了保持正確的透視起見，我們還必須作以下的說明：

一因爲實際上，數學裏的作爲並不像上面描述的如此簡單與有系統，實際上我們可能是倒行逆施，反而要借助特殊理論來建立一般理論。例如，從實數到拓璞；或從實數到積分。所以我們這番描述，可以說是計劃性的（*Schematic*）；

二因爲幾乎在所有理論裏，每種結構的角色都還未十分確定。（比如在數論裏），至今仍遺留了不少孤立的結果，還分不清到底是與那個已知的結構有關。所以我們的描述是太理想化了一點；

三實際上，公設化方法並不是固定的，它是變動不居的，我們上面的描述似乎嫌呆板了些。

我們無意讓讀者引起一種想法，認為我們所描述的就是當今這門學問的實際確定性狀況（*definitive state*）。結構的數目及其基本內含，隨時都會變動，並非一成不易的；基本結構的個數很可能還會繼續增加，以顯示新公設及公設與公設間聯結的豐碩性。從已知結構的進展情形來看，我們很可以相信，新結構的發現將導至重大的進展。數學的建築決非已經完工。若說一切原理的精髓都已完全抽盡了，那眞是一件令人難以置信的事。有了這樣的認識之後，我們才能對數學的內在生命及其外顯的一致性與多樣性了解得更加深刻。數學好比一座大城，它漫無目的地向四面八方發展，而其中心部分不斷地重新改建。每次改建都是依據一張構思明朗、景然有序的藍圖，把舊的巷弄區劃搗毀，然後在上面開闢出寬廣的林蔭大道來，四通八達，又直，又便利。

7. 歸　結 (Return to the past and conclusion)

以上所欲闡明之概念，並非一朝一夕形成的，而是經過了近乎半世紀的演進，才漸漸發展出這些概念。然而，這些觀念却一直受到哲學家，甚至數學研究者的嚴厲反對。先說來自後者的反對。這些數學家好久以來，只看到公設法邏輯析理的一面；除此之外，就再也不願看到任何東西。然而，不論怎樣，這些邏輯析理永遠也產生不了什麼碩實的理論。像這種非難的態度，純粹要歸因於一項歷史的偶然。因爲歷史上第一個公設化處理的對象是單價的理論（*Dedekind* 及 *Peano* 的算學；*Hilbert* 的幾何），這種理論完全由其自身完整的公設系統所決定，因此也只能應用於自身，不能應用在其它的理論上。（這與群論的情形正好相反）因此，很多人便指責公設法爲一種枯萎的方法。如果其它結構都像這樣的話，那麼這種指責豈不早已成爲定論啦？（註九）然而，在一些深遠的發展之後，公設法的大功用隨卽顯現出來。至於今天到處還有人對公設法表示厭惡，也許可以這樣解釋：人在面對某項實際問題的時候，都喜歡直接從事物的本身想起，而不願使用另一種抽象的思想方式，雖然這是同樣有效的方法。

再來看看來自哲學家的反對。哲學家有他們自已的領域，我們必須保持謹愼，不可輕易進入他們的範圍。經驗界與數學界的關聯是屬於哲學裏的一大問題。由於晚近物理學的發現，使我們都沒預料到，經驗界的現象與數學的結構之間竟有如此緊密的聯繫。但是這件事實的根本原因（如果這是有意義的話），我們完全不知；而且我們可能永遠也得不到解答。哲學家們也許可以從下面這件事獲得一些警惕：在近代物理學革命性的發展以前，有很多人費了很大的工夫，想從經驗的眞實（*truths*）（特別是對於空間的立卽直覺）來推得數學。然而，量子物理學却告訴我們，此種對於實體（*reality*）的巨觀直覺可以含蓋性質上完全不同的微觀現象，而與此微觀現象相關的數學，就從未被視爲與經驗科學有關。在另一方面，公設法亦顯示，這些曾被期望推得數學的"眞實"，不過也是某種普遍觀念的一個特殊面而已，這些普遍觀念的意義並不限於這些範圍之內。所以，到頭來，我們所看到的關聯（我們曾被要求從這種關聯來欣賞和諧的內在必然性）不過是兩個 *disciplines* 的偶然接觸罷了。至於眞正的關聯，則藏在比先驗觀點所假想的還要深入的內層。

從公設化的觀點來看，數學好比是一座儲存抽象形式（卽數學結構）的倉庫。至於經驗界實體（*reality*）的某些外觀，竟和這些形式相符合，好像老早就配合好了一樣，這是我們所不能解釋的。當然，我們不能否認，大部分的形式原來都有一明確而直覺的內含；然而，正因爲故意捨棄這些內含，才有可能把它們所蘊藏的能力都顯現出來，也因爲如此，才有可能把它們儲存下來，以備作新的解釋及發展它們的潛力之用。

我們只有把"形式"一詞的意義作這樣的解釋，才能把公設化方法叫做"形式主義"。公設化者，所以統一數學之方法也。這種統一性，並非是披在形式邏輯所建立的骨架上的一層甲冑；而是一個有機體在高度發展狀態之下，其內部流動的營養液，是一種輕柔而碩實的硏究工具。高斯以來的所有偉大數學思想家，都是致力於這種工具的建立。照 *Lejeune-Dirichlet* 的話來說，這些人總是辛勤地"把計算化爲概念"。（完）

附註：

註一 若看一個證明只是逐步驗證其推理之正確與否，而不嘗試去追究爲何推理過程是如此這般，以淸晰地洞察其概念，沒有一個數學家會認爲這是"了解"一個證明。

註二 這種選擇並沒有絕對性；還有幾種公設系統與我們現在講的這個是"同等的"，而每一系統的公設皆爲其餘系統公設的邏輯推論。

註三 我們知道，把 x，x^2，…，x^n，…這些數

用 p 來除，所得的餘數不會均相異；因而，我們很容易就可證明，存在有一 m，使得 x^m 被 p 除餘 1；若設 x' 爲 x^{m-1} 被 p 除所得之餘數，則可推得 x 與 x' 的"*modulo p* "乘積等於 1。

註四從此以後，我們將不再認爲公理一詞的解釋與其傳統意義——"顯然之事實"間有任何相干。

註五實際上，此種結構之定義，對於數學的需要而言，還不够普遍；有的情形下，我們不僅要考慮一個集合中元素與元素間之關係，還要考慮部分集合間之關係，甚且還要考慮更高層集合的元素間之關係。關於這點，請看〔1〕。

註六嚴格說來，在群的情形下，我們除了(A)(B)(C)這三項性質外，還要把下面這個事實包括在公理裏面，即：當 x，y 定下來時，則關係 $z=x\tau y$ 決定一個唯一的 z。不過，我們在寫下這個關係時，通常都已默認這項性質了。

註七這裏原文是作"不可過分重視"，但與本節結語相牴，故經譯者揣其原意擅加改動。若有悖逆之處，敬請指教。

註八正如所有的直覺，此種直覺亦常發生錯誤。

註九特別是在公理法一開始的時候，產生了不少巨大的結構，一點應用也沒有；唯一的好處，就是它們可以顯現每一個公理的意義；譬如，可以觀察省去一個公設或改動一個公設將會有什麼影響。就因爲如此，所以有一種趨勢便認爲，這是公設化方法唯一可以期望的結果。

References

1. *N. Bourbaki , Elements of mathematics , book* Ⅰ.

2. ——., *Elements of mathematics , book* Ⅲ. *introduction and chapter* Ⅰ.

這兩本書皆有翻版，此外原文還列了 *H. Cartan , Dieudonne* 及 *L. Brunschvicg* 等人的法文著作，譯者不懂法文，不知其書名爲何，亦不知本地可否找到，故從略之。

> A mathematical problem should be difficult in order to entice us, yet not completely inaccessible, lest it mock at our efforts. It should be to us a guide post on the mazy paths to hidden truths, and ultimately a reminder of our pleasure in the successful solution.
>
> Hilbert, D.

> Geometrical reasoning, and arithmetical proess, have each its own office: to mix the two in elementary instruction, is injurious to the proper acquisition of both.
>
> De Morgan

二十世紀數學一瞥

數四甲 呂子銘 譯

數學的黃金時代不是歐幾里得的，而是我們。

一、數學的本性

十九世紀一項確定的貢獻是指出數學不是自然科學，而是人類心智的一項產物。羅素在 *1901* 年的國際月刊(*International Monthly*)上寫道：

"以蒸汽機及進化論之發明爲傲的十九世紀，將又有一項可引以爲榮的合法頭銜，那就是純數學的發現。"

赫胥黎T.H.*Huxley 1825 ～ 1895*，達爾文的猛犬，在爲進化論作辯護時曾提到：數學之爲物也，不知觀察、實驗、歸納、因果爲何事。在另一場合裏，當他批評 *Kelvin* (*W.T 1824～1907*英國物理學家)之低估地球年齡時，又作了下述有名的評論：

數學可比作精緻的手工磨坊，它可磨給你任何程度精細的東西，但是你得到的要看你放進去的而定，世界上最好的磨坊不會從豌豆莢中磨出麵粉，成頁的算式也不會從不精確的數據中得出精確的結果。

由此可看出在上一世紀轉換之時，即使非數學家也都逐漸認出了數學只是一種假設性的思考，於其中我們可自任意前題推出有效的結論。至於在外觀世界中，這些假設是否爲眞皆屬不重要。事實上，連假設中所用的字詞全是未定名詞。這就使得羅素在 *1901* 年對數學作了一個詼諧性的描述：數學是一種不知在說什麼，又不知道說得是否爲對的東西。兩年後在他的數學原理開頭裏，他作了一個嚴格的定義：

純數學是所有形如 p 蘊涵 q 的命題族，此處 p 和 q 含有相同的一個或多個變元，而且 p 和 q 除邏輯常數外，不含其他常數。

這個定義强調了數學的本性是邏輯結構，而寧非外觀世界所指含的定言敍述。簡單地說，羅素把數學和邏輯看成是相同的東西。但是這一見解並沒有取得數學界人士的一致讚同。*Sylvester* 曾尖銳地批評赫胥黎的論說，而做了如下的看法：

"數學係源自人類心靈的固有能力與活力，以及對那有如外在物理世界多變且需要密切注意力去分辨的內在思想世界，所做的一連串更新與反省。"

換句話說，*Sylvester*傾向於目前所謂的直覺主義者的看法，因他把純數學看成是展開人類心智的規則，有如物理學展示感官世界的規則一般。在這方面，他對於 *Boole*，*Dedekind*，及 *Peano*等人一貫形式化的趨勢更不加苟同。*Kronecker*，儘管原是分析算術化的一員，也可看成是*Sylvester* 一派的人，因他認爲整數具有神賜的意義。更澈底的直覺主義者，是一位可看做銜接十九二十兩個世紀的大數學家——亨利彭加萊*Henri Poincaré 1854～1921*，也是一個*Sylvester*在晚年贊不絕口的多產青年。

二、Poincar'e的函數理論

當高斯在 *1855* 年去世後，一般認爲再也不會有一位數學的全才了——對每一分支全都在行，不管純數學或應用數學。假使有那一位證明這句話是錯誤的，那就非 *Poincaré* 莫屬了。他的研究範圍幾乎遍及

了數學的每一個角落。然而在很多方面，Poincaré和高斯是有所不同的。高斯是一位計算方面的天才，終其一生沒有計算不出的東西；而Poincaré 並不像高斯一樣，在小時卽表現出學數學的傾向，甚至連簡單的算術計算都會爲難了他。他的情況說明了要做一個偉大的數學家一個人並不一定要精於數算，除數算外，其他還有很多表現優異數學能力的地方。另一點，高斯是一個嚴格主義者，沒有成熟或者自覺不滿意的東西決不輕易發表，因此雖是少量的作品，却都字字珠璣，足以使他動耀史册。Poincaré 則寫得快速而廣泛，每年出版的東西都較其他任何數學家爲多。而且，在後來的生涯裏，他還寫了一些帶有哲學敏銳氣氛的作品，這些都是高斯所不曾嘗試的。至於他們的相同之點，那就不勝枚舉了。他們都充滿了許多觀念，而且很雜草記於紙上，他們都有由特殊情況尋求普遍定理的愛好，對很多支科學都有所貢獻。

Poincaré 出生於Nancy，一個停泊著許多二十世紀數學頂尖高手的城市。他的家族各有各傑出的成就；他的堂兄弟Raymond在第一次世界大戰期間任法國總統。Henri Poinré 生而笨手笨脚的，他的身體官能尤其有傳奇的風味，視力不佳，經常心不心焉。但如同Euler及高斯一樣，他對所有的數學思想都有特出的心智能力和吸收量。1875 年他自巴黎工藝學校畢業後，進入了礦山學校，1879 年得到礦冶工程學位。在後來的日子裏也就一直很喜愛礦冶部門。1879年他同時獲得巴黎大學的理學博士學位，在該處他擁有許多數學及科學的教授職位，一直到他逝世爲止。

Poincaré 的博士論文是有關微分方程的問題——不是求解的方法，而是研究解是否存在的定理。這個論題引出了他對數學最著名的貢獻：自同構函數 Automorphic function 的性質研究。實際上，他是這些函數理論的眞正建立者。一個含有複數變數的自同構函數是一個可解析於（極點除外）一個區域D（Connect open set ）的函數，經一線性分式變換$Z'=(az+b)/(cz+d)$的可數無窮群變換後不變者。

這些函數是三角函數（取 $a=d=1$ $c=0$ $b=2k\pi$），以及橢圓函數的推廣。Hermite曾研究在限制a,b,c,d皆爲整數且$ad-bc=1$之情況下的變換情形，結果發現了在這種變換下不變的橢圓模函數族。然而 Poníncaré 的推廣却揭開了一個較廣的函數範圍，所謂Zeta-Fuchsian函數是也，Poincaré證明了它們可以用來解代數係數的二級線性微分方程。

三、應用數學與拓璞學

Poincaré 並未在任一門領域裏作太久的耽留，近人謂曰：「他是一個征服者，而不是一個殖民者。」在Sorbonne任教時，他的課程遍及毛細作用，彈性學、熱力學、光學、電學、電報、宇宙學及其他等等；其提出的東西是如此之多，以致一提出之後立被付印。單在天文學方面他就出版了半打之多的册數——Les m'ethodes nouvelles de la m'ecanique c'eleste（3册1892～1899）以及Le,cons de mecanique c'eleste（3册1905～1910）——此方面的成就直可追及拉卜拉斯Laplace。特別重要的是他從事三體問題及其推廣所用的方法。三體問題是三個星體間引力及各種作用力的關係，有極複雜的微分方程軌道。1855年的宇宙研究報告亦極有意義。他指出梨形對均勻流體是一可達相對平衡的形狀，而今日梨形地球的問題仍爲有興趣的測地學家所繼續研究者。喬治達爾文，達爾文之子，於1909年寫道：Poincaré的天體力學將是半世紀研究天文的一大礦源。

Poincaré又如拉卜拉斯一樣，對機率也有很多的東西發表。由某些觀點來看，他的著作只是拉卜拉斯及十九世紀分析學家們的自然延續罷了，但是他那飄渺虛靈的心思早已神往於那代表二十世紀數學特徵的拓璞學了。拓璞學並非是任何一個人發明的，一些拓璞問題可在Euler, Möbius, 及Cantor 的作品中找到，甚而拓璞Topology 這個字在1847年就由J.B. Listing（1808～1882）的一本書所首先使用Vorstudien Zur Topology（拓璞研讀入門）。但此門學問的開始日期用1895年該屬適當無比，這年Poincaré出版了他的分析形勢學一書，此書首次提供了有系統的拓璞體系發展。

拓璞學現已是一支廣泛且基本的數學分支，它可乾淨俐落地區分爲兩個相異部份——組合拓璞與點集拓璞。Poincaré對後者較不熱衷，在1908年的羅馬國際數學會議上他指出Cantor 的集合論爲一病態，而點集拓璞却脫胎於它，故後起者應奮力解脫之。分析形勢學，後慣稱組合拓璞，乃空間圖形經過連續及一對一變換後仍保持不變的本性研究。它經常被叫做橡皮塊幾何，好比說，將一氣球扭轉而沒有穿孔或破裂，卽爲一拓璞變換。一個圓是同構於橢圓的；空間的維數也是拓璞不變，而簡單多面形的笛——奧數（Descartes-Euler number）$N_0-N_1+N_2$ 亦然。Poincaré對拓璞學的基本貢獻中一項就是對笛——奧數的推廣，此時多面形已是高維度，他稱那些數做Be-

tti number，爲紀念*Enrico Betti* 而名之，氏任敎於比薩大學，早曾注意到這些拓璞不變的性質。然而拓璞處理的問題多半是"質"的而寧非"量"的，因此遂一改十九世紀分析流行的類型。*Poincaré*在分析形勢學上的注意力似乎可遷移於微分方程的質的積分上，他像黎曼（*Riemann*）一樣，擅於掌握問題的拓璞本性，就如尋找函數的某些性質而不去思考它們在傳統意義所代表的又如何，概因這些人都直覺靈敏而又判斷健全，假使*Poincaré*在拓璞上的興趣繼續著，這一支數學的許多蘊綮勢必將皆爲他所預先揭開，這是在二十世紀震人心魄的且大放異采的一門學問，但是他那毫不棲止的心靈總被那些新舊世紀轉接之時數學上及物理上許多新的發現所充滿，從赫芝波及X射線到量子論及相對論等。

舉個彭加萊的多才多藝之一端來說吧，有了他我們擁有一個建於歐幾里得架構上的羅巴尺夫斯基幾何模型。假設一個世界是被半徑爲R的大球所包，距離球心r處的絕對溫度爲R^2-r^2，更假設在這透明介質中的折射率反比於R^2-r^2，再假設物件的大小正比於所在處的絕對溫度，居住在這樣的一個世界裏，它的範圍將是無限，一般人心目中的直線"光線"，不再是直角坐標中的那種直法了，而將變成正交於極限球的圓。平面也將變爲球面而正交於極限球面上，同時兩個這樣的非歐"平面"將交於一條非歐"直線"上歐氏公設除平行公設外依然皆成立。

四、Hilbert的二十三個問題

Poincaré 逝世於他春秋鼎盛的五十八歲，其著作超過這個世紀的任何一位數學家。*Klein*把他的多才多藝媲美*Cauchy*，其他很多人都認爲他在當代的數學家中居於領導的地位，當時領銜的數學家。他的棋逢對手，大衛希爾伯（*David Hilbert*）（1862～1943）生於德國是一天縱英才，氣質稟賦皆異於常人，是另一位銜接十九世紀和二十世紀的承先啓後人物。*Poincaré* 屬於先期，*Hilbert* 稍後，他強調數學的結構更甚於前者。

Hilbert 同哲學家康德（*Immanuel Kant* 1724～1804）一樣，出生於東普魯士的哥尼斯堡（*Konigsberg*），但康德不曾遠遊而他却四海馳騁，特別是參加了那次足以象徵本世紀的國際數學會議後，更是光芒四射。正式的數學會議首屆於1893年在蘇黎士舉行，第二屆於1900年在法國巴黎舉行，而後差不多都按規矩每四年舉行一次，1900年在巴黎舉行的那一次裏，*Hilbert* 以一個光彩煥發的哥庭根大學教授出席參加，發表了一篇影響極大的演說，他以那快要結束的燦爛的十九世紀數學研究趨勢來預測將來進展的方向。

對此他提出了二十三個問題，深信它們可能而且應當凝聚二十世紀數學家們大部份的注意力。"假使我們對那立刻到來的未來數學知識，可能發展的方向有所意念於心中的話，他說，我們必須讓那些雜亂無章的疑問先從心裏掠去而專注於今日科學所生的問題並期其解答能於不久的未來出現。"

雖然他未贊同僅自完全精密的討論中即可護得算術的概念這種觀點，他還是認爲由*Cauchy Bolzano* 及*Cantor* 等人一連串發展的算術連續統（*Arithmetic continuum*）爲十九世紀最爲傑出的兩大數學成就之一。（另一個乃高斯，*Bolyai* 及 *Lobachevsky* 等人的非歐幾何）

他的二十三個問題的第一道就是涉及實數連續統的結構問題。這個問題由相關的兩部分組成：(1)是否有一超越數介於可數集與連續統之間（亦即一集之冪（基數）是否有介於自然數與實數之間者）；(2)實數連續統可否考慮成一良秩集，亦即是否所有的實數可排成某一種形態而使得每一部分集合有一首元素。這就很密切的牽涉到選擇公設了，選擇公設由德國數學家*Ernst Zermelo*（1871～1956）於1904年所作並予其名。*Zermelo* 公設謂：給予一兩兩分開的非空集合族，則必存在一集合由此諸非空集合的每一集合抽取唯一元素組成。舉個含此公設的例子吧，試考慮實數r，$0\leqq r\leqq 1$的集合；其中任意兩個數如果差爲一有理數，我們就稱此二數爲等態，顯然有很有這類實數所成的等態族，假使我們從這些族中每個抽一元組成一集合S，請問S是可數還是不可數？

選擇公設，不可或缺於分析中，於1940年爲*Kurt Gödel*證明了與集合論之其他公設相容，復於1963年爲*Paul Cohen* 證明與集合論之其他公設獨立，因而示明了此公設無法於此系統中被證出來有了它不覺其多，因爲其他公設導不出它；也不覺其礙，因爲它導出的東西不與其他的衝突。這似乎宣告*Hilbert* 的第一個問題已不可能有斬釘截鐵的答案。

五、Godel的定理

Hilbert 的第二個問題，因十九世紀愼思明辨的風氣而引發，它問：算術的幾個公設是否相容呢？也就是基於它們而作有限次的邏輯推演永遠不會導致矛盾結果嗎？

十年之後羅素和懷海德（*Bettrand Russel and*

Alfred North Whitehead）那本心思玲瓏透剔的數學原理問世，試圖以一精密的公設組來發展算術的基本概念。此著作，承襲*Leibniz*，*Boole*，及*Frege*的傳統，而建於*Peano*的公設上，小心謹愼地執行一個藍圖要來證明說所有的純數學可自一小數目的基本邏輯原理導衍而出。看起來它就要辯稱早期羅素提出的觀點——數學是無法自邏輯區分出來的——無誤時，人們看出了他們所用的系統並非完全形式化的，於是雖有邏輯學家們的雷鳴，數學家們却只有寥落的反響。是以，"數學原理"依然只對*Hilbert* 的第二個問題留下問號而已。

彈精竭慮的百思其解，振憾人心的結果終於*1931* 年出自年青的數學家*Kurt Gödel*手上，他曾移民至美國而成爲普林斯頓高等研究中心的一員。*Gödel*證明出在嚴格的邏輯系統中，像羅素及懷海德發展於算術中的一樣，依然會形成那些無以判定眞僞或者無以證明其眞僞的命題。也就是說，在該系統中可以找到某些輪廓分明的陳述既無法證明其爲眞亦無法反證其爲僞。因而吾人無法用通常的方法來肯定說算術的那些公設將不會導至矛盾。換言之，*Gödel* 的定理，似乎在數理邏輯裏要做最決定性的結論——*Hilbert*的第二個問題答案是否定的。*Gödel* 的不確定命題之發現眞要如古希臘的*Hippasus*（約西元前四百年）之發現不可公約量一樣在數學界攪起一趟混水了，好像注定說數學是先懵懵懂懂用上一番再來檢查其是否確實。又好像注定數學有如科學的理想物——好好設計一些公設以便使所有的自然現象都可從之演出。不管怎樣，很多數學家和科學家們根本不去計較這些，而依然在向前濶步急駛，繼續把一個定理堆在另一個定理上，很顯然地，今日的學者對*1831* 年*Babbage*所作的斷言「數學著作的黃金時代無疑已過」都聽若罔聞。

伴隨*Gödel* 定理來的問題，在算術之外章被研究而成一家之言，它是以一種新的數理邏輯觀點來進行的，所謂後設數學（*metamathematics*，元數學）是也，其所論者並非符號主義亦非算術運算規則，而是這些符號與規則的解釋。假設算術無法自拔於可能不相容的沼地中，也許立於沼澤外的後設數學來日會，以某些方式——如超限歸納等，來救算術一把。雖然總有一些數學家希望對每一數學命題判知它是眞是僞或者不能確定而在那兒愚公移山。但不管情況如何，*Hilbert* 第二道問題的否定與失望，只有更刺激了數學的生機，而並非威脅。

六、超越數與Zeta函數

Hilbert 的以下四個問題也許較前面兩個技巧且玄奥，不擬敍述，第七及八兩問問題則涉及較熟習的觀念簡述如下：當α爲一代數數（但非0或1），β爲一無理代數數，則α^{β} 的這個數是否爲超越數。用幾何形態來說，*Hilbert* 在問：當一等腰三角形頂角度量與底角度量之比爲一無理代數數時，底邊對腰的比是否爲一超越數？

此問題於*1934*年被*Aleksander Osipovich Gel-fond*（*1906*～ ）證明爲眞，現今稱爲*Gelfond*定理，謂若α爲非1或0的代數數，β爲無理代數數則α^{β}爲超越數。然而，才送春去又盼春來，數學家又想知道α及β皆爲超越數時，α^{β} 是否爲一超越數。好比說，e^{e}，π^{π}，π^{e}或者*Euler*常數r是否爲超越數呢？（註：*Euler's Constant*，定爲$r = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} - \ln n \right) = 0.5772\cdots\cdots$）不過，我們已知$e^{\pi}$爲一超越數，因$e^{\pi}=1/e^{-\pi}=1/i^{2i}$，而$i^{2i}$由*Gelfond*定理知爲一超越數。

Hilbert 的第八個問題是將熟習於十九世紀的ζ函數重新探討，ζ函數是如此定義的：

$$\zeta(S)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}$$

它絕對收斂於半平面$x>1$.上（$S=x+iy$）且其收斂對每一半平面$x \geqq x_0 > 1$ 皆爲均勻。（*Uniform*）經適當演算後（見複變*ROLF NEVANLINNA & VEIKKO PAATERO* 著）可化成：

$$\zeta(S)=2(2\pi)^{s-1}\sin\frac{\pi S}{2}\Gamma(1-S)\zeta(1-S)$$

即所謂黎曼函數方程（*Riemann's functional equation*）是也。若S位於半平面$x<0$內，上面最後一式的$\zeta(1-S)$與$\Gamma(1-S)$兩個函數皆爲正規且不爲零，（*regular and non-zero*）$(2\pi)^{s-1}$亦然。因而當$x<0$時，$\zeta(S)$與函數$\sin \pi s/2$ 有相同的零位。但我們知道$\sin \pi s/2$ 消失於$S=-2$，-4，-6，……且這些零位皆是單純根，因而在$x>1$的半平面中我們知道$\zeta(S)\neq 0$，是故在半平面$\sigma>1$及$\sigma<0$中，$\zeta(S)$的零位只是$S=-2,-4,-6,\cdots\cdots$其中每個都是單純根。

如果說$\zeta(S)$有異於這些所謂的"平凡根*trivial zeros*$-2,-4,\cdots\cdots$它們應該出現在$0\leqq x\leqq 1$這條帶子中了。黎曼在*1859*年斷言ζ函數有無限多個零位在$0\leqq x\leqq 1$帶中。此斷言於*1859*年首次被*Hadamard*所證。

黎曼又如是說，"那些「不平凡」*nontrivial* 的

〝函數的根都落在 $x=\frac{1}{2}$ 這條線上〞黎曼感覺如果這句話一旦獲證，哥德巴赫 Goldbach 的臆測〝每個偶數皆爲兩個質數的和〞也將獲證。雖然離黎曼的大膽假設已有一百年，證明依然未有所聞，*1914* 年哈第 G. H. Hardy 證明在 $x=\frac{1}{2}$ 線上有無窮多個零位，*1935* 年 E.C. Titchmarsh 證明在 $0\leqq x\leqq 1$，$0<y<1468$ 間有 *1041* 個零位，且此 *1041* 個零位皆落在那條〝帶子〞$x=\frac{1}{2}$ 上。藉著電子計算機之助，尋得之零位超過萬以上，所有的零位依然維逃〝帶子〞，但來日會如何却沒人敢斷言。

我們不能繼續談論 Hilbert 提出的其他問題了，那是有關拓璞學，微分方程，變分學及其他種種領域的問題，只能簡單一句，那些問題泰半未決，當然的，數學的發展方向也並未全部如 *1900* 年所期待的一樣。還有一點要知道的是這前半世紀的情況至少有一樣不同於以前的數學歷史——那就是每一解決掉的問題必留下許多新的問題給後代。Hilbert 在提出他的問題時宣稱：「一支提供豐富的問題的科學，就是生氣蓬勃的科學」，在有如指數樣成長的數學前他以鼓舞的詞句來結束他的話，他指出在這日益擴張的園地裏，工具是愈敏銳而方法是愈單純，因此一個學者能够不理睬其寬度而依然精通它。

七、幾何學的基礎

Hilbert 遺留給數學的遠超過那二十三個問題。在 *1899* 年，他的巴黎演說前一年，他出版了一本小而可資紀念的册子題名爲 *Grundlagen der Geometrie*（幾何學的基礎）。這本著作被譯成許多語言，掀起一陣强烈的影響。通過分析之算術化及 Peano 之公設，大部分的數學，除幾何外，都成就了嚴格的公設化基礎。幾何在十九世紀曾空前的放了一次異彩，然而儘管曾經努力過，還是遲至 Hilbert 的 Grundlagen 才給予它純形式化的特徵，而代數與分析則早已實施了。

歐幾里得的 Elements 確實有一演繹的結構，這是有徵可驗的，但是它却充滿著隱含的假設，無意義的定義，以及邏輯的不充分。Hilbert 知道並非所有數學上的名詞皆可定義，故先以三個未定物件來開始他的幾何討論，此即點、線、平面，及六個未定關係——於其上，於其內，介於其間，全等於，平行於，連續於。爲取代歐幾里得的五個公理（或共同概念）及五個公設，Hilbert 作成了他的幾何二十一假設，即出名的 Hilbert 公設。八個是〝落於〞關係（incidence）中含歐幾里得第一公設，四個秩序性質，五個全等性質，三個連續性質（歐幾里得未曾詳提），一個與歐幾里得平行公設相當的公設。跟隨在 Hilbert 的拓荒工作後，別的公設組又由其他人提出；而幾何純形式化與演繹化的特性，如其他幾支數學所作的，終於二十世紀初年徹底建立起來。

八、抽象空間

由於他的〝基礎〞一書，Hilbert 變成了公設學派的代表人物。公設化的思想深切影響近世數學的傾向以及數學的教育。基礎一書開頭即引用康德的一句箴語：所有人類的知識始於直覺，續爲概念，而止於理念，（*All Human Knowledge begins with intuitions, proceeds to concepts, and terminat-*

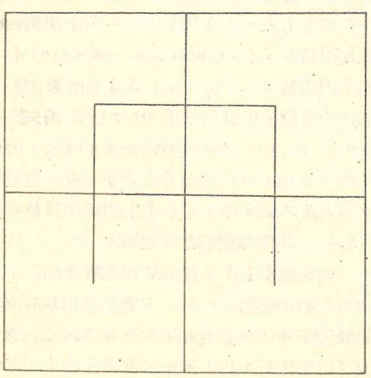


圖 1

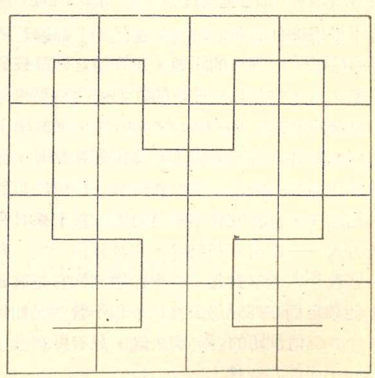


圖 2

es in ideas.）但*Hilbert* 的幾何發展却建立於一個與康德觀點完全異趣的基礎上，他强調幾何上的幾個未定名詞不應假設有超越公設所予之外的任意性質。老一代幾何觀點的直覺經驗標準應該棄絕，點、線、平面僅能視爲某些所予集合裏面的成分。同樣的，那些未定的關係亦僅能就公設所賦予的性質作抽象討論，實際說它們只是一種對應或一種寫像罷了。（*Correspondence or mapping*）

經由解析幾何，幾何的形式化討論與代數的公設化合成一氣，其結果造成了它的抽象程度較十九世紀的什麼東西有過之而無不及。

Peano 在 *1888* 年曾定出一佈於實數域的向量空間；這由 *Hamilton, Grassmann* 到 *Peano* 一脈相承的概念被廣泛擴充而稱爲 *Hilbert* 空間。此空間中的元素不是歐幾里得點，而是複數 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ 所成的無窮數列附以條件 $x_1^2 + x_2^2 \cdots\cdots$ 收斂。這是向量空間的一個特別，其更普遍的形式稍遲即被 *Stefan Banach*（*1892～1945*）一派人所引介。一個向量空間，如吾人耳熟能詳，乃一集合，其中元素稱爲向量，附以向量與標度之普通組成規則而成者。向量空間之不同類型乃據向量元素所具之限制而定，好比 *Hilbert* 空間爲一向量空間中每個元素皆有無限分量且此諸分量平方和收斂者。*Hilbert* 空間，僅管它的抽象程度超乎尋常，但它已在現代量子理論中發現到應用之處。*Banach* 空間又是一個更抽象的向量空間，它不必定要對複數域而來下定義，換個較技巧化的語言來說吧，一個 *Banach* 空間是一個有模向量空間，且由此模所定的度量是完備的。（一空間之完備係謂此空間中的每一 *Cauchy* 序列皆收斂於該空間內。）*Hilbert* 空間乃 *Banach* 空間的一個特例，它的模 $\|x\|$ 有平行四邊形的性質：

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$$

Stefan Banach 乃波蘭學派中最響亮的一位。波蘭學派起源自 *Lwow* 大學及華沙大學，*Banach* 任敎於 *Lwow* 大學。華沙方面的領導人物則是 *Waclaw Sierpinski*（*1882～*），是一位對數論、拓璞學、集合論皆有貢獻的人，更是 *1920* 年 *Fundamenta Mathmaticae* 雜誌的創辦者，該刊物爲世界最傑出的數學雜誌之一。*Sierpinski* 更是一位相當善於講課的敎師，他的許多學生在波蘭學派圈破納粹解散，*Sierpinski* 被驅逐時，紛紛流亡至美國，而且在美國數學界都有相當作爲。戰爭結束後，*Sierpinski* 回到殘破的華沙，*Fundameata Mathematicae* 雜誌又東山再起，但年青的 *Banach* 却於太平不久之日與世長辭，這也是戰爭帶來的一種悲哀吧！

Hilbert 對純數學的每一部門皆有深好。他曾作出一簡單的密佈空間曲線，有點類似 *Peano* 的曲線，描述如下：（見圖），從一單位正方形開始，劃成相等的四塊，再順次連接此四小方塊的中點。這四塊的每一塊又可分爲四塊，他們的中心連線如所示（中間圖），由左下之四塊，而左上，而右上，而右下。無限次反覆作下去，顯然的此曲線將會通過原正方形的每一點，同時這又是另一個處處連續而處處不可微分的曲線例子。（揷圖附於下）十九世紀數學家們曾注意到一些少數的"病態"例子出現於代數、分析、及幾何中，但到二十世紀尋找那些"怪物"及

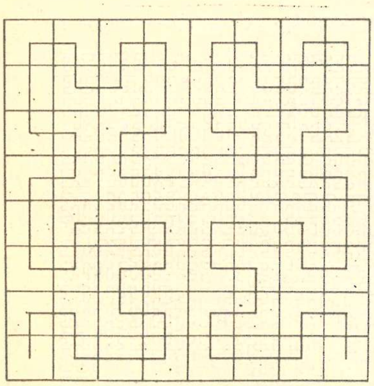


圖3

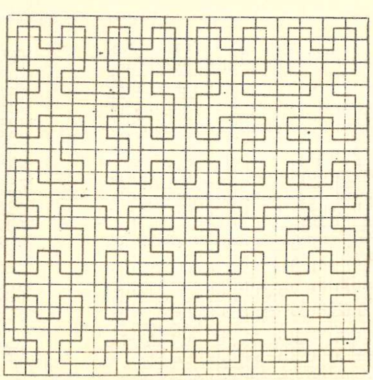


圖4

"矛盾"的風氣却大爲猖獗。簡直到了俯拾卽是的地步，再舉一個來說吧，斯德哥爾摩的 *Helge von Koch* (*1870～1924*) 作出了一條連續封閉曲線如下：

從一個等邊三角形，邊長爲 *1* 開始，將每邊三等分之，自每邊中段向外立出一正三角形，除去底邊，則得一折線構成的十二邊形，全長爲 *4* 。再三等分此十二邊的每一邊，由其中段向外立出一正三角形，則此時得一四十八邊形的圖案全長爲 *16/3*，無限次反覆之，得一皺縮曲線稱做 *Von Koch* 曲線或者雪花曲線。它不僅點點無切線，更有另一出人意表之外的事件——任抽出此曲線上兩點，它們之間的弧長是無限的！

九、數學的基礎

Hilbert ，如同 *Poincaré* ，是一個多才多藝的數學家，對數論，數理邏輯，微分方程，三體問題（ *three-body* ），及許多數理物理上的問題都有很大的貢獻。由於數學基礎一書（ *Grundlagen der Mathematik* 與 *P. Bernays* 合作）的關係，他終於也介入了本世紀最熱門的爭論中，說穿了就是 *Cantor* 與 *Kronecker* 之間衝突的延續。*Hilbert* 歎賞 *Cantor* 的集合理論，而 *Poincaré* 却銳利的批評它。*Cantor* 的理論，有如 *Hilbert* 的抽象空間，似乎遠離了 *Poincaré* 與其同路人的直覺實驗基準。巴黎 *1900* 年的那次會議 *Hilbert* 提出他的問題後，*Poincaré* 寫一封信給他，信中比較邏輯與直覺在數學中擔任的角色。數學家自此起逐漸區分成二個或三個思想學派，視其對數學基礎的觀點而定。那些採納 *Poincaré* 觀點的傾向於後日所謂的直覺學派。*Hilbert* 則被公認爲形式學派的領導人物，他的一些後繼者遂歸納出一結論謂：數學並不是什麼東西，只是一些無意義的符號根據某種預先同意的規則而做的遊戲。

與形式主義團帶點姻親，但又非全同於它的是那一撮數學家，他們急於"募集"此遊戲規則的所有任意"本性"。由羅素帶像的這些人，被稱爲邏輯學派（ *logicist school or logicalist school* ），他們要把邏輯和數學捏在一起，使得邏輯就是數學，數學就是邏輯，擁護 *Frege* 反對 *C.S.Peirce*. 到了阿姆斯特丹大學的 *L.E.J.Brouwer* (*1882～1966*) 出來後，着手整編那些反對 *Hilbert* 的形式主義及羅素的邏輯主義的"同志們"成爲一新的集團。他深信數學中的元素與公設並非呼之卽來揮之卽去的東西，在他的博士論文及以後的文章中，*Brouwer* 攻擊算術與分析的邏輯基礎，逐漸的他就變成了現今獲承認的直覺學派開創者。根據 *Brouwer* 的意見，語言和邏輯並非爲數學而預設，數學是一個「具有促使它的概念與推論立卽爲吾人所了解的直覺泉源」的實體，此敍述等於說你肯定那些具有某些性質的對象存在，你就要有所知的的方法來使此對象經有限步驟後被尋獲或被建構出來。他對那些用間接證法得來的東西都嗤之以鼻，亦卽那些超限算術常賴以"胡說"的方法，「反證法」所得應該一概視爲無效。但那些東西是源遠流長的，可上溯自亞里斯多德的年代起，他們的那三條邏輯基本定律一直被視同神聖而不可侵犯：(1)等同律，*A* 是 *A* 。(2)矛盾律，*A* 不得同時爲 *B* ，又爲非 *B* ，(3)排中律，*A* 或是 *B* 或是非 *B* ，別無他途。*Brouwer* 否認第三條，連

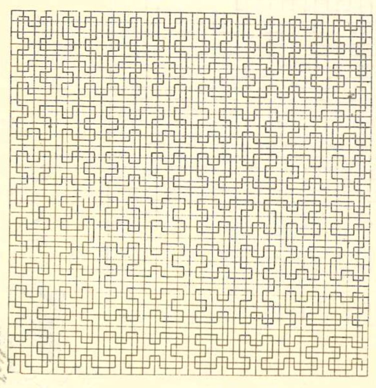


圖 5

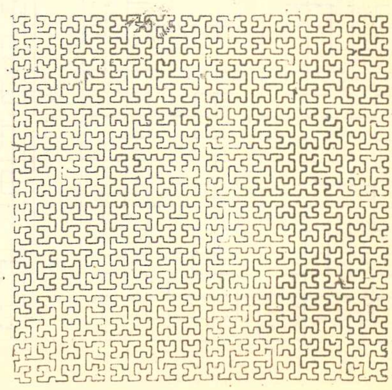


圖 6

帶的建構於其上的結論他一概拒絕接受。好比說，他曾問形式主義者：圓周率π的小數展開式中某處一連出現123456789 九個數字是對或是錯？因爲沒有已知的方法可作一決定，即使展開至一萬位沒有發現，誰也不能肯定再下去的展式不會出現，因而此處的排中律無法用來斷言該命題是眞是僞。

十、直覺主義、形式主義及邏輯主義

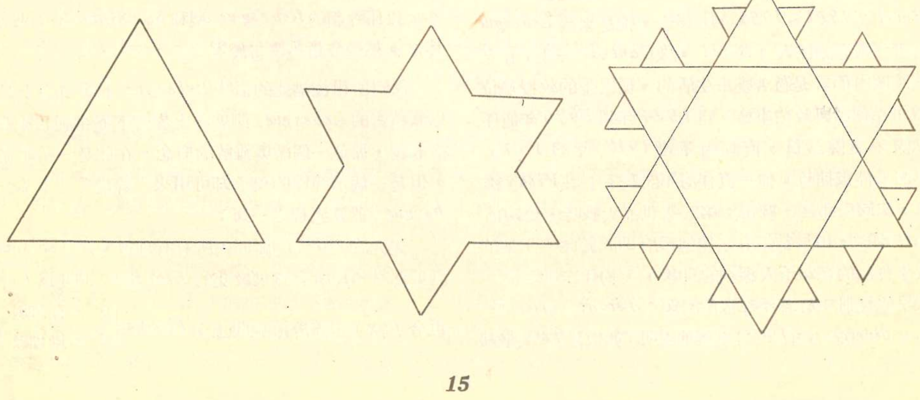
1918年赫曼・外爾（Hermann Weyl 1885～1955）加入直覺主義陣營中，使之力量大增，雖然他曾受教於Hilbert 門下。且於1930年，繼Hilbert主持哥庭根大學。Weyl 曾如是說：將分析建於算術連續統上的形式主義者有如建立一樓閣於沙灘上。Hilbert 雖將Brouwer及 Weyl的攻擊和以前Kronecher的否定主義相比擬，但他依然不能摧毀他們的論調。Weyl 是哥庭根大學培植出來的許多傑出數學家之一，他對許多數學分支及本世紀初兩大科學的進展都頗有貢獻。他曾是愛因斯坦在蘇黎士的同僚（1913年時），1918年他寫了一本廣受閱讀的書Raum-Zeit-Materie（空間－時間－物質）來支持相對論。接下來的十年他寫了一系列群論對量子力學之應用的論文。在1933年，Weyl 生涯的高峰，他辭去了哥庭根大學之教職，以堅決抗議他的同僚（愛因斯坦）之遭納粹免職，此大學在數學一段光榮的年代就這樣陡然消失了。Weyl 跑至美國後變成普林斯頓高等研究中心的一員，愛因斯坦則早在1933年已成爲該院一終身會員。

Poincaré, Hilbert, Weyl及愛因斯坦的作品明白的顯示了抽象數學與科學理論間的密切關係已成爲二十世紀的一大特色，這並不是數學基礎的爭論能動其分毫的。

形式學家與邏輯學家經常被那些我們熟知頗久的集合論悖論所困窘，好像鎮上理髮師的問題，他替所有且僅有的那些不自理髮的人理髮。那麼這位理髮師包含不包含在自理其髮的人群中呢？在這裏古典的排中律是派不上用場的。另一個更是家喻戶曉的羅素怪論，非自己元素的集合組成的集合：$T=\{S \mid S \text{ is a set and } S\notin S\}$，在不在自己中呢？$T\in T$乎？不管你說是或不是，矛盾皆無法避免。這些悖論令人深啓疑竇：那些建於集合概念的設計，像羅素與懷海德所做的，是否成功呢？羅素悖論於1902年公諸於世，由它所引起的懊惱與尷尬對數理邏輯專家們來說，可借用Frege 在1903年出版的Grundgesetze 第二冊中附錄上一段文字來描述：

對一位科學家爲作者來說，最不受歡迎，最令人喪氣的事情再無過於他剛建完成的一座大廈基礎立被搖憾了。我就曾遭遇過這種事情，那是本書即將印成時，羅素的一封信使我要全數收回再度重造…………Solatium, miseris, socios habuisse malorum 我就這種情懷吧！任何人如果他的證明是利用概念、族類、集合之擴充（extensions of concepts, classes, sets）而完成的話，必會處於這種形勢的。這並非基礎方法好歹的問題，而是其基礎是否可能設立的問題。

數學本性的觀點雖被區分成三大派別，但不能以此就認爲每一數學家必居於此三派中之一。沒有一件事情可以遠離眞理的，即令在每一派中仍存有極大的差異。差不多可以說沒有兩個數學家本性的見解是完全相同的。甚至"mathematics"這個字對不同時期的人類所含的意義都不相同，要期望這領域如此巨大的數學爲人獲得廣泛的一致簡直是鏡花水月。在二十世紀前葉中，各派別間的衝突數次劍拔弩張，但不久後又煙消雲散。原因是大家追懷起紀二百年前 d'Alem-



bert (*1717 ～ 1783*) 的觀點，他謂：對此科目的發展，不管是往下紮根或往上結果，都不應有過度的敎條固執。

十一、測度與積分

並非所有的二十世紀早期的數學高手都積極地參加形式主義與直覺主義的紛爭。特別是 *Henri Lebesgue* (*1875～1941*) 最富獨創力及多產的工作者之一，改革了分析上的重要觀點而不從屬於任一"名門正派"。他採取介於直觀學者與形式學者間的地位，可以稱之爲法國邏輯經驗主義。提起他的哲學基礎，他又居於中間的地位。在他的研究中，他憎惡那些傳統古板的分析學家，好比說 *Hermite* 等人。*Lebesgue* 對函數的病理形態持有偏好。儘管他對敎授們所出的問題回答玩世不恭，他還是受了正統的數學訓練；但是他的論文，*1902* 年南西大學所接受者，是如此不平常地拓展積分的園地：他的工作是如此的遠去他所接受的觀點，以致 *Lebesgue* 就像當初 *Cantor* 創立集合論時一樣，起始總顫慄於外在批評及內在自我懷疑的雙重夾擊，但是他的積分見解終漸獲承認，*1910* 年他被任用於 *Sorbonne*，然而，他沒有開宗立派，也沒有集中心志灌溉他所開闢的園地，他害怕，他說「推廣成普遍的定理後，數學將徒具美麗外衣而不復含有實在的內容，它將迅速枯萎。」事後的發展指出他的推廣致死論實在無稽之見。

在 *Lebesgue* 成爲"擴疆時代的阿基米德"前，黎曼積分支配了整個積分理論的研究。不過在十九世紀末三角級數與 *Cantor* 集合理論的研究已使得數學家們敏銳的了解到函數的本質概念爲點態的對應或，在較新的意義上，一種映像 *mapping*，而並非變量的圓滑性。*Cantor* 甚至在"可測度集"這個概念上掙扎，但自他定義後我們知道兩個集合聯集的測度可能小於兩集合測度的和。*Cantor* 定義中的瑕疵被 *Emile Borel* (*1871～1956*) 所移去，他是緊接 *Lebesgue* 之研究測度論的人。*Borel*，像 *Cantor* 一樣，在某些範圍內而言是過著雙重生活的，從巴黎的敎授職位轉而積極參與政治事務。自 *1924* 年到 *1936* 年他任法國衆議院議員，直到因牽連 *1940* 年的 *Vichy* 軍團事件被捕時，他一直任海軍部長。(註 *Vichy* 維琪，法國中部之一城市；第二次世界大戰時，德國佔領法國後，由貝當領導之傀儡政府即設於此。) 他的數學作品的記載予人深刻的印象，大約有六册之多。較早的幾册中有著不尋常的論題：*Lecons surles series divergentes* (*1901*) 此處他說明了如何替某些發散級數定義 和」的方法，以使含有這些級數的關係與運算爲有意義 例如，級數 Σa_n，定其和爲，$\int_0^\infty e^{-x}\sum_0^\infty a^n x^n/n!\, dx$ (若該積分能存在)。這類定義在本世紀內有很多人感興趣 但是 *Borel* 的最能延續下來的影響就是集合理論對函數理論的應用，他的名字也就附着於我們所熟習的定理：*Heine-Borel* 定定理中。該定理謂：若一線上的封閉點集能爲一區間族所蓋住以使該封閉點集中之每一點皆爲該族中某一區間的內點，則該族中可找尋得有限區間亦復具有此性質。

Heine 在 *1872* 年亦曾以稍異的字眼敍述該定理，但到 *1895* 年 *Borel* 才再以廣泛性的說法宣佈之。故名其爲 *Heine-Borel* 的理。*Borel* 的名字也出現在一集合上，該集係自一實數之可數個集合族中反覆運用聯集或交集以得之開集或閉集，此集即稱做 *Borel set*。在他自己的心目中，任一 *Borel set* 皆爲可測度集。

Lebesgue，將 *Borel* 在集合上的著作玩思後，發現黎曼定義的積分，其效力由於僅能應用於特定的一些情況而大感束縛，因它假定函數不能有"太多"的不連續點出現。假使一個函數 $y=f(x)$ 有太多的不連續點，那麼儘管區間 $x_{i+1}-x_i$ 變得極小，$f(x_{i+1})$ 與 $f(x_i)$ 之值却不一定會變得更加接近。就像把自己變數定義域區分成小塊一樣，*Lebesgue* 把函數的值差 $\bar{f}-\underline{f}$ 間也再區分成子區間 $\triangle y_i$，同時在每一子區間內選一值 η_i，然後他設法找尋那些 $f(x)$ 值近於 η_i 的 x 軸上之點集 E_i，以及此集 E_i 之測度 $m(E_i)$。這種 *Lebesgue* 所表達的非常態"差"與傳統的積分大異其趣，傳統上積分儀 (*integrator* 不管大小一概由左至右而從未抽離其中之點分組之，而 *Lebesgue* 則比較函數之大小來集取函數值接近的點然後再疊加。換言之，對早期的黎曼和 $S_n=\Sigma f(x_i)\triangle x_i$。*Lebesgue* 以那所謂的 *Lebesgue* 型和 $S_n=\Sigma\eta_i m(E_i)$ 來代替之，然後令諸 E_i 趨近於零。

我們所粗淺描述的這些 *Lebesgue* 積分事實上是以極精密的 *Lebesgue* 測度之上界與下界諸詞語來嚴格定義，那是一個深奧難解的概念，在此是一言難盡，但是一個示範性的例子却可用來"管窺"一下 *Lebesgue* 運算過程之一斑：

先允許〔 *0* ，*1* 〕區間內所有有理數集之 *Lebesgue* 測度爲 *0*，及所有無理數集的 *Lebesgue* 測度爲 *1*；再令 $f(x)$ 定義於這區間上，$f(x)=\begin{cases}0 & x\text{有理數}\\ 1 & x\text{無理數}\end{cases}$，

現知$m(E_i)=0$ $i\neq n$，此處$\eta_n=1$，可得$S_n=0+0+\cdots+\eta_n m(E_n)=1\cdot 1=1$，故而其*Lebesgue*積分爲1。該同條件下的黎曼積分則顯然不存在。（此例中$n=2$）。

我們未將"一集之測度"或"可測度函數"等諸詞語加以定義，因它們並不是容易用少數淺顯的幾句話交待淸楚的。而且，測度*measure*這個字可作許多種解釋。當*Lebesgue*提出他的新積分觀念時，他用"*measure*"這個字是有他的新見解，即現今通用的*Lebesgue measure*，這是一個將古典的長度面積等概念擴充到比一般所用的曲線曲面還要廣義的概念。今天測度"*measure*"這個字所用的範圍更寬，一個區域R的測度僅只是一個非負的函數μ，具有性質$\mu(\Sigma A_i)=\Sigma\mu(A_i)$而已，$A_i$是含於$R$中的可數子集族。不但積分的新觀念涵蓋的函數族較黎曼積分所原有者更廣泛，而且積分與微分在*Lebesgue*的推廣意義下其間的正反關聯也較以往更加親密。好比，若$g(x)$可微於$[a,b]$而且$g'(x)=f(x)$有界，則f爲*Lebesgue*可積分且$g(x)-g(a)={}_L\int_a^x f(t)dt$，同樣條件施於$g(x)$與$g'(x)$，黎曼積分${}_R\int_a^x f(t)dt$有不存在的可能。

*Lebesgue*的諸多觀念雖早萌於十九世紀末，但它們的廣泛爲人所知乃經由他的兩部古典論著：*Le,cons sue les series trigonom'etriques* (1903)及*Le,cons sur L'int'egration*。它們所含的革命性觀點，舖下了後來更進一步廣義化的道路。其中有*Denjoy*與分與*Haar*積分，分別由法國人*Arnaud Denjoy*（1884～）及匈牙利人*Alfred Haar*（1885～1933）所提出。另一個二十世紀出名的積分叫做*Lebesgue-Stieltjes*積分，這是*Lebesgue*與荷蘭分析學家*T.J.Stieljes*（1856～1894）的觀念組合。這些大師及其他許多人的工作經由推廣舊觀念，創出了如此五彩繽紛的積分以致一般咸認：積分觀念雖如同阿基米德同樣年老，但二十世紀才是積分理論的鷹揚時期。

十二、點集拓璞學

積分的新理論密切連繫於另一二十世紀數學的突出特徵，那就是快速成長的點集拓璞學。1906年*Maurice Fréchet*在巴黎大學他的博士論文中，明顯指出新的函數理若沒有更廣義的集合論觀點做基礎的話將一籌莫展。*Fr'echet*心目中的東西已不再是數的集合了，而是任意本性的元素所成之集合，如曲線、點等；在這些任意的集合上，他建立起一個"泛函算學"*Functional Calculus*，一個泛函運算*functional operation*可被定義於一集合E上，只要對其中的每一元素A，對應有一個定的數值$U(A)$即可。他的興趣並不限於一特殊物件的集合E，乃在那些只計集合理論結果而不計元素本性的東西。在他這極其廣義的定義裏，極限*limit*的概念是遠超出傳統所有的，猶如*Lebesgue*積分之於*Riemann*及*Cauchy*積分。要把二十世紀數學的特性「一言以蔽之」的話，可能沒有比「空前未有的廣義化與抽象化」來得恰當的話了。自*Hilbert*與*Fr'echet*"始作俑者"之後，抽象集合與抽象空間的概念已被積極深入的研究。

*Hilbert*與*Fr'echet*之推廣空間概念所走的路徑頗有興趣。*Hilbert*如*Poincar'e*一樣，曾對積分方程的研究變得有興趣，特別是*Ivar Fredholm*（1866～1927）的著作發表後。就某個意義而言，一個積分方程可視做將含有n個方程式及n個未知數的系統推廣成含無限多個未知數及方程式的系統，這是*Von Koch*以無限行列式之型式修整過的一個論題。在*Hilbert* 1904至1910年間的積分方程研究中，他並無明顯之意念提出無限維空間，但他確實發展出含無限多變數的函數之連續觀念，對*Hilbert*形式上所構建的空間，隨後即稱爲*Hilbert Space*，在某些範圍內或許還有一些懸而未決的地方，但基本概念總算在那兒，這對數學世界的衝擊不可謂不大。*Hilbert*研究他的積分方程的同年代裏，*Hadamard*（1865～1963）九十八歲的長壽者，則正在埋頭苦幹他的變分學，而其保護者*Frechet*也自覺的在1906年推廣他稱做*functional calculus*園地中所用的步驟。普通*cal-culus*處理*function*。而*functional calculus*則處理*functional*。*function*爲一數集S_1與另一數集S_2間的對應關係，而一*functional*則爲一函數族C_1與另一函數族C_2間的對應。*Frechet*對一般微積分中幾個概略的術語，如極限、導數、連續等作成了廣義的定義，以適用於他所創的函數空間，在此新天地裏相當多的語彙被引進來。

拓璞學，其起源之日或謂自*Poincar'e*的分析形勢學起，或謂自*Cantor*的集合理論起，或謂自抽象空間的發展起。更有一些人認爲*Brouwer*才是它的創始人，特別是在他1911年的幾個拓璞不變性定理發表以及他將*Cantor*及分析形勢學中方法的融合之後。不管怎樣，自*Brouwer*起，拓璞學開始"奮發圖强"，流風所及，綿延至今。在這拓璞學的黃金年代裏，美國的數學們家有著出衆的貢獻。有人說過"早期的拓璞是多幾何而少代數，今日的拓璞是多代數而少

幾何。"拓璞曾被描述爲不用度量的幾何，但今日代數拓璞之"魔爪"已欲掌握此塊園地，這是美國領導者所引致的一重大改變。

1913年Weyl講演黎曼曲面於哥庭根，該處Hilbert曾因克萊Klein（1849～1925）之薦而獲一席，Weyl亦然，對一曲面，或二維流形（他喜歡這樣稱呼它）的本性加以强調。他所謂的流形manifold這個概念，不應被通常幾何意義所指的點集空間所拘束，而應賦予更一般化的意義；我們僅由那些稱爲"點"的物件集合開始，（點的意義可指任意想要指的東西），經適當的定義而引進"連續"等等概念。這份工作的正統形式化隨即就由Felix Hausdorff（1868～1942），點集拓璞的"高級牧師"，所做出來。

Hausdorff著作的Grundzüge der Mengenlehre（集合論的基本特徵），1914年出版，第一部分是以系統化的筆調來敍述集合論的特徵，他說"元素的本性是無關緊要的，元素間的關係才是重要的。接着，我們可以看到那"截然有序"的Hausdorff拓璞空間如何從一組公設中被發展出來。一個拓璞空間，著者解釋道：乃是個由元素 x 所組成的集合 E 及那些稱做 x 的隣域的子集 S_x 所構成，此諸隣域滿足下列四個"Hausdorff公設"；

1. 對每一點 x，至少對應有一隣域 $U(x)$ 含有點 x。
2. 若 $U(x)$ 與 $V(x)$ 皆是 x 的隣域，則必存在一個隣域 $W(x)$ 使得 $W(x)$ 爲 $U(x)$ 與 $V(x)$ 二者的子集。
3. 若點 y 爲 $U(x)$ 中之一點，則必存在一個 y 的隣域 $U(y)$ 而爲 $U(x)$ 的一子集。
4. 對任意兩點 x 與 y，可找到兩個隣域 $U(x)$ 與 $U(y)$，而它們之間無共同元素。

這樣定義下來的隣域性質促使Hausdorff能引入連續的概念。經由另外的公設，他發展出種種較受拘束的空間特性，如歐幾里得平面等。

假如說有一本書將點集拓璞從混沌的數學乾坤中抽離出來成爲獨立的一門，那大概就非Hausdorff的Grundzüge莫屬了。最饒興趣的是：那經由Cantor至至Hausdorff等人帶頭的思想訓練所引起的分析算術化，在最後竟把"數"的概念化於廣義觀點的大海中而不復見其原形矣！甚而，那屢見不鮮的字"點point"也被循換得與它的老家「普通的幾何學」日漸疏遠，算術中的數，幾何中的點，眞是一對離「家」出走的好搭擋！在二十世紀，拓璞學已成爲一統數學江山的主題，恰似哲學之統御所有的知識一般。由於拓璞的"原始"本性，它棲息於每一支數學中，提供它無與倫比的潛力。

十三、代數的更進一步抽象

高度的形式抽象業已攀上分析，幾何，拓璞的巔峰去大放異彩，因此也勢難避免地侵入代數的領域去。其結果造成了一付新型的代數，不太正確地被稱做"現代代數"Modern Algebra，它大部分是本世紀第二個三分之一世紀的產物。雖說代數的逐漸推廣與抽象過程確實在十九世紀有所進展，但是在二十世紀裏，它的抽象程度却是一個尖銳的轉捩點。x 與 y 不再必須代表未知數或線軸，（古典的笛卡爾作品中曾如是用）；它們現在可用以指任何類型的東西——集合中的元素，幾何的圖形，矩陣等等無一不可。十六世紀，Cosa這個字用以代表未知數一個大小之量，而那未知者是什麼東西我們是知道的。而今天，這個意大利與西班牙字（Casa=thing）可以做彈性極大的運用，概因抽象代數中的元素本性，除遵循公設所賦予之"義務"外不受其他任何限制。代數運行的方向可由兩次國際數學會議代數方面的史稿比較而看出一些端倪。一次是1915年在英格蘭劍橋舉行的第五屆，恰好在因第一次世界大戰而中斷前，另一次是1950年在麻州劍橋的第十一屆，恰好是第二次世界大戰後的重新開幕，二次戰鐘的期間內，傳統代數到抽象代數所作的變迭只要細讀其目錄表就可瞭然了。"新代數"對"舊代數"的革命，恰如拓璞學與其"母親"幾何學的分庭抗禮。今日拓璞學的大幅度發展實因分析或幾何若不先紐於一些拓璞的基本研究上很難自成其是而有以致之。僅管拓璞學中的某些「含混」常出現，它依然連繫到最細膩的數學問題。長此以往，抽象代數與拓璞學將擔任數學探索中的"獅子部分"。（註：謂大而好的部分，典出伊索寓言，獅子狐狸和驢子合夥去狩獵。他們獲得了大宗獵物。從曠野中回來之後，獅子向驢子說要分給他三股中應得的一分。驢子就很小心的把獵得的東西平分做三分，並且很謙虛的請他們二位先來選擇。獅子悖然大怒，把驢子殺死了。接着狐狸來做分配的事情。狐狸把所有的獵物堆在一起；把很少的一點分給自己。獅子道：「我的優越的朋友，誰教給你這分配的技術的？你應該得到這正確的一部分。」狐狸答道：「這種分配的方法，是從目睹驢子的死亡所得來的。」）

十四、機率與統計學

與其說兩次的戰爭間，數學有所大澈大悟的話，不如說很多數學在戰後扛起急進的新方針，宣告新時

代的來臨。整個二十世紀裏，集合論與測度論進佔了十之八九的數學領域，其中少少數幾支竟被震得肺腑離位，機率論就是這樣的一支，該支學問*Borel*曾在*1909*年提供他的*Elements dela theorie des probabilites*一書。新世紀的開展年代實是機率論的幸運期，它深受寵於物理學與遺傳學的深宮內，由下列事實卽可知：*1901*年吉布斯*Gibbs*（耶魯大學數學家物理學家，*1839～1903*）出版他的統計力學初步原理*Elementary Principles in Statistical Mechanics*，同年度內生物測定學*Biometrika*又由皮爾生（*Karl Pearson 1857～1936*）所建立。吉布斯曾於*1881*年及*1884*年出版向量分析，後又推廣成張量，於代數及量子論中均有其地位，於此不擬贅述。現在來看皮爾生一派人在英國的蓬勃情況：*1859*年達爾文*Darwin 1869～1882*年出版他的物種原始"一書，改變了科學的樣式與自然的解釋，在歷史上深遠地影響人類的思想。他那天生有統計才能的表弟，高爾頓*Francis Galton*（*1822～1911*）亦深受其影響，而熱心地研究遺傳現象。其著作「遺傳才能與天才」*Hereditary Talent and Genius, 1864*,「遺傳性之天才」*Hereditary Genius, 1870*，人類能力之研究*Inguive into Human Faculty1883*，以生物而言，乃優生學的誕生，以統計學言，乃表示新的統計原理之開始。相關係數、回歸係數（*regression coefficient*）首被利用。他自謂是以統計學處理進化問題的第一人，並對所有的方法自信滿滿。當時研究彈性論的數學家*K.Pearson*深受其感動，在晚年成為統計學的奠基者。另一影響*Pearson*的是倫敦大學同事，動物學教授*W.F.R. Weldon*（*1859～1906*），他嘗試用數學方法證明進化論之計劃，更深切感動*Pearson*，遂引起他創立生物統計學的直接動機。這段時期乃是*1890*年到*1900*年的故事，該時期內，*Pearson*的貢獻也是他一生重要的統計理論有：*Pearson*型分配函數，動量法，χ^2分配等。*1906*年*Weldon*遂由遺傳轉至優生學，這位勇猛精進的*Pearson*，在遠離數學的世界裏，自進化論研究起，生物學、遺傳學、優生學無不涉獵，（但他從不離他統計研究方法的確立及觀察資料之數學引用的意念）。此期統計理論有*random migration*的理論等。*1911*年*Galton*以*89*高齡逝世時，*Pearson*因其之託，拋去了應用數學教授的地位，而應聘為優生學的教授。至*1933*年退休後，由統計大師費歇*R.A.Fisher*及他的兒子*E.S.Pearson*登場。由於*Karl Pearson*的一生為科學研究方法的模範，故不惜筆墨，多述如上。

*Dorwin, Galton, Weldon, Pearson*這一譜系決定了敍述統計學的性格，但在時代的潮流衝擊下，又成為數理統計的一小部份，統計學之主流當推*1920*年後的推測統計學。附帶一提，*Poincaré*的一個頭銜是"機率論教授"，可見這科目的受重視了。

在蘇俄，連鎖事件的理論，自*1906*年起為*Markov*所研究，他曾與他的老師*Tchebycheff*共著一本書*Oeuvres*。在氣體動力論與許多社會，生物的現象中，一事件的機率常因前次之出現情況而定，因此在二十世紀中葉起，*Markov*的連鎖事件機率的研究遂廣受重視。但是古典的機率論已深感不敷應用，統計學家想要有一得心應手的工具——新的機率論，那就需要重新尋找更廣泛的數學基礎了。對於這點，蘇俄的*Andrei Nicolaevich Kolmogoroff*（*1903～*）在*1903*年建立了一個嶄新的機率理論，不但完善的改進*Markov*的方法，而且更經由*Lebesgue*測度論的利用，達到了*Hilbert*的第六個構想——機率理論的公設化。

根據*Kolmogoroff*的定義：一機率空間（$\Omega\ F\ P$）係一非空集合Ω，及其子集族F，附以一函數P而組成，它們滿足下列諸公設：

Ⅰ若E_1，$E_2 \epsilon F$，則$E_1 \cup E_2$，$E_1 \cap E_2$，$E_1 \sim E_2$皆ϵF

Ⅱ $\Omega \epsilon F$

Ⅲ對F中每一A，皆有一非負之實數$P(A)$與之對應，此值稱為事象A之機率。

Ⅳ $P(\Omega)=1$

Ⅴ A，$B \epsilon F$且$A \cap B=\phi$則$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

Ⅵ $\{A_i\}_1^\infty A_i \epsilon F$，為一無限序列，且$A_i \supset A_{i+1}$，$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i=\phi$則$\lim P(A_n)=0\ n\rightarrow\infty$

古典的分析雖處理了連續函數的問題，但古典的機率論問題却多只涉及離散*discrete*的狀況，測度論與擴充後的積分觀念很適其時的拉近分析與機率論的距離，特別是在本世紀中葉，巴黎大學的*Lauernt Schwartz*（*1915～*）經由分配論對微分的觀念加以推廣後更是這樣（*1950～1951*作）〔分配*distribution*或稱廣義函數*Generalized Functions*，內容過繁深，不擬詳述〕。

原子物理中的*Dirac* δ函數顯示了那久已盤踞數學家的病態函數亦有用於科學的一日。在較複雜的情況下，可微分的性質經常崩潰，特別見於微分方程——數學與物理間的橋樑——含有奇異解時（*Singular solution*）。為克服此困難*Schwartz*引入了一個新

而廣泛的微分概念，那是因爲本世紀前半世紀Banach，Frechet等諸人所做的一般向量空間加以發展，而才變得可能。一個線性向量空間乃一含 a,b,c ……等元素而滿足某一些條件的集合，特別是下列一條：若 a 和 b 爲 L 中的元素，α，β 爲複數，則 $\alpha a+\beta b$ 亦爲 L 中的元素。若 L 中的元素爲函數，則此線性向量空間稱爲線性函數空間，這種情形下的映像（mapping）稱做一個線性泛涵 linear functional。對於一個分配 distribution，Schwartz意指某一函數空間上的線性連續泛函，該空間內每一函數都可微分且滿足某些其他的條件。好比說，Dirac 測度就是一分配的特殊情況。Schwartz 又小心翼翼做出分配之導數的適當定義，以使得該導數本身依然爲一分配。這就提供了微積分強而有力的推廣，而立即可用於機率論中物理中。泛函分析，本質上是變分學的廣義化，以及分配論自本世紀中葉起，已成爲數學研究的重要題材。

十五、高速計算機

機率與統計不僅與純數學糾纏得難分難解，更與我們這時代的特色工具——領域日增的高速計算機打得火熱不堪。用機器來計算的構想並不新奇，遠在巴斯卡和來布尼茲的年代裏，就曾略有小成。事實上，精密的計算器先驅者爲Charles Babbage（1792～1871），他有一個怪癖，就是當他去募集基金來製造他的狂妄設計——神奇機器，碰到釘子時，他就去找街頭流浪的手風琴樂師喋喋不休，不知所云。該項設計，構思於1833年，曾有一度受到英國當局的贊助。當1842年財政大臣删去這這預算時，Babbage恨恨地把他比做以弗所（Ephesus，小亞細亞古城）美麗寺院的拆除者。照我們猜測，Babbage所擬想的機器當有許多現代機器的性能，但沒有現代機器的速度。它當可操作所有的算術運算，且可貯存資料以備日後查詢。大概不外是應用精巧的齒輪，轉軸，連桿所組成。但他的機器，一個數字計算機，到死也沒有完成。近代機器計算的紀元該是1925年吧，該年Vannevar Bush（1890～）和他的助手在麻省理工學院建造了一個大規模的擬計算機，用馬達帶動，其餘部分則爲純機械設計。1938國際商業機械公司（IBM）仿循Babbage的綱要開始建始MARK I，一座完全自動化的電機設計。但是在1944年完成時，它又瞠乎ENIAC計劃之後了。全名是Electrical Numberical Integrator and Calculator。該物係第一架完全電子計算機，是基於電子流通過眞空管的原理而作成。它原是應軍方之需而做的，設計顧問中有一位大名鼎鼎的人物馮紐曼John von Neumann 非常重要。他生於布達佩斯，曾任教於柏林與漢堡。於1930年赴美國後，和愛因斯坦於1933年一起成爲普林斯頓高等研究中心終身會員首先的兩位。在1944年到1946年間，他替陸軍草擬一份計算機能力的報告，到1949年第一座貯存計劃的計算機終於開始操作，兩年後UNIVACI（Universal Automatic Calculator）又爲Sperry Rand公司所造成，但是這門技術變化的迅速，立即又把它拋進史密生博物館裏去。（Smithsonian Institution，在美國首都華盛頓，1846年由英國科學家James Smithson捐款修建，以普及教育傳播知識爲目的）。

電變更了我們的生活方式而造成了電的世紀，接著來的電子產物可能又要對數學的發展產生更巨大的變革，今日計算機的功力與精巧程度是遠超過Babbage當年的想像之外（他走在他時代的一百年前面）。早期數學家們所束手無策的許多問題，最近已藉助高速計算機之力紛紛解決了。假如說（刻卜勒曾如是說）對數的發明延長了天文學家的一倍壽命，那麼電子計算機所賦予科學家及數學家的生涯，不知又有幾許！由於它龐大日增的能力，新的數學應用與分枝有如雨後春筍般地滋生出來，如線性計劃 linear programming 博戲論 game theory，方略研究 operation reseatch等等。馮紐曼，我們這世紀最富創造力及最具才氣的數學家之一，又是一個以新方法研究數理經濟的先驅者。計量經濟學 econometrics 雖長久以來都利用到數理分析，但經由博戲論與經濟行爲論，馮紐曼與Oskar Morgenstern1944 年所合著，所謂有限數學 finite mathematics才開始在社會科學中扮演日漸重要的角色。各門學術思想間的相互關係是如此的微妙複雜，麻省理工學院的數學教授Norbert Weiner（1894～1964）在1948年出版了他的統馭學Cybernetics 一書。研究動物與機械之控制及聯繫。他得出結果謂：機械的自動控制與動物的神經系統有相似的結構。馮紐曼與Weiner 皆對量子論有深切研究，後者且於1955年任原子能委員。但就這樣論定他們只是應用數學家則未免言之過早。他們對純數學的貢獻實不亞於應用數學，集合論，群論，operational calculus，機率，數理邏輯，數學基礎皆有其涉獵的足跡。馮紐曼在1929年給定Hilbert Space 的名稱，它的公設化，以及它目前極高度的抽象形式。Weiner 在線性空間理論發展初期的二十年裏，特別是Banach 空間，有著很重要的貢獻。二十世紀應用數學的突飛猛進決不拖慢純數學的發展，而新分枝的

發芽茁壯更不會削弱舊樹幹的龐大氣勢。

十六、數學結構

抽象代數、拓璞學、向量空間的基本概念雖皆蘊藉於1920至1940年間，但隨後的二十年才看到了代數拓璞學 *Algebraic Topology* 的領袖群倫；甚至更進一步滲入代數及分析的領域中。其結果是新科目的出籠，所謂同調代數 *Homological algebra* 是也。第一本書是 *Henri Cartan* (1904～)與 *Samuel Eilenberg* (1913～)所合著，1955年出版後，十二年內論文紛出。同調代數乃自抽象代數發出來，討論在各種不同的空間皆有效的代數結果，這是一種代數拓璞對純代數的侵入。要知抽象代數與代數拓璞間由普通交流昇至强力交流的快速程度，只要由 *Mathematical Reviews* 雜誌上有關同調代數的文章增加量即可窺知。更而，這門新科門對近來的研究是那麼地得心應手，而那些標著代數，分析或幾何的古老科目竟有如持方柄以納圓鑿，幾乎極難適用於新近所獲的成果上。數學從未像今日這樣的大一統。自二次大戰以來，大部分的進展很少是因自然科學而起，僅純數學本身的刺激即够了，而同時數學的應用於科學却倍逾往昔。這種一廂情願的現象，最佳的解釋是：類型的判別與抽象化已逐漸在自然科學中飾演重要的角色，就像在數學中一樣。因此，即使在今日超抽象思考的年代裏，數學仍然是科學的最佳語言。數學結構和實驗現象，雖沒明修劍閣，却在暗渡陳倉。特別是最近許多現代物理的發現，無心求之却宛然吻合後，就更加物證多多了。儘管它們間步調一致的根本理由依然很模糊。對此，*Bourbaki* 的數學之建構（見本刊"數學是怎樣建築起來的？"）一文說得好，"從公設化的觀點來看，數學好比是一座儲存抽象形式（數學結構）的貨倉，至於說經驗界實體的某些外觀，竟和這些形式相符合，好像早就配合好了一樣，這就不是我們所能解釋的了。

十七、Bourbaki與新數學

我們一再複述，二十世紀的數學是朝著抽象化的加强及廣大類型的區分兩條路上走的。也許無處可搜尋比以下更切合的例子了：那就是"多頭"的數學家 *Nicolas Bourbaki* 所"放射"出的二十世紀中葉數學著作。這是一個不存在的法國人，配有一個希臘名字而出現在六册書的封面上。那是一系列的巨著，*Elements de mathematique*，試著要探察所有有價值的數學。布巴基的家被定為南西 *Nancy*，是一個產生許多本世紀數學高手的城市。該處有一座銅像；刻的是實實在在而且一度有名的將軍 *Charles Denis Sauter Bourbaki* (1816～1897)，他在1862年被希臘人邀請去當他們的國王，但他回絕了，他在普法戰爭中所扮的角色的確很眞實。但這並不就是 *Nicolas Bourbaki* 的同一體，其間相去是很遠的，*Nicolas Bourbaki* 這個名字僅僅代表一群數學家的組合而已，幾無例外的都是法國人。他們組成了一個神秘的 *Societe anonyme*. 至於布巴基棣屬的學術機關，他們就定為南加哥 (*Nancago*) 大學，這是一個遊戲式的組合，原來這集團的兩位領銜人物一度都與芝加哥區的大學有關，維爾 *Andre Weil* (1906～)在芝加哥大學（最近已在普林斯頓高等研究中心），以及狄亞東內 (*Jean Dieudonne* 1906～) 在西北大學（先在南西大學，後在巴黎大學）。他們就把南西和芝加哥改編成南加哥。原理一書第一册在1939年出版，第三十一册在1965年出版，到目前為止還沒把第一部分寫完，第一部分名稱叫做 *Les structures fondamentales de lanalyse* 包含六個單元：(1)集合論(2)代數(3)普通拓璞學(4)實變數函數(5)拓璞向量空間(6)積分。由這些單元就可知道部數學著作中只有一小部分是一世紀以前的東西。他們討論的方法是堅決地、固執地採用公設化步驟，並以邏輯結構使它完全抽象化及普遍化。*Bourbaki* 式的最高數學研究水準所用的方式類似於中小學改革後的數學課程所用者然，中小學採用這種方式的目的是希望經由抽象結構的加强，以收思想上的簡潔與經濟。舉個例來說，十九世紀早期發現了複數系與歐氏平面上的點有相同的結構，於是後者經二千年研究出來的性質立可應用於前者，結果促使複數分析有著繁盛的增殖。因此，我們沒有理由說，有朝一日再發現其他類似的結構，不會產生相同的茂盛情況。這也就是預先伏種，隔年收成的道理。

學校中所謂的新數學也拜受 *Bourbaki* 之賜，以觀念來取代計算。

本世紀早期，數學的神秘性幾乎被那受邏輯主義鼓勵的枯燥的形式主義接管其全部的家當。但到本世紀中期，形式學派與直覺學派間的仇恨已經平息，*Bourbaki* 自然無需對此爭論有所偏袒，「公設化方法所建立的本質目標」。他寫道，「僅僅是那些邏輯形式主義本身所無法提供的東西——奧妙的數學可理解性」。該集團的領導者之一，*Weil*，一般認為是二十世紀中葉傑出的數學家，以相同的筆調寫道：邏輯是數學的保健法，但並非它的食物」。

Poincaré 曾說過「在數學中，不幸預言者，悲觀論調者，常是站不住脚的。」這種樂觀的看法，在今日數學中常可見到。*Weil*仅作了*Hilbert* 的迴響，他說：「手邊有許多問題正是數學活生生的標誌。」談起未來時，他又說到，「未來的偉大數學家，將同以往一樣，捨熟徑而弗由，披荆斬棘另闢新路，我們想像不到要如何進行的，來解決我們所留下來的問題。」再往前瞻，*Weil* 還深信：「最偉大的觀念必爲最簡潔可愛的觀念。」

撫覽舊往，一個人可從大處着眼，看出來來的端倪。但假如說，那句格言「歷史自我反複*History repeats itself*」可做爲眞理註脚的話，數學的反複似乎是最富變化而難以預測，對之所做的期望也泰半空歸徒然。曾有人斷言，科學、包含數學，的成長所示的圖形將是一條近乎指數函數的曲線；對數學來說，將來的發展符合該類型並不無理由。然而人類社會，賢不肖相去不以寸，極其可能人類的數學或許要成爲自我毁的工具。

參攷資料

1. *Boyer, CarlB. A History of Mathematics* (譯文所自)
2. *Markushevich A.I. Theory of Furctions of A Complex Variable*
3. *Rolf Nevanlinna & Veikkopaatero Introduction to Complex Analysis*
4. *Lang Analysis I & Aralysis* II
5. *Royden H.L Real Analysis*
6. *Taylor General Thery of Functions and Integration*
7. *N.Bourbaki General Topology*
8. *Yosida Functional Analysis*
9. *Van Der Waerden Modern Algebra*
10. 高木貞治　近世數學史談
11. *Courant & Robbins Whatis mathematics*
12. 北川敏男著，葉能哲譯　統計學之認識
13. 科學月刊　第 1. 4. 9. 10.11.12.等諸期

附：近世數學之回顧當自牛頓發明微積分始，雖則前尚有伽利略、刻卜勒 (*Kepler*) ，費瑪 (*Fermat*) ，笛卡爾諸角色，然牛頓之啓後世思想更甚。而後伯努利*Bernoulli* ，奧義羅*Euler*皆爲大師，再至法國大革命則人才蔚啓矣！至高斯崛起於德國，*Cauchy* 復重振於法國，以後種種眞所謂洋洋大觀者也，幾何之興，分析之變，以至代數之出，幾於十九世紀百年內一氣呵成，直令人目不暇觀耳不暇聞。二十世紀既草敍如上，其餘未及者 (起自牛頓，迄於*1900*年間) 浩瀚尤甚，怎奈歲不我與，夢爲遠別啼難喚，書被催成墨未濃，盼有志者續爲之，庶幾拋瓢引玉之願不負焉。

As long as algebra and geometry proceeded along separate paths, there advance was slow and their applications limited.
But when these sciences joined company, they drew from each other fresh vitality and thenceforward marched on at a rapid pace toward perfection.

____Largrange
(1736-1813)

組合

數三乙　于　淳

寒假裡在台大數學研討會中（由中央研究院與台灣大學合辦），聽到了一點關於組合理論的東西，一時感覺到耳目一新，於是想藉這個機會把它介紹給同學們，是寫本文的動機。

我所以要把題目命為組合，原因有三：

(1)我只談到研討會中的一個小節；如何在平面上找到"足够"多的不共線點，以形成一個我們要的凸 n 多邊形。因此我不願說：「"談組合理論"，…。」

(2)我似乎做到了一件事：為了達成寫這文章的目的，於是在整個由各種數學理論所成的大集合中，找到了足够的元素，來建構我要寫的東西，此非組合乎？

(3)我深深地以為一篇文章，是由各種學到的，想到的，甚至於抄到的東西組合起來；尤其是數學性的；如果把自已的情感也加上去，可能會活一點，不只靜態美。

在內容上，本文包括了二個部份：*Ramseys* 定理（保證我們能够找到足够多的點以形成一個 n 凸多邊形的存在性定理。時間收歛的結果。

對了，我們還得告訴各位的是：除了歸納法外，沒有其他的知識須為第一部份內容的基礎。但是，也不可以為它是十分淺顯的內容，您同樣也可以在上面下點功夫，找到一個"確實有用"的數字：如此比四年寒窗苦讀並沒差到什麼地方哩！第二部份是由黃光明博士所口述而聽到的；它不久以前曾是一篇出色的論文。

Ramsey's Theorem

邏輯上也有所謂的 *Ramsey's Theorem*，（註）以後簡稱 *RT*，在這兒內容大致摘譯於 *Marshall*, *Hall*: *Combinatorial Theory* 在沒有證明定理之前先給各位一個例子：

給予不共線（任三點）的六點（為方便起見，我們以凸六邊形的頂點代替），而以實綫，點綫兩種來連各對角線；但是，無論你怎麼連，最後至少會出現兩個同色（同實綫或同點綫）的△。各位不妨畫畫看，或者找一同伴，來個比賽，看誰先畫到同色△者輸。如果你想不輸，那麼想想看，如何才會贏？

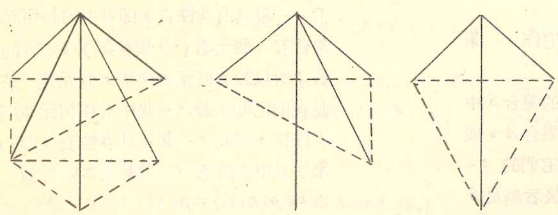
說明：

(i)最後必定有人輸。

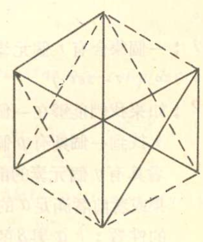
(*a*)過任一點畫五條同色綫，則至少有十條線（五個點）不可再用同色，否則已形成同色△；而此五點即可形成另一色的三角形。（見下圖）

(*b*)過任一點有四條同色綫，則考慮與過此點所連結的端點即可明白非形成同色△不可。

(*c*)過任一點有三條同色綫，則至少形成一個同色△。



(a)　(b)　(c)



（前所言，乃在敘述必可找到一同色△。）

(ii)先畫的人贏的機會多：

我們知道共十五條綫，如果最後只剩一條綫（即那條綫無論什麼色，皆可形成同色△）（如左圖），則先畫的人輸，是吧！同理可推論其它，在此我只能給一些暗示：

(*a*)要最後只剩一條的充分條件是每一點皆由 3 2 分佈的綫所組合；但非必要。

(*b*)對稱是很有用的，如此一來先畫的吃虧了吧？因為後畫的只要照先畫的，對稱著畫，那麼先畫的未形成△之前，後的不是還沒有嗎？

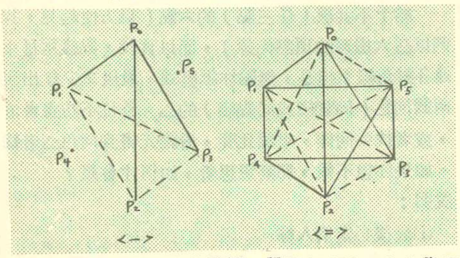
(*c*)機會多，不一定贏。

(iii)如果畫出來會形成同色△，則至少有兩個。這個結果也很容易了解；如果是(i)(*a*)，(*b*)的情形，則

必然會有，所以只論(c)：

(1)以點綫連三點 $P_1P_2P_3$，則已形成一同色△(一)，考慮 P_4,P_5，如果和 P_4,P_5，連結的線不止三條（同色），則已由(i)(a)(b)論及，所以至多三條，兩點皆如此，而且須實綫，否則與 P_1P_2，P_2P_3，P_3P_1 形成另一同色△，現在如果與 P_4 連的不是 $P_1P_2P_3$，則那三點不就可決定一個△，而不同於△$P_1P_2P_3$，所以連 P_4P_1，P_4P_2，P_4P_3，同理連 P_5P_1，P_5P_2，P_5P_3，這麼一來，如果尚未形成同色△，則可由 $P_0P_4P_5$ 得到，因爲過此三點皆不可再畫實綫，而形成異於△$P_1P_2P_3$ 之同色△(二)。（圖於下）

(2)連一條實綫兩條點綫，這更顯然，略。



這看起來是很小的問題，說明起來眞是令人覺得很煩，而且似乎還得問到：究竟七點的話怎麼辦？答案與上面大致相同的是

(i)一定有人輸。

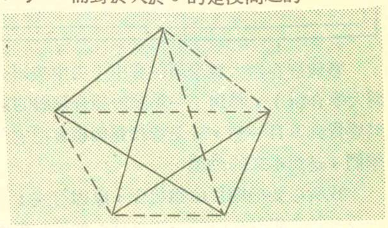
(ii)如果畫出同色△，則至少有三個。（證明更繁，各位可在本文作者處看到。）

講了上面這個例子後，各位也許會以爲，這簡直太單調了，老是在那裡連來連去的。不！精彩的還在後頭。

定義1：一個集合有 r 個元素，則我們稱它作 r-集。（r-set）

定義2：如果我們能够在一個有N個元素的集合S中，找到一個具有 p 個元素的部分集合A，或者具有q個元素的部分集合B，它們的 r-集或者前者滿足α的性質，或者後者滿足β的性質：（α與β的性質爲互斥的。）則我們以N表之，$n(p,q,r)$爲能滿足這些性質的最小數，又稱之爲 Ramsey's #。（如此也可明白，只要N滿足則 $\forall n>N$，n亦滿足。）

在這地方，不妨把方才的例子拿來說明一下；究竟6是不是Ramsey's #，顯然它滿足定義2所述；只要把直線（任一種），看成二連接點的性質，則把6寫成 $n(3,3,2)$，似乎有望，當然我們須證明5不可以，是的，下圖即是一個不可的例子。所以 $n(3,3,2)=6$ 而對於大於6的是沒問題的。



Remark：一般來說，如果我們能够給一個 Ramsey's # 定一個上限，則我們就證明了，此#的存在性，因爲小於這個限而大於1的是有限的。

譬　如：$n(3,4,2)$，首先我們證明它≤ 9，再來證明它>8，$\therefore n(3,4,2)=9$，（證明於作者處可見）。

現在爲了證明R.T. 先給下面幾個小輔助定理：

Lemma1：$n(p,q,1)=p+q-1$

pf：取 $p+q-1$ 中滿足α性質的 p個點，可能則此p點中的任一點皆有α性質，如此 $p+q-1$ 即可滿足；如果取不到，則至少此p點中有一點滿足β性質，加上 $(p+q-1)-p=q-1$，則q點滿足β性質，$\therefore p+q-1$ 亦爲眞。

$p+q-2$ 可以嗎？不可！如今有 $p-1$ 個點滿足α $q-1$ 個滿足β，則不成立。

Lemma2：$n(p,r,r)=p$

pf：假設$\#(A)=p$，$\#(B)=r$，若要B中所有 r-集具有β性質，即B中的每個部分集合有r個元素（B集本身），有β的性質；所以於p個元素中取r個元素，若滿足β則已可，若 r-集中有任何元素不具β性質，則此 r-集不具β性質，即(p-集）A中之所有 r-集具有α之性質。

$\therefore n(p,r,r)=p$

$(\text{if } n(p,r,r)=p-1, \because p-1<p \rightarrow\leftarrow$

$\because A,B\subset S \rightarrow \#(A) \text{ or } \#(B)\leq \#(S))$

Lemma3：$n(r,q,r)=q$.

pf：同理可證。

Theorem (Ramsey): Let S be a set containing N elements and suppose that the family T of all subsets of S containing exactly r elements is divided into two mutually exclusive famil-

ies α and β. Let $p\geq r$, $q\geq r$, $r\geq 1$; Then if $N\geq n(p,q,r)$, a # depending solely on the in-tegers, p,q,r, and not on the set S, it will be true there is either a subset A of p-elements, all of whose r-subsets are in the family α, or there is a subset B of q-elements, all of whose r-subsets, are in the family β.

●暗示(i)爲了使各位更明白點，於是把原文抄出，給各位參考，而它怎麼翻譯，大略在前面已有過；最重要的，各位一定要分淸這是 " or " 的情況。

(ii)以下的證明要用的是數學歸納法，這裏所有的方法似乎與一般你見到的不同，可是原理是一樣的。爲了減少不當的翻譯，以下證明大都用英文。●

$\because p\geq r$, $q\geq r$, ($\therefore$ Consider $p=r$, $q=r$, $r=1$ as the case $k=1$ in general)

$p=r$, $q=r$, $r=1$

To show $(n(p,q,1), n(p,r,r), n(r,q,r))$ exist.—①

By Lemma 1,2,3. We have $n(p,q,1)=p+q-1$

$n(p,r,r)=p$, $n(r,q,r)=q$

This Concludes ① $(x\geq p,\ y\geq q)$

Suppose $n(p-1,q,r)$, $n(p,q-1,r)$, $n(x,y,r-1)$ exist.

then let them equal to p_1, q_1, and, $n(p_1,q_1,r-1)$ respectively

As the idea we give above, if we can prove the # $n(p,q,r)$ has a bdd. then $n(p-q,r)$ exist.

claim : We show $n(p,q,r)\leq n(p_1,q_1,r-1)+1$

Let S be a set with $(N\geq n c p_1, q_1, r-1)+1)$ elements.

$$S^1=S-\{a_0\},\quad a_0\in S$$

Define α^1 if $r-1$ elements in S^1 and $\{a_0\}$ satisfies α

β^1 if $r-1$ elements in S^1 and $\{a_0\}$ satisfies β

then S^1 has at least $n(p_1,q_1,r-1)$ elements. i.e.

S^1 contains a subset A with p_1 elements, all of whose subsets with $r-1$ elements are of property $\alpha^1$③ ; or S^1 Contains a sukset B with q_1 elements, all of whose subsets with $r-1$ elements are of property β^1.

(i) Consider p_1 element's set A, all of whose $r-1$ element's set is of α^1 property.

$\because p_1=n(p-1,q,r)$, $\therefore$ Either ①

A contains a sakset B^1, $\#(B^1)=q$, whose r-set are of property β, then it's true for us to choose from $(n(p_1,q_1 r-1)$ a sabset of q elements whose r-set are of property β. (Conclude the proof). Or ② A contains a sukset A^1, $\#(A^1)=p-1$, whose r-set are of property α

Now consider these $p-1$ elements and $\{a_0\}$ and leads to conclusion that in p-element's set A. all whose r-set are of property α. (as define α^1, ③)

(ii) Consider q_1 elements, the conclusion comes also.

$\therefore n(p,q,r)\leq n(p_1,q_1,r-1)+1$ Q.e.d.

Remark : From RT, we get only an existent theorem, but not the methods to get a Ramsey's # so you still have the opoertunity, if you can bind some Ramsey #, of course, you must work hard.

e.g. $n(4,4,2)$, $n(3,4,2)=9=n(4,3,2)$

$n(4,4,2)\leq n(9,9,1)+1=18$

and $n(4,4,2)>17$

$\therefore n(4,4,2)=18$

We shall give a substantial consquence of giving bound.

Corollary : $n(k,m,2)\leq\binom{m+k-2}{k-1}=\binom{k+m-2}{m-1}$

pf : Use Mathematieal Inductin

$k\geq 2$, $m\geq 2$.

If $k=2$, $n(k,m,2)=n(2,m,2)=m\leq\binom{m}{1}=m$

$m=2$ $n(k,m,2)=n(k,2,2)=k\leq\binom{k}{1}=k$

$\therefore$ It's true.

Suppose it's true when $n(k-1,m,2)$, $n(k,m-1,2)$

then $n(k-1,m,2)\le\binom{k-1+m-2}{k-1-1}$

$$n(k,m-1,2)\le\binom{k+(m-1)-2}{m-1-1}$$

$$=\binom{k+(m-1)-2}{k-1}$$

By the consequence get from RT.

$n(k,m,2)\le n(k_1,m_1,1)$

where $k_1=n(k-1,m,2)$, $m_1=n(k,m-1,2)$

$\therefore n(k,m,2)\le n(k_1,m_1,1)+1$

$=k_1+m_1$ (Lemma 1)

$\therefore n(k,m,2)\le k_1+m_1\le\binom{k-1+m-2}{k-1-1}$

$+\binom{k+(m-1)-2}{k-1}=\binom{k+m-3}{k-2}$

$+\binom{k+m-3}{k-2}=\binom{k+m-2}{k-1}$

(By definition of combination)

$\therefore$ It's also true for $(m,k,2)$, i.e. By mathematical induction we have proved that $n(k,m,2)\le\binom{k+m-2}{k-1}=\binom{k+m-2}{m-1}$ Q.e.d.

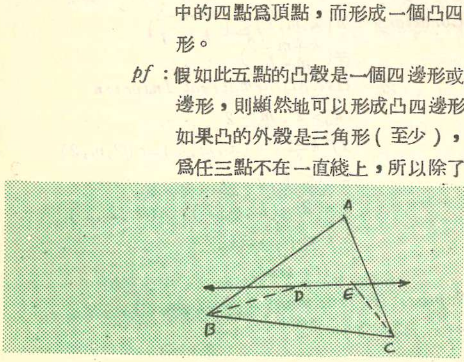
Remark : We must have a cronquence $n(k,m,2)=n(m,k,2)$ (why?)

長長地把 RT 說了一大堆，可是它究竟要幹什麼呢？下面就是我們要處理的問題；在這問題的討論中，我假設各位已經明白了什麼叫做凸多邊形（convex）凹多邊形（concave），在得到結果之前，仍然須解決兩個 Lemma 。

Definition : We mean the convex hull （凸的殼） of any set of points is the smallest convex body contaiuing all points.

Lemma 4 : 任三點不共綫的五個點，至少可以其中的四點為頂點，而形成一個凸四邊形。

pf : 假如此五點的凸殼是一個四邊形或五邊形，則顯然地可以形成凸四邊形。如果凸的外殼是三角形（至少），因為任三點不在一直綫上，所以除了三角形頂點外的兩點，在三角的內部，連此兩點，D,E，則 $\overleftrightarrow{DE}$ 交 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$（或 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$；$\overline{AC}$，$\overline{BC}$），如左圖所示。連 D,E,C,B 則形成一個凸四邊形。

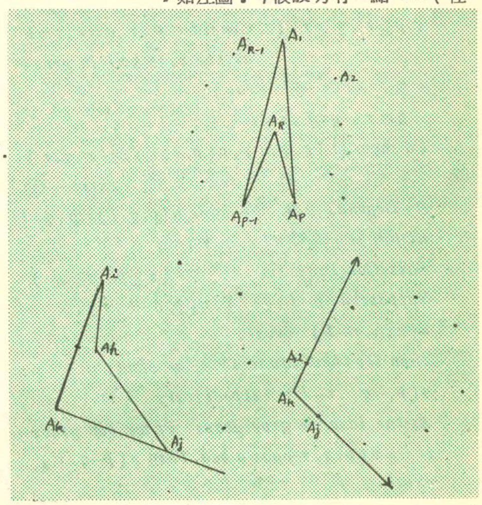


Lemma5 : 任三點不在一直綫上的 n 個點，且任四個點，皆可形成一凸四邊形，則此 n 多邊形為凸多邊形。

pf : 我們要用數學歸納法：

$n=4$，結果顯然成立。

假定於 $n=k-1$ 時，此結果成立，即以 $A_1,A_2,\cdots,A_{k-1}$ 為頂點的 $k-1$ 點，能形成一個凸 $k-1$ 多邊形（C_{k-1}）（任四點皆成凸四邊形），如左圖：今假設另有一點 A_k（任四點可形成一凸四邊形）如果 A_k 在 C_{k-1} 之內部，則 A_k 落在由 $A_1,\cdots A_{k-1}$ 所組合聯成的三角形中，令為 $\triangle A_pA_{p+1}A_1$，則四點 A_1,A_p,A_{p+1},A_k 所形成的四邊形必為凹，所以不可落於 C_{k-1} 之內部，當然不會在界上(?)。令 A_n 在 C_{k-1} 之外部，則存在兩個點（$A_1\sim A_{k-1}$），A_i，A_j，使得 C_{k-1} 在 $\angle A_jA_kA_i$ 之內部。(i)假如 A_i，A_j 不是相鄰的兩點，至少有一點 A_h 夾在中間，則 A_i,A_j,A_h,A_k 可形成一凹多邊形。(ii)所以 A_i，A_j



必爲連續的，如此把 A_k 加在上面兩點之間而形成一個凸多邊形。由數學歸納法可得證明的結果。

Theorem: $\forall n \in N$ (*natural number*)，

$No = No(n)$ *such that any No pts in a plane. no three are on a line will contain n points to form a convex n-gon.*

pf：令 α 表凸四邊形的性質

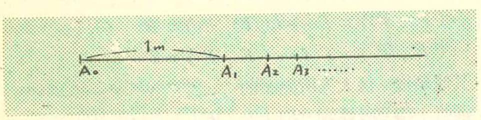
β 表凹四邊形的性質

對於所給的 n，考慮 $N(n,5,4)$ 則很顯地這個 N 爲所求者。在 $N(n,5\ 4,)$ 中，我們不能在由 5 點所形成的集合 B 中，保證任意四點可形成一凹四邊形（由 *Lemma4*），所以是 n 點所成的集合 A 中，任何四點可形成一個凸四邊形，再由 *Lemma5*，此 n 點可形成一凸多邊形，這就完成了我們所要的結果，由 RT 保證 N 可以找得到。

時間的收斂

一個球由空中落下，不久即會停止，這是一個小事實，各位同學：你們可曾想過它？光地心引力所形成的結果嗎？

很久以前，記得在科學月刊的創刊號一零號一中看到了一個類似詭論的問題，當時實在是百思不解，雖然在那兒也有答案，可是我沒看，我只想自已來，可是又怎會想到它曾是一篇很出色的論文呢？最後還是聽來了，現在先把問題敍述一下：烏龜和兔子照例舉行賽跑，賽前大家看好兔子：牠賽前，時速保持 10 公里，而烏龜僅 0.1 公里，百分之一而已，兔子以一副英雄的氣派讓烏龜先走了一公尺，結果詭論說：兔子將永遠追不上烏龜。下面是一段看起來頗爲合理的推理：如下圖所示：



當兔子由 A_0 走到烏龜所在的位置 A_1 時，A_1 上的烏龜已由 A_1 走到 A_2，所用的時間是兔子由 A_0 至 A_1 所須，兔子再由 A_1 到 A_2，烏龜由 A_2 至 A_3，如此永遠落後在烏龜的後面，不是嗎？今暫且不論其結果如何，讓我們來看一個更值得了解的問題：

假設有一個球，具有相當好的彈性；當然不會越跳越高；每次落下去再跳上來，高度爲原來的 $\frac{1}{2}$（當然你可以小於 1 的任何數核對一下。）則此球會不會停止，還是永遠在那裏跳個不停呢？

答：會在一段時間內（*finite*）停止。

Solut on: 令球由高度 S 的地方自由落體下降，則

$$S = \tfrac{1}{2} g t^2 \quad t = \sqrt{2s/g}$$

$$t_1 = \sqrt{2s/g}\ ,\ t_2 = \sqrt{s/g}$$

$$t_3 = \sqrt{2 \cdot s/4/g}\ ,\ \cdots,\ t_n = \sqrt{2s/2^{n-1}}$$

$$Sn = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$$

$$= \sqrt{2s/g}\left(1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{4}} + \cdots + \sqrt{\tfrac{1}{2^{n-1}}}\right)$$

$$= \sqrt{2s/g}\left(1 + \frac{1}{2^{1/2}} + \frac{1}{4^{1/2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$= \sqrt{2s/g}\left(\frac{1-(\sqrt{1/2})^{n-1}}{1-\sqrt{1/2}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} Sn = \sqrt{2s/g}\left(\frac{1}{1-\sqrt{1/2}}\right) = t$$（所須的時間總和）

如果 $S = 10m$ 則 $t = 6.82$ 秒，即約七秒後球即停止。

由這結果我們很容易可以算出兔子將會在一定的時間內追上烏龜，雖然牠曾落後了無限多次，可是時間所須是有限的，時間到了，就停，眞可謂逝者如斯乎，不捨晝夜，它絕不會和兔子一樣傻傻地永遠落在烏龜的後面不是嗎？

既然已談到了這些，似乎我得考慮到究竟，機率（*probability*）和時間有沒什麼關係；我相信各位知道在歐氏幾何學的作圖上，是不容許無窮多次作圖，否則三等分一任意角的問題早已應刄而解（*why?*）。既然如此，機率上所考慮；怎麼相反地以（假設）無窮次操作的結果而解決呢？各位試過嗎？擲一骰子得到"一"的機率眞的是 $1/6$ ？我想時間區間的理想化及機會的形成沒有"主觀"，是主要的原因。明白嗎？最後，我得趁機告訴你們一個秘密：機率論的前程似錦，雖然系中不開機率論，但是，統計學，數理統計兩門所給予的已足够了，要下點功夫，莫忘！莫忘！

後　記

這篇文章之所以會成爲這樣子，少了一部份，我以爲還是各方面的念頭（*idea*）所組合而形成的，不是嗎？

敘述的眞假判斷

數三甲　季大明　張文良

我們每個人活在這世界上，差不多都要靠"傳播"來連繫和求知。這裡面包括用"語言"和人討論，看書報上的文字圖片，聽電台的語言廣播，看電視上的畫面等，而自已親身經驗的可能只佔一小部份。我們可以把自已的知識分成兩類：一類是"符號知識"，包括文字，語言、圖片等，一類是經驗知識，是自己親自聽聞的。例如對我來說，'鴉片戰爭"和"北極"算我的"符號知識"，而"師範大學"和"老鄭"才是我的經驗知識。"符號知識"對我們的影響，由於時代的進步是越來越大了。如果我們不能很正確的使用和判斷這些符號，或者錯認"符號知識"在某一方面來說就等於經驗知識，那將會造成人類很多的愚昧和悲劇。邏輯在這一方面的應用很大，因此深受研究學問人的重視，歐美很多的大學都列爲共同必修科，據說美國計劃在十年內把邏輯正式列入高中數學教材。

邏輯既然這麼一天比一天的重要，而且將來還可能跑到高中數學來，不得不令我們這些準老師多加注意。閒話少說，言歸正傳。本文的主要目的在分兩部分介紹一些判斷敘述眞假的方法，第一部分偏重於紙上談兵，用算式來研究，第二部分則想想方法用機器代替人，去打眞值表（這個機器是我們自己設計的，可惜沒錢，否則就造它一個）。在正式介紹前，我們想先談談"敘述"和"連詞"，把基本觀念弄清楚。好，我們先看敍述。

邏輯上把敍述定義爲一個或眞或假，但不能既眞又假的句子，通常我們把敍述分成兩類：一類是"簡單敍述"（*simple statement*），一類是"複合敍述"（*Compound statement*）。把幾個簡單敍述用連詞（*Connections*）結合，就構成"複合敍述"。例如"長白山上終年積雪"和"西湖在杭州"是兩個"簡單敘述"，而"長白山上終年積雪且西湖在杭州"和"若長白山上終年積雪則西湖在杭州"即爲"複合敍述"。

也許大家認爲先弄通"簡單敍述"的眞假，再研究"複合敍述"較易。事實上決定一個簡單敍述的眞或假，眞是千頭萬緒，很不容易弄淸楚！而知道一些簡單敍述的眞假，再研究它們之間組合的"複合敍述"則較易。邏輯就是這樣的"避難趨易"，而得到可觀的成果。這種情形在其他學問上也屢見不鮮，例如當"三等分角問題"走入絕境時，有些人就嘗試用圓錐曲線求解（避開了作圖工具的限制），終於導致了解析幾何，代數方程式論的進展，而證明了"不可解定理，眞令當初研究的人難以預料。

現代邏輯和傳統邏輯有一個重要差別，就是現代邏輯完全是符號型式的推演，而傳統邏輯則多用"語言"。這種情形也好比算術和代數，譬如算術裡要解釋"交換律"，就非得舉例。至於兩者採不採用符號後的功力之差，亦好比"韓信點兵"和"*Chinese Remainder Theorem*"。

一般數學上最常用的是二値邏輯。我們可以把二値邏輯裏的連詞看成一個函數，例如"→"可看成爲：

$\rightarrow : \{T, F\} \times \{T, F\} \rightarrow \{T, F\}$

$\rightarrow(T, T) = T$，$\rightarrow(T, F) = F$，

$\rightarrow(F, T) = T$，$\rightarrow(F, F) = T$

其他類推。像大家所熟悉的"∧""∨""→""↔"邏輯上稱爲兩連詞（因 $\{T, F\} \times \{T, F\}$）。三連詞甚至 n 連詞的二値邏輯當然也有，不過都是兩連詞二値邏輯的附屬品，這一點待會再證。

記得"新教材"剛在台灣推行的時候，很多人對"新教材"提出質疑。筆者認爲裏面的一部分問題和"二値邏輯"有關。我們要强調：不但在數學裏不是

每位數學家都贊成用"二值邏輯"，就在物理或日常生活中亦不全是"二值邏輯"，就在這樣的看法，多多少少會對鑽"ϕ 是不是凸集合？""若 $2+2\neq 4$ 則 $2+2=4$"爲眞敍述等牛角尖的人少壓一頂"學術"的大帽子。

塔斯基曾創三值邏輯，不過還脫不了二值邏輯的胎骨。美國邏輯學家路易士曾領導改革那種奇怪的"若……則……""邏輯"，他們的成就如何？據行家說尚言之過早。

由一個簡單的公式 2^{2^n}，我們卽可推知所有定義在 $\{T, F\}$ 的二元運算共有 16 個，亦卽所有的二值邏輯兩連詞共有16個。下面卽這十六個連詞的總表，如果在邏輯上不常用的連詞，我們一律以天干配名。

P	Q	甲	∨	乙	→	／	丙	丁	戊	↔	己	庚	∧	辛	壬	↓	癸
T	T	T	T	T	T	F	T	T	F	T	F	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	F	T	T	F	T	F	T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	T	F	T	T	F	F	T	F	F	T	F	F
F	F	T	F	T	T	T	F	F	F	T	T	T	F	F	F	T	F

在這十六個連詞中，恒眞（甲）恒假（癸）的各有一個，這個性質在二值邏輯 n 連詞中亦有。如果我們再細心點會發現兩個 *groups*，它們是 $<\{T, F\}; \leftrightarrow>$ 和 $<\{T, F\};$ 戊$>$，但是二值邏輯 n 連詞的情況下，*groups* 就不存在了。

下面我們來分析這十六個連詞的性質，分(一)交換性(二)結合性(三)同構性(四)單位元素討論。

(一)交換性

具有交換性的連詞有甲，∨，／，戊，↔，∧，↓，癸等。我們判別的方法是因所有具有交換性的連詞，一定具有"T 連詞 $F=F$ 連詞 T"的性質，反之亦然。

(二)結合性

結合性的討論，眞是麻煩極了！在這兒我們都用布氏代數化簡，如果你不太懂這些式子的來源，可先看電腦的那一部分。

1．甲：

$<P$ 甲 $Q>$ 甲 $R\equiv T$，P 甲 $<Q$ 甲 $R>\equiv T$，因此 $<P$ 甲 $Q>$ 甲 $R\equiv P$ 甲 $<Q$ 甲 $R>$。

2．∨：

$<P\vee Q>\vee R$ 和 $P\vee<Q\vee R>$ 都僅當 $P=Q=R=F$ 時爲假，因此

$<P\vee Q>\vee R\equiv P\vee<Q\vee R>$。

3．乙：

因 $<F$ 乙 $T>$ 乙 $F=F$ 乙 $F=T$，

F 乙 $<T$ 乙 $F>=F$ 乙 $T=F$，故不可結合。

4．→

因 $(F\to F)\to F=T\to F=F$，

$F\to(F\to F)=F\to T=T$，故不可結合。

5．／

因 $(T/F)/F=T/F=T$，

$T/(F/F)=T/T=F$，故不可結合。

6．丙

當 $P=T$ 時則 $<P$ 丙 $Q>$ 丙 $R=T$ 丙 $R=T$，P 丙 $<Q$ 丙 $R>=T$ 丙 $<Q$ 丙 $R>=T$；當 $P=F$ 時則 $<F$ 丙 $Q>$ 丙 $R=F$ 丙 $R=F$，F 丙 $<Q$ 丙 $R>=F$，故恒有 $<P$ 丙 $Q>$ 丙 $R\equiv P$ 丙 $<Q$ 丙 $R>$。

7．丁

"丁"爲可結合，經布氏代數化簡後，

$<P$ 丁 $Q>$ 丁 $R=PQR+P'QR+P'Q'R+PQ'R=P$ 丁 $(Q$ 丁 $R)$。

8．戊

戊爲可結合，因 $<P$ 戊 $Q>$ 戊 $R=PQR+P'Q'R+P'QR'+PQ'R'=P$ 戊 $<Q$ 戊 $R>$。

9．↔

↔爲可結合，因 $<P\leftrightarrow Q>\leftrightarrow R=PQR+P'Q'R+PQ'R'+P'QR'=P\leftrightarrow<Q\leftrightarrow R>$。

10．己

己爲不可結合，因 $(T$ 己 $T)$ 己 $T=F$ 己 $T=F$ T 己 $(T$ 己 $T)=T$ 己 $F=T$。

11．庚

因 $<F$ 庚 $F>$ 庚 $F=T$ 庚 $F=F$，

F 庚 $<F$ 庚 $F>=F$ 庚 $T=T$。故不可結合。

12．∧

∧可結合，因僅當 $P=Q=R=T$ 時，$<P\wedge Q>\wedge R=P\wedge<Q\wedge R>=T$ 爲眞。

13．辛

"辛"不可結合，因 $<T$ 辛 $T>$ 辛 $T=F$ 辛 $T=F$，T 辛 $<T$ 辛 $T>=T$ 辛 $F=T$。

14．壬

"壬"不可結合，因 $<T$ 壬 $T>$ 壬 $T=F$ 壬 T

$=T$，$T\text{壬}<T\text{壬}T>=T\text{壬}F=F$。

15．$\downarrow$

"$\downarrow$"不可結合，因$<T\downarrow T>\downarrow F$
$=F\downarrow F=T$，$T\downarrow<T\downarrow F>=T\downarrow F=F$。

16．癸

癸可結合，因$<P\text{癸}Q>\text{癸}R=F$
$=P\text{癸}<Q\text{癸}R>$。

㈢同構性

$$\begin{array}{c|cc} \text{甲} & T & F \\ \hline T & T & T \\ F & T & T \end{array} \xrightarrow[F\to T]{T\to F} \begin{array}{c|cc} & F & T \\ \hline F & F & F \\ T & F & F \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{c|cc} \text{癸} & T & F \\ \hline T & F & F \\ F & F & F \end{array}$$

甲與癸同構。

$$\begin{array}{c|cc} \vee & T & F \\ \hline T & T & T \\ F & T & F \end{array} \xrightarrow[F\to T]{T\to F} \begin{array}{c|cc} & F & T \\ \hline F & F & F \\ T & F & T \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{c|cc} \wedge & T & F \\ \hline T & T & F \\ F & F & F \end{array}$$

"$\vee$"與"$\wedge$"同構。

$$\begin{array}{c|cc} \text{乙} & T & F \\ \hline T & T & T \\ F & F & T \end{array} \xrightarrow[F\to T]{T\to F} \begin{array}{c|cc} & F & T \\ \hline F & F & F \\ T & T & F \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{c|cc} \text{辛} & T & F \\ \hline T & F & T \\ F & F & F \end{array}$$

"乙"與"辛"同構。

$$\begin{array}{c|cc} \to & T & F \\ \hline T & T & F \\ F & T & T \end{array} \xrightarrow[F\to T]{T\to F} \begin{array}{c|cc} & F & T \\ \hline F & F & T \\ T & F & F \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{c|cc} \text{壬} & T & F \\ \hline T & F & F \\ F & T & F \end{array}$$

"$\to$"與"壬"同構。

$$\begin{array}{c|cc} / & T & F \\ \hline T & F & T \\ F & T & T \end{array} \xrightarrow[F\to T]{T\to F} \begin{array}{c|cc} & F & T \\ \hline F & T & F \\ T & F & F \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{c|cc} \downarrow & T & F \\ \hline T & F & F \\ F & F & T \end{array}$$

"$/$"與"$\downarrow$"同構。

$$\begin{array}{c|cc} \text{丙} & T & F \\ \hline T & T & T \\ F & F & F \end{array} \xrightarrow[F\to T]{T\to F} \begin{array}{c|cc} & F & T \\ \hline F & F & F \\ T & T & T \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{c|cc} \text{丙} & T & F \\ \hline T & T & T \\ F & F & F \end{array}$$

"丙"只和"丙"同構

$$\begin{array}{c|cc} \text{丁} & T & F \\ \hline T & T & F \\ F & T & F \end{array} \xrightarrow[F\to T]{T\to F} \begin{array}{c|cc} & F & T \\ \hline F & F & T \\ T & F & T \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{c|cc} \text{丁} & T & F \\ \hline T & T & F \\ F & T & F \end{array}$$

"丁"只和"丁"同構

$$\begin{array}{c|cc} \text{戊} & T & F \\ \hline T & F & T \\ F & T & F \end{array} \xrightarrow[F\to T]{T\to F} \begin{array}{c|cc} & F & T \\ \hline F & T & F \\ T & F & T \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{c|cc} \leftrightarrow & T & F \\ \hline T & T & F \\ F & F & T \end{array}$$

"戊"和"$\leftrightarrow$"同構

$$\begin{array}{c|cc} \text{己} & T & F \\ \hline T & F & T \\ F & F & T \end{array} \xrightarrow[F\to T]{T\to F} \begin{array}{c|cc} & F & T \\ \hline F & T & F \\ T & T & F \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{c|cc} \text{己} & T & F \\ \hline T & F & T \\ F & F & T \end{array}$$

"己"只和"己"同構

$$\begin{array}{c|cc} \text{庚} & T & F \\ \hline T & F & F \\ F & T & T \end{array} \xrightarrow[F\to T]{T\to F} \begin{array}{c|cc} & F & T \\ \hline F & T & T \\ T & F & F \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{c|cc} \text{庚} & T & F \\ \hline T & F & F \\ F & T & T \end{array}$$

"庚"只和"庚"同構

㈣單位元素

有單位元素的連詞共有4個："$\leftrightarrow$"，"$\wedge$"，"$\vee$"，"戊"。其中"$\leftrightarrow$"和"$\wedge$"的單位元素爲T，"$\vee$"和"戊"的單位元素爲F。

下面開始介紹五種判斷敘述眞假的方法，它們是：㈠眞值表檢驗法㈡分組討論法㈢分組討論法之逆用㈣標準式㈤公設法。

(一)眞值表檢驗法

用眞值表來列出一個敘述的一切眞假情況，數學系的同學應該是"駕輕就熟"，本文就不討論。不過有一點希望大家注意：在列眞值表左邊敘述的一切眞假組合時，一般都遵守下面的規則：

設有n個敘述P_1，……，P_n，那麼P_s敘述的眞假變動，從上到下依次爲2^{n-s}個T接2^{n-s}個F再接2^{n-s}個T再接2^{n-s}個F……一直到底。

例如5個敘述裏的第三個敘述，其眞假變動從上到下依次爲$TTTTFFFFTTTTFFFFTTTTFFFFTTTTFFFF$。

(二)分組討論法

我們先看一個例子，如$(P\to Q)\to P$

先設$P=T$則

原式$\equiv(T\to Q)\to T\equiv Q\to T\equiv T$

引用規則：$T\to Q\equiv Q$，$Q\to T\equiv T$。

再設$P=F$則

原式$\equiv(F\to Q)\to F\equiv T\to F\equiv F$

引用規則：$F\to Q\equiv T$，$T\to F\equiv F$。

本題如列眞值表：　　主要行

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\to$	P
T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T
F	T	F	T	T	F	F
F	F	F	T	F	F	F

再舉一例：

$[(P\to Q)\wedge(Q\to R)]\to(P\to R)$

設$P=T$則

原式$\equiv[\,(T\to Q)\wedge(Q\to R)\,]\to(T\to R)$

$\equiv[\,Q\wedge(Q\to R)\,]\to R$

$\equiv T$

再設$P=F$則

原式$\equiv[\,(F\to Q)\wedge(Q\to R)\,]\to(F\to R)$

$\equiv[\,T\wedge(Q\to R)\,]\to T$

$\equiv T$

本題如列眞值表：

主要行

P	Q	R	$[(P$	$\to$	$Q)$	$\wedge$	$(Q$	$\to$	$R)]$	$\to$	$(P$	$\to$	$R)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F	T	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F	T	F	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F

用分組來討論一個敍述的眞假，一般說來都比列眞值表簡單。我們不難看出，敍述主要行的眞假分佈越規則，用分組法越簡單。我們再舉兩個較複雜的例子。

例一：$[\,(P\to\sim Q)\leftrightarrow(Q\to\sim S)\,]\vee$

$[\,(\sim S\wedge R)\to\sim P\,]$

$P=T$

原式$\equiv[\,\sim Q\leftrightarrow(R\to\sim S)\,]\vee\sim(\sim S\wedge R)$

$S=T$

原式$\equiv[\,\sim Q\leftrightarrow\sim R\,]\vee T$

$\equiv T$

我們可以得到下面的一張表：

P	S	Q	R	原句
T	T	T	T	T
T	T	T	F	T
T	T	F	T	T
T	T	F	F	T

若設$S=F$

原式$\equiv[\,\sim Q\leftrightarrow T\,]\vee(\sim R)$

$\equiv\sim Q\vee\sim R$

$Q=T$時　原式$\equiv\sim R$

$Q=F$時　原式$\equiv T$

我們可以得到下面的一張表：

P	S	Q	R	原式
T	F	T	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	T	T
T	F	F	F	T

$P=F$

原式$\equiv[\,T\leftrightarrow(R\to\sim S)\,]\vee T$

$\equiv T$

我們可以列下面的一張表：

P	Q	R	S	原式
F	T	T	T	T
F	T	T	F	T
F	T	F	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T
F	F	T	F	T
F	F	F	T	T
F	F	F	F	T

例二：$(P\,\text{戊}\,Q)\,\text{壬}\,(\sim P)$

設$P=T$

原式$\equiv(T\,\text{戊}\,Q)\,\text{壬}\,F$

$\equiv\sim Q\,\text{壬}\,F$

$\equiv F$

若$P=F$

原式$\equiv(F\,\text{戊}\,Q)\,\text{壬}\,T$

$\equiv Q\,\text{壬}\,T$

$\equiv\sim Q$

列表如下：

P	Q	$(P\,\text{戊}\,Q)\,\text{壬}\,(\sim P)$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

分組討論法必須熟記的定理：

1. $P\,\text{甲}\,Q=T\,\text{甲}\,P=P\,\text{甲}\,T=F\,\text{甲}\,P=P\,\text{甲}\,F$
   $=T$
2. $T\vee P=P\vee T=T$
   $F\vee P=P\vee F=P$
3. $T\,\text{乙}\,P=P\,\text{乙}\,F=T$
   $P\,\text{乙}\,T=P$
   $F\,\text{乙}\,P=\sim P$
4. $T\to P=P$
   $F\to P=P\to T=T$

$P \to F = \sim P$

5. $T / P = P / T = \sim P$

$F / P = P / F = T$

6. T丙$P = T$

F丙$P = F$

P丙$T = P$丙$F = P$

7. T丁$P = F$丁$P = P$

P丁$T = T$

P丁$F = F$

8. T戊$P = P$戊$T = \sim P$

F戊$P = P$戊$F = P$

9. $T \leftrightarrow P = P \leftrightarrow T = P$

$F \leftrightarrow P = P \leftrightarrow F = \sim P$

10. T己$P = F$己$P = \sim P$

P己$T = F$

P己$F = T$

11. T庚$P = F$

P庚$T = P$庚$F = \sim P$

F庚$P = T$

12. $T \wedge P = P \wedge T = P$

$F \wedge P = P \wedge F = F$

13. T辛$P = \sim P$

P辛$T = F$辛$P = F$

P辛$F = P$

14. T壬$P = P$壬$F = F$

P壬$T = \sim P$

F壬$P = P$

15. $T \downarrow P = P \downarrow T = F$

$F \downarrow P = P \downarrow F = \sim P$

16. T癸$P = P$癸$T = F$癸$P = P$癸$F = F$

(三)分組討論法之逆用

這種方法特別適用於證明恒眞句、矛盾句或$A \to B$型的敍述，我們用兩個例子說明它。

例一：證明（$Q \vee \sim P$）乙（$P \to Q$）爲恒眞句

我們先假設原句爲假，在乙下面記上F

$$\begin{array}{c}(Q \vee \sim P)\text{乙}(P \to Q)\\ F\end{array}$$

乙連詞爲假時，$Q \vee \sim P$爲假而$P \to Q$爲眞

$Q \vee \sim P$爲假，則必Q假，P眞但P眞Q假時$P \to Q$爲假，此與$P \to Q$爲眞矛盾，故原敍述不可能爲假，即爲恒眞敍述。

例二：證明：（$\sim P \vee Q$）$\wedge$（$\sim Q \vee R$）蘊涵（$P \to R$）

設〔（$\sim P \vee Q$）$\wedge$（$\sim Q \vee R$）〕$\to$（$P \to R$）爲假，即

$$\begin{array}{c}[(\sim P \vee Q) \wedge (\sim Q \vee R)] \to (P \to R)\\ F\end{array}$$

$$\begin{array}{c}[(\sim P \vee Q) \wedge (\sim Q \vee R)] \to (P \to R)\\ T \qquad\qquad F \quad F\end{array}$$

$$\begin{array}{c}[(\sim P \vee Q) \wedge (\sim Q \vee R)] \to (P \to R)\\ T \quad T \qquad T \qquad F \;\; TFF\end{array}$$

P眞R假時，$\sim P \vee Q$一定爲假，矛盾！故（$\sim P \vee Q$）$\wedge$（$\sim Q \vee R$）蘊涵$P \to R$。

(四)標　準　式

我們先證明一個預備定理：

任何一個連詞都可以用不超過四個敍述的選取式表之，而且每個敍述內是含兩個變元（*variables*）的並連式。

註：並連式指用″$\wedge$″連接，選取式指用″$\vee$″連接。

我們證之如下：

Ⅰ表示的方法：先觀察此連詞的眞值表中那幾行是″T″，如果是第一行就寫″$P \wedge Q$″，如果是第二行就寫$P \wedge \sim Q$，第三行就寫″$\sim P \wedge Q$″，第四行就寫″$\sim P \wedge \sim Q$″，再以″$\vee$″連接起來。根據這個方法，我們列出所有連詞表示法如下：

(1) P甲$Q \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$

(2) $P \vee Q \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q)$

(3) P乙$Q \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$

(4) $P \to Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$

(5) $P / Q \equiv (P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$

(6) P丙$Q \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q)$

(7) P丁$Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge Q)$

(8) P戊$Q \equiv (P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q)$

(9) $P \leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$

(10) P己$Q \equiv (P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$

(11) P庚$Q \equiv (\sim P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$

(12) $P \wedge Q \equiv P \wedge Q$

(13) P辛$Q \equiv P \wedge \sim Q$

(14) P壬$Q \equiv \sim P \wedge Q$

(15) $P \downarrow Q \equiv \sim P \wedge \sim Q$

(16) P癸$Q \equiv (P \wedge \sim P) \vee (Q \wedge \sim Q)$

（唯一的例外）

Ⅱ證明：

我們可以分四部份來討論，即當P眞Q眞，P眞假，P假Q眞，P假Q假時。底下僅舉證第一種情

形，餘可類推。

(i)當P眞Q眞且"P連詞Q"爲眞時，其選取式中必有一爲"$P\wedge Q$"，"$P\wedge Q$"爲眞，故其選取式亦必爲眞。

(ii)當P眞Q眞且"P連詞Q"爲假時，其選取式必爲下列三者的一部份或全部組成：$(P\wedge\sim Q)$，$(\sim P\wedge Q)$，$(\sim P\wedge\sim Q)$；無論如何這三者皆爲假，故原選取式亦必爲假。

這個定理有一個對偶定理：

任何一個連詞都可以用不超過四個敍述的並連式表之，而且每個敍述內都是含兩變元的選取式。

由上述的預備定理，我們得到：

任何一個敍述都可以只用"v""∧""～"等三個連詞表之。我們稱由原預備定理之公式所導出者叫第一標準式，由其對偶定理表出的稱第二標準式。

這個定理的嚴格證明較枯燥無味，本文就不證了，下面舉一些"實戰例"。

例一：$(P\leftrightarrow Q)\to P$

$$
\begin{aligned}
(P\leftrightarrow Q)\to P &\equiv\sim(P\leftrightarrow Q)\vee P\\
&\equiv\sim[(\sim P\vee Q)\vee(P\vee\sim Q)]\vee P\\
&\equiv(P\wedge\sim Q)\vee(\sim P\wedge Q)\vee P\\
&\equiv(P\wedge\sim Q)\vee(\sim P\wedge Q)\vee P
\end{aligned}
$$

（第一標準式）

例二：$(P\downarrow Q)\to P$

$$
\begin{aligned}
(P\downarrow Q)\to P &\equiv(\sim P\wedge\sim Q)\to P\\
&\equiv[(\sim P\wedge\sim Q)\wedge P]\vee\\
&\quad[\sim(\sim P\wedge\sim Q)\wedge P]\vee\\
&\quad[\sim(\sim P\wedge\sim Q)\wedge\sim P]\\
&\equiv[\sim P\wedge\sim Q\wedge P]\vee\\
&\quad[(P\vee Q)\wedge P]\vee\\
&\quad[(P\vee Q)\wedge\sim P]\\
&\equiv[\sim P\wedge\sim Q\wedge P]\vee\\
&\quad(P\wedge P)\vee(Q\wedge P)\vee\\
&\quad(P\wedge\sim P)\vee(Q\wedge\sim P)\\
&\equiv(P\wedge P)\vee(Q\wedge P)\vee\\
&\quad(P\wedge\sim P)\vee(Q\wedge\sim P)
\end{aligned}
$$

（第一標準式）

例三：$(P\vee Q)\wedge[(Q\to P)\vee R]$

$$
\begin{aligned}
(P\vee Q)\wedge[(Q\to P)\vee R]
&=[P\vee Q\vee(R\wedge\sim R)]\wedge[(\sim Q\vee P)\vee R]\\
&=(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\sim R)\wedge(P\vee\sim Q\vee R
\end{aligned}
$$

（第二標準式）

當一個敍述化成標準式後，其眞假情況非常易定。以後我們還要以這個做基礎，去化成"多項式"。標準式的眞假判斷規則如下：

(A)第一標準式：至少有一個括號內其敍述皆爲眞。

(B)第二標準式：每一個括號內至少有一敍述爲眞。

我們很容易問道：是不是能用更少的連詞來表示全部的十六個連詞？答案是肯定的！*M.H.Sheffer*於*1913*年顯出單用"↓"或"／"即可。以後又經人證出這是唯一的一對（"↓"同構"／"），我們列一些重要連詞的表示法如下：

(1)$\sim P\equiv P/P\equiv P\downarrow P$

(2)$P\wedge Q\equiv(P/Q)/(P/Q)$
$\qquad\equiv(P\downarrow P)\downarrow(Q\downarrow Q)$

(3)$P\to Q\equiv P/(Q/Q)$
$\qquad\equiv((P\downarrow P)\downarrow Q)\downarrow((P\downarrow P)\downarrow Q)$

(4)$P\leftrightarrow Q\equiv((P/P)/(Q/Q))/((P/P)/(Q/Q)$
$\qquad\equiv(((P\downarrow P)\downarrow(Q\downarrow Q)\downarrow(P\downarrow Q))\downarrow(((P\downarrow P)\downarrow(Q\downarrow Q))\downarrow(P\downarrow Q)))$

(5)$P\downarrow Q\equiv((P/P)/(Q/Q))/((P/P)/(Q/Q))$

(6)$P/Q\equiv((P\downarrow P)\downarrow(Q\downarrow Q))\downarrow((P\downarrow P)\downarrow(Q\downarrow Q))$

（一般稱這個方法叫*Sheffer's stroke*）

（五）公　設　法

邏輯裏的公設法分兩部份進行，第一部先挑選一組敍述當公設，第二部份再規定一些推演規則，使所有的恒眞敍述皆可導出。以下我們簡介一般邏輯書上皆樂意推介的*P.M.*系統。

(A)未定義連詞：" v "，" ～ "

(B)定義：

(1)$P\to Q$定義爲$\sim P\vee Q$

(2)$P\wedge Q$定義爲$\sim(\sim P\vee\sim Q)$

(3)$P\leftrightarrow Q$定義爲$(P\to Q)\wedge(Q\to P)$

(C)公設：

(1)$(P\vee P)\to P$

(2)$Q\to(P\vee Q)$

(3)$(P\vee Q)\to(Q\vee P)$

(4)〔 $P \vee (Q \vee R)$ 〕→〔 $Q \vee (P \vee R)$ 〕

(5) $(Q \to R) \to [(P \vee Q) \to (P \vee R)]$

(D)推演規則：

(1)代換規則：可以用任何敘述去代換一個"恒眞敘述"內的變元，但必須要在每一個該變元出現的地方都代換。

(2)分離規則：假如 $P \to Q$ 和 P 都是恒眞句，那麼 Q 也是恒眞句。

下面我們舉一些實例，然後再證明這一組公設的一致性和完備性。筆者認爲獨立性對初學者並不重要，事實上 P.M. 系統的公設(4)，並不獨立於其它四個公設。

〔例一〕 $(P \to \sim P) \to \sim P$

證明：1. 公設(1)中的 P 以 $\sim P$ 代入得：

$(\sim P \vee \sim P) \sim P$

2. 由"→"的定義得：

$(P \to \sim P) \to \sim P$

〔例二〕 $(P \to \sim Q) \to (Q \to \sim P)$

證明：1. 由公設(3)以 $\sim P$ 代 P，$\sim Q$ 代 Q 得

$(\sim P \vee \sim Q) \to (\sim Q \vee \sim P)$

2. 由"→"之定義得：

$(P \to \sim Q) \to (Q \to \sim P)$

〔例三〕 $(P \to Q) \to [(R \to P) \to (R \to Q)]$

證明：1. 公設(5)中以 P 代 Q，Q 代 R，R 代 P 得：

$(P \to Q) \to [(P \vee R) \to (Q \vee R)]$

2. 以 $\sim R$ 代 R 得：

$(P \to Q) \to [(P \vee \sim R) \to (Q \vee \sim R)]$

3. 由"→"的定義可得：

$(P \to Q) \to [(R \to P) \to (R \to Q)]$

〔例四〕我們用已知的公設及定理證明一個新的規則：由"$X \to Y$"和"$Y \to S$"兩個眞敘述，可以得到"$X \to S$"。

證明：1. 在例三中以 Y 代 P，S 代 Q，X 代 R 可得：

$(Y \to S) \to [(X \to Y) \to (X \to S)]$

2. 因爲"$Y \to S$"爲一眞敘述，故由分離規則可得：

$(X \to Y) \to (X \to S)$

3. 再因"$X \to Y$"亦爲眞敘述，故再由分離規則可得：

∴"$X \to S$"

〔例五〕 $\sim P \vee P$

證明：1. 公設(2)中以 P 代 Q 得：

$P \to (P \vee P)$

2. 又公設(1)爲：

$(P \vee P) \to P$

3. 故由 1. 2. 及例四可得"$P \to P$"即"$\sim P \vee P$"。

用公設法來找眞敘述，有時候是非常難的，在實際判斷中較少應用，我們可以這樣比喻：用眞值表來證明恒眞敘述，就好像用代數去解算術四則問題，雖然我們不明"究竟"，但是一定能解得出。

以下簡證 P.M. 系統最重要的兩個問題，一是"一致性"，一是"完備性"。

(A)一致性的證明：

我們假設一個變元是"T"時具有值"1"，而"F"時具有值"0"。"V"解釋成二進位（0,1 兩個數）中的乘法，並規定 $\sim 0 = 1$，$\sim 1 = 0$。

公設(1)：$(P \vee P) \to P$

↕

$\sim (P \vee P) \vee P$

$P = 1$ 時，原式 $= \sim (1 \cdot 1) \cdot 1 = 0$

$P = 0$ 時，原式 $= \sim (0 \cdot 0) \cdot 0 = 0$

故無論如何 $(P \vee P) \to P$ 恒具值"0"。

公設(2)：$P \to P \vee Q$

↕

$\sim P \vee (P \vee Q)$

$P = 1$ 時，原式 $= \sim 1 \cdot (1 \cdot Q) = 0$

$P = 0$ 時，原式 $= \sim 0 \cdot (0 \cdot Q) = 0$

故公設(2)亦恒具有值"0"。

公設(3)：$(P \vee Q) \to (Q \vee P)$

↕

$\sim (P \vee Q) \vee (Q \vee P)$

$P = 0$ 時，原式 $= \sim (0 \cdot Q) \cdot (Q \cdot 0) = 0$

$P = 1$ 時 $Q = 1$ 時 $\sim (1 \cdot 1) \cdot 1 \cdot 1 = 0$

$Q = 0$ 時 $\sim (1 \cdot 0) \cdot (0 \cdot 1) = 0$

故公設(3)恒具"0"值。

公設(4)：$[P\vee(Q\vee R)]\rightarrow[Q\vee(P\vee R)]$

$\updownarrow$

$\sim[P\vee(Q\vee R)]\vee[Q\vee(P\vee R)]$

$P=0$時，原式$=\sim(0\cdot Q\cdot R)\cdot(Q\cdot 0\cdot R)=0$

$P=1$時

$Q=0$時原式$=\sim(1\cdot 0\cdot R)\cdot(0\cdot 1\cdot R)=0$

$Q=1$時

$R=0$時，原式$=\sim(1\cdot 1\cdot 0)\cdot(1\cdot 1\cdot 0)=0$

$R=1$時，原式$=\sim(1\cdot 1\cdot 1)\cdot(1\cdot 1\cdot 1)=0$

故公設(4)亦恒具"0"值。

公設(5)：$(Q\rightarrow R)\rightarrow[(P\vee Q)\rightarrow(P\vee R)]$

$\downarrow$

$\sim(\sim Q\vee R)\vee\sim(P\vee Q)\vee(P\vee R)$

1. $R=0$時，原式一定恒爲0。
2. $R=1$時，分

(2)$P=1$時

$Q=0$時，原式$=\sim(\sim 0\cdot 1)\cdots\cdots=0$

$Q=1$時，原式$=\sim(\sim 1\cdot 1)\cdot\sim(1\cdot 1)\cdot(1\cdot 1)=0$

故公設(5)亦恒具值"0"。

所有的公設都是"0"值，那麼經過推演規則得到的新敍述呢？第一，如果一個公設經過代換規則，很顯然的它絕不會從0變爲1，我們只須觀察怎樣證明公設均具0的步驟即可。第二，如果從分離規則來看，已知的眞敍述P和"$P\rightarrow Q$"，其中P必具0值，故$P\rightarrow Q$可寫成$\sim 0\cdot Q$亦即$1\cdot Q$，但$P\rightarrow Q$亦具0值，故$1\cdot Q=0$，在二進位乘法中解此方程式得Q亦具0值。由以上證明得知，所有從這組公設推演出的敍述均具0值，絕不會有P和$\sim P$同時可被推演的可能，故這組公設是一致的。

(B)完備性的證明：

假定K是一個眞敍述，但不能從公設(1)—(5)及兩個推演規則中導出。設K'是K的第二標準式，如果K'的每一個括號內皆含有$\sim Xi\vee Xi$，顯然的，K'必可由公設(1)—(5)及兩個推演規則中導出，故K'存在一個括號內不含$\sim Xi\vee Xi$，設此括號爲K''。現在我們以P代K''中所有未被否定之變元，而以$\sim P$代替K''中所有已否定的變元，則K''即變成$P\vee P\vee\cdots\cdots\vee P$的型式；$K$爲眞即$K'$爲眞，$K'$爲眞即$K''$爲眞，$P\vee P\vee\cdots\cdots\vee P$爲眞即$P$爲眞。好，現在我們把上面的代換過程改以$P$代換已被否定之變元，$\sim P$代換未被否定之變元，那麼$K$即變成$\sim P\vee\sim P\vee\cdots\cdots\vee\sim P$，$K$爲眞即$K''$爲眞，$K''$爲眞即$P$爲假，這個矛盾的現象使我們相信$P.M.$系統是完備的！

公設的數目能不能再少？*Jean Nicod*於*1917*年首先提出一個僅用*Sheffer stroke*的單一公設系統。這個公設是

$(P/(Q/R))/((T/(T/T))/((S/Q)/((P/S)/(P/S))))$

推演規則也有兩個，代換規則同$P.M.$系統，分離規則改爲，如果P和$P/(Q/R)$皆爲眞敍述，R反亦爲眞。單一公設以後又發現了幾種，但就實用的眼光看來，筆者認爲並不重要，因此就不介紹了。

下面我們列了三十個較常用也易記的恒眞敍述，全部摘自*Kalish*和*Montague*著的*Logic Techniques of Formal Reasoning p.80—p.84*中，這是一本純"實戰"的好書。

(1)$P\leftrightarrow P$

(2)$Q\rightarrow(P\rightarrow Q)$

(3)$P\rightarrow([P\rightarrow Q]\rightarrow Q)$

(4)$P\rightarrow(\sim P\rightarrow Q)$

(5)$\sim P\rightarrow(P\rightarrow Q)$

(6)$(\sim P\rightarrow P)\leftrightarrow P$

(7)$(P\rightarrow\sim P)\leftrightarrow\sim P$

(8)$[P\rightarrow(Q\wedge R)]\leftrightarrow$
$[(P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)]$

(9)$(P\rightarrow Q)\rightarrow$
$[(R\wedge P)\rightarrow(R\wedge Q)]$

(10)〔($P \to R$)∧($Q \to S$)〕→
〔($P \wedge Q$)→($R \wedge S$)〕
(11)$P \leftrightarrow P \vee P$，$P \leftrightarrow P \wedge P$
(12)($P \to Q$)↔($\sim Q \to \sim P$)
(13)$\sim$($P \wedge Q$)↔$\sim P \vee \sim Q$
(14)$\sim$($P \vee Q$)↔$\sim P \wedge \sim Q$
(15)($P \leftrightarrow Q$)↔($\sim P \leftrightarrow \sim Q$)
(16)($P \to$〔$Q \to R$〕)↔
(〔$P \to Q$〕→〔$P \to R$〕)
(17)〔$P \to$($P \to Q$)〕↔($P \to Q$)
(18)($Q \leftrightarrow S$)→〔($P \leftrightarrow Q$)↔($P \leftrightarrow S$)〕
(19)($P \leftrightarrow Q$)↔(〔$P \leftrightarrow R$〕↔〔$Q \leftrightarrow R$〕)
(20)($P \wedge Q$)→($P \leftrightarrow Q$)
(21)($P \leftrightarrow Q$)∨($P \leftrightarrow \sim Q$)
(22)($P \to Q$)∨($Q \to R$)
(23)$P \wedge$($Q \vee R$)↔($P \wedge Q$)∨($P \wedge R$)
(24)$P \vee$($Q \wedge R$)↔($P \vee Q$)∧($P \vee R$)
(25)$\sim$($P \to Q$)↔($P \wedge \sim Q$)
(26)〔($P \to Q$)∧($Q \to R$)〕→($P \to R$)
(27)〔($P \to Q$)∧($P \to \sim Q$)〕↔$\sim P$
(28)〔($P \to Q$)∧P〕→Q
(29)〔($P \leftrightarrow Q$)∧P〕→Q
(30)〔$Q \leftrightarrow S$〕→〔($P \wedge Q$)↔($P \wedge S$)〕，
〔$Q \leftrightarrow S$〕→〔($P \vee Q$)↔($P \vee S$)〕

五種紙上談兵的方法都介紹完了，現在就開始動動腦筋叫機器來代勞，我們的目的是設計一個自動化的打眞值表機。

提到電腦，不禁想到一個"危言聳聽"的預言，據說有一天人類因電腦發展迅速，已經製成功一個可以造電腦的電腦。它分成二部份，第一部份稱作"父電腦"，可以打"製造某電腦"的命令，立即輸入第二部分，第二部分稱作"母電腦"可以接到命令後立即趕工完成。好啦，現在人類只須造一個父電腦和一個母電腦，那麼它們就能一代一代傳下去，眞不堪設想！好在電腦目前的能力範圍尙有限，對於一定步驟的死東西如計算，下西洋棋等眞是拿手的很，但像認手寫的字或咱家的中文則能力比人差得很遠。

x	y	$x+y$	$x \cdot y$	x'
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0

(一)

x	y	$f(x,y)$
0	0	a_1
0	1	a_2
1	0	a_3
1	1	a_4

(二)

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

(三)$f(x,y)$
$=x'y'+xy'$

x	y	$f(x,y)$
0	0	? 1
0	1	? 1
1	0	? 0
1	1	? 1

(四)$f(x,y)$
$=x'y'+x'y+xy$

在布氏代數裏，普通以"1"表"眞"，"0"表假，"+"表"或"，"·"表"且"。表(一)說明xy, $x+y$和x'所具的意義。例如$1'=0$, $0'=1$, $1\cdot 0=0$, $1+0=1$……等。

用記號"·"組合x,x',y,y'所構成的式子，稱爲含x，y之單項式。用"+"把數個含x，y之單項式連接所構成的式子，稱爲含x，y之多項式。例如：$x'y$，x，xy'爲單項式，$xy+x'y$爲多項式，普通以$f(x,y)$表含x，y之多項式。

表(二)中若有某一$a_i=1$則xy，xy'，$x'y$，$x'y'$四單項式中，恰有一式爲"1"，其他各式均爲"0"，例如當$a_1=1$，則$x=y=0$，得$x'y'=1$，$x'y=xy'=xy=0$；反之若xy, xy', $x'y$, $x'y'$四式中有一式之值爲1，則其他三式之值爲"0"。例如當$x'y=1$，則僅當$x=0$，$y=1$時$x'y=1$，其他xy', xy, $x'y'$均爲"0"，因此我們若已知a_1, a_2, a_3, a_4四數，便可決定$f(x,y)$。首先觀察諸a_i中爲"1"之數，分別寫出其所對應xy, xy', $x'y$, $x'y'$四式中其値爲"1"之式，再用"+"將這些式連結起來即得。例如表(三)中$a_1=1$, $a_3=1$得$x'y'$, xy'二單項式，因此$f(x,y)=x'y'+xy'$，可證明如下：

$f(0,0)=0'0'+0\cdot 0'=1=a_1$
$f(0,1)=0'1'+0\cdot 1'=0=a_2$
$f(1,0)=1'0'+1\cdot 0'=1=a_3$
$f(1,1)=1'1'+1\cdot 1'=0=a_4$

假如若已知一含x，y之多項式$f(x,y)$，我們也可以很容易的塡出表格。例如$f(x,y)=x'y'+x'y+xy$，則$f(0,0)=1$（因$x'y'$在$f(x,y)$中出現）$f(0,1)=1$，$f(1,1)=1$，$f(1,0)=0$，得$a_1=a_2=a_4=1$，$a_3=0$然後塡入表(四)。（參看第一標準式）

表(二)中我們可用另一種方法決定$f(x,y)$。若$a_i=0$則$x+y$, $x+y'$, $x'+y$, $x'+y'$四式中恰有一式爲"0"，則其他各式均爲"1"。例如$x+y'=0$，僅當$x=0$，$y=1$時成立，其他$x+y$，$x'+y$，$x'+y'$均爲"1"，因此我們若已知a_1, a_2, a_3, a_4便可決定$f(x,y)$。首先觀察a_i中爲"0"之數，分別寫出其所對應$x+y$，$x+y'$，$x'+y$，$x'+y'$四式中爲

"0"之式，再用"·"號連結即可。例如在表(三)中 $f(x,y)=(x+y')(x'+y')$。反之若已知 $f(x,y)=(x+y')(x'+y')$，可得知 $a_2=a_4=0$，$a_1=a_3=$"1"。（參看第二標準式）

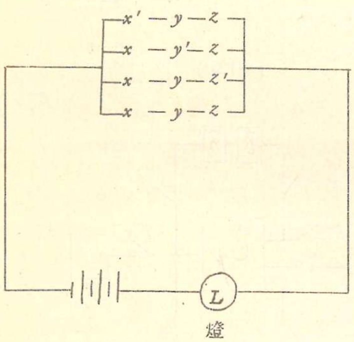
上述之討論可推廣到 n 個變元 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$。例如當 $n=3$ 時，$f(x,y,z)=x'y'z'+xyz+xyz'+xyz$，則得 $f(0,0,0)=f(0,1,1)=f(1,1,0)=f(1,1,1)=1$，其他 $f(x,y,z)=0$ 而列表(五)。並且由表(五)可得到 $f(x,y,z)=(x+y+z')(x+y'+z)(x'+y+z)(x'+y+z')$。

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

(五)

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

(六)



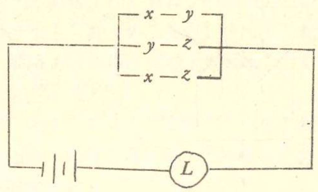
(七)

利用上原原理，我們可設計一些簡單的電路，例如投票機的設置。假設有甲、乙、丙三個人投票，我們希望設計一個電路，使得有二票以上贊成時就會亮燈顯示。對於這種機器的設置只要取幾組開關 x, x', y, y', z, z'（x開時，x'爲閉）。以"0"表開，"1"表閉，由甲、乙、丙三人各控制開關 x，y，z 我們可先列表(六)，（表六）中每一橫列若有二個爲"1"，則 $f(x,y,z)=1$，否則爲"0"。再由表(六)得到 $f(x,y,z)=x'yz+xy'z+xyz'+xyz$。進而設計電路(七)，我們可以開關的串聯表"·"，以開關並聯表"+"，例如一x'—y—z— 線路中，若要通路則 $x'=y=z=1$ 方可（x開，y閉，z閉），但對於 x'—y—z，—x—y'—z，—x—y—z'—，—x—y—z 一四路中，只要有一通路，則整個線路即通，若線路爲通路則亮燈，否則不亮，因此議案的通過與否，端看電燈的明亮。

註：上述的電路並非最簡，爲了節省起見，我們可利用布氏代數化簡。

$$
\begin{aligned}
& x'yz+xy'z+xyz'+xyz \\
=& (x'yz+xyz)+(xy'z+xyz)+(xyz'+xyz) \\
=& (x'+x)yz+(y'+y)xz+(z'+z)xy \\
=& yz+xz+xy
\end{aligned}
$$

所以 $f(x,y,z)=xz+yz+xz$ 因此線路(七)可簡化爲電路(八)。



(八)

我們也可以用上述原理化簡任一邏輯式，決定變元的條件使式子爲眞或假。例如"$x\to y$"可得表(九)，因而"$x\to y$"="$x'+y$"；"$x\leftrightarrow y$"可得表(十)，由表(十)知 $f(x,y)=x'y'+xy$，因此 $f(x,y,z)=(x\wedge y)\leftrightarrow z$ 可化簡如下：

$$
\begin{aligned}
& (x\wedge y)\leftrightarrow z \\
=& (xy)'z'+xyz \quad (x\leftrightarrow y=x'y'+xy) \\
=& (x'+y')z'+xyz \quad ((xy)'=x'+y') \\
=& x'z'+y'z'+xyz \quad (\text{"·"對"+"分配}) \\
=& (x'yz'+x'y'z')+(xy'z'+x'y'z')+xyz \\
& (x'z'=x'z'(y+y')=x'yz'+x'y'z') \\
=& x'yz'+xy'z'+x'y'z'+xyz
\end{aligned}
$$

因此得 $f(0,1,0)=f(1,0,0)=f(0,0,0)=f(1,1,1)=1$，其他 $f(xyz)=0$，而得表（十一）。

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

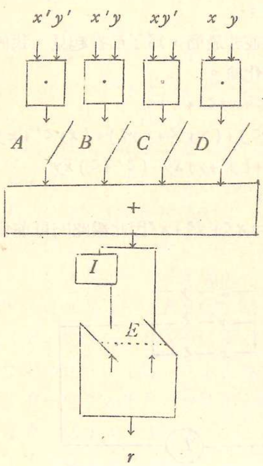
(九) $x'+y$

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(十) $x'y'+xy$

x	y	z	$f(x,y,z)$	x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1

（十一） $x'y'z'+xy'z'+x'yz'+xyz$

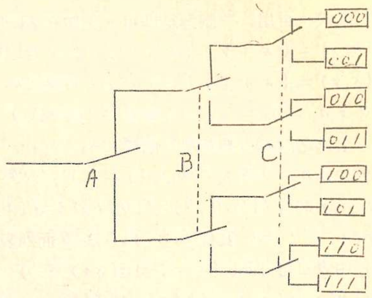


（十二） C_{16}

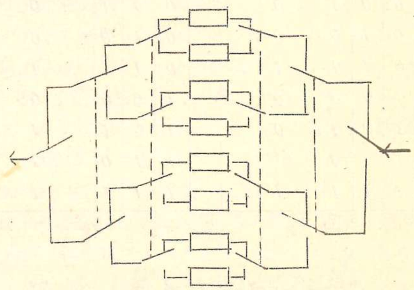
所有含 x，y 之多項式共有 $2^4=16$ 個，因每一"a_i" 不是 "0"就是 "1"，共有兩種可能。欲填 $a_1a_2a_3a_4$ 共有 $2\times2\times2\times2=16$ 種可能，即有16種表(二)。我們想利用上述原理，設計一種機器，同時能操作這16種運算，進而設計一組機器把任何邏輯式的眞值表打出來。電路（十二）中 $ABCDE$ 各表示開關，當開關線路上電壓爲負時，開關靜止不動，當線路上的電壓爲正時，開關的方向立即改變。我們以 "1" 表正壓，"0"表負壓，而以$\boxed{+}$表"+"，以$\boxed{\cdot}$表"·"，$\boxed{之}$爲反相器，正壓入$\boxed{1}$變爲負壓，負壓入$\boxed{1}$變爲正壓。而輸入 x，y 爲正壓或負壓，經 r 輸出亦爲正壓或負壓。例如當 $ABCD=0001$，$E=0$時，電路（十二）表示 xy（即 $a_1=a_2=a_3=0,a_4=1$）又如 $ABCD=0101$，$E=0$時，電路（十二）

$=0101$，$E=0$時，電路（十二）表示 $xy+x'y$（即 $a_1=a_3=0,a_2=a_4=1$）。因此（十二）對應這十六種運算。爲方便計，以 $ABCD$ 表示所對應的運算，而以 0000 表示 $ABCDE=11111$（即 $a_1=a_2=a_3=a_4=0$），以C_{16} 表（十二）。

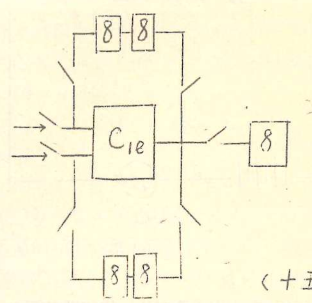
圖（十三）所示者爲"數"的儲存器，例如當



（十三） $\boxed{8}$



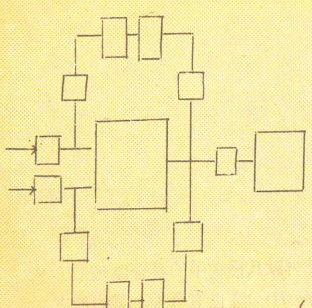
（十四） $\boxed{8}$-$\boxed{8}$



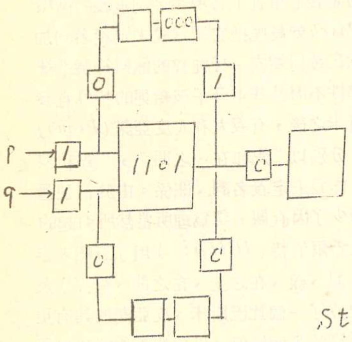
（十五）

$ABC=001$ 即 AB開關不動，C開關方向改變，因此線路通到 001 的儲存地點，並且我們可使每一通電後的儲存地點永久保有電流。爲方便計，把（十三）記爲$\boxed{8}$。圖（十四）爲兩個$\boxed{8}$串連，共有六組開關控制輸入輸出，記爲$\boxed{8}$—$\boxed{8}$。

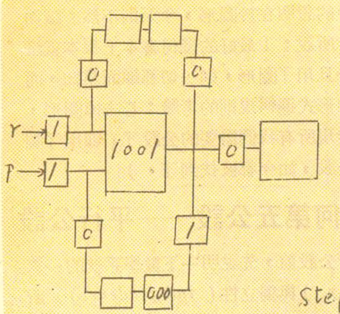
圖（十五）爲一簡單的邏輯列表機，當變元 pgr 等由（十五）的左端輸入時，同時引動開關，最後由右邊的$\boxed{8}$顯示。圖（十六）所示爲（十五）所對應的



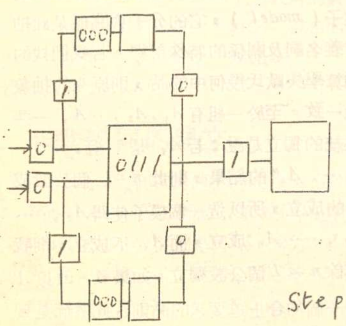
（十六）



Step 1



Step 2



Step 3

開關。例如我們想把（$p\to q$）∧（$r\leftrightarrow p$）的眞值表列出，第一步先操作$p\to q$然後放入儲存的地點即圖上的p，q進入C_{16}經"→"運算（1101）後，儲到上邊到$\boxed{8}$—$\boxed{8}$的000處去。

第二步：操作$r\leftrightarrow p$然後放入儲存地點。圖上的r，p進入中間的C_{16}經"↔"運算（1001）儲入下邊$\boxed{8}$—$\boxed{8}$的000去。

第三步：操作（$p\to q$）∧（$r\leftrightarrow p$）。由上邊$\boxed{8}$—$\boxed{8}$的000把"$p\to q$"的資料送出，由下邊$\boxed{8}$—$\boxed{8}$的000把"$r\leftrightarrow p$"的資料送出，再進入C_{16}，經"∧"運算（0111）後送入右邊$\boxed{8}$的某一儲存地點。

上面的三個步驟須重複8次，即$p\ q\ r$由000變到111，而右邊的儲存地點也由000變到111。例和$p=r=0$，$q=1$（即p爲負壓，q爲正壓，r負壓）經（十五）的裝置分三步：

第一步："$p\to q$"變成"$0\to 1$"然後得出"1"（通略，因此乃爲正壓），再將"1"儲入上面$\boxed{8}$—$\boxed{8}$的000。

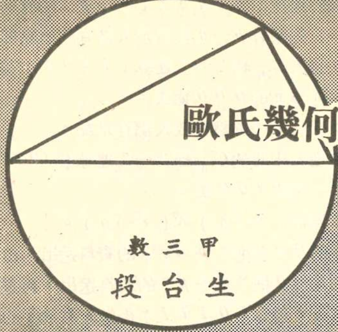
第二步："$r\leftrightarrow p$"變成"$0\leftrightarrow 0$"然後得出"1"（通略，因此乃爲正壓），再將"1"儲入下面$\boxed{8}$—$\boxed{8}$的000。

第三步：（$p\to q$）∧（$r\leftrightarrow p$）變成"$1\wedge 1$"，然後得出1（正壓），再將"1"送到右邊的$\boxed{8}$的000，亮出燈來，其他$p\ q\ r$的各種情況可仿照上述步驟行之。因此我們想操作任一邏輯式，首先先寫程式計劃（上述的三步驟），然後再送入（十五）列出眞值表來，最後再看最右邊$\boxed{8}$的8個儲存地點，即可看出其眞值表來。例如上述的結果爲表（十七）

p	q	r	$\boxed{8}$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

（十七）

上面設計的電腦已是足夠應付任何複雜的敍述，不過它的缺點是程式打表較繁，因此連帶影響到速度與正確（據統計，電腦的錯誤十之八九都是由程式打表的不小心而造成）。因此怎樣使上面這部電腦能直接分析敍述的程序，仍待改良。（全文完）



歐氏幾何與非歐幾何

數三甲
段台生

一、從歐幾里得(Euclid)的幾何原本(Elements)說起

歐幾里得大約生於西元前三百年，他寫了一本被後人認爲是數學思想及組織史的里程碑的書——幾何原本。兩千年來它主宰着幾何教學，自西元 *1482* 年；它的第一本印刷版問世於威尼斯以來，已經有千餘版出現了，可說在西方世界中，除聖經以外，第一本最流行的書。我們從初中起就學了歐氏幾何，它怎麼說我們就怎麼想，可說從未懷疑過它的眞實性；然而事實上它却有如下的四個邏輯上的缺點：
（ *cf.*〔*B*〕*P.43 - 47*；）

(一)平面作圖時，在一定線段上作一等邊三角形的作法，是分別以此線段的兩端點爲圓心，以此線段長爲半徑畫圓，相交兩點於此線段所在直線的兩側，再將此二點分別連接原線段的兩端點而成兩等邊三角形。現在的問題是：歐氏幾何的公設中並沒有那一條告訴我們此二圓必相交（而且眞的在其他空間，它們可能永不相交。 *cf.*〔*I*〕：*P.92*）歐氏所認爲的此〞顯然〞相交的錯誤，在於他對於圓所知道的比他的公設告訴他的還要多。

(二)歐氏下意識地認爲直線是無限長的，其實他的第二公設只說直線是無界的或無終點的而已。（例如在球上連接任兩點的大圓〞弧〞，可以無終點地任意延長，但其長却有限。）

(三)由於歐氏直覺地認爲直線是無限長，以致於他在證明任一三角形之一外角必大於任一遠內角的定理時也犯了同樣的錯誤。

(四)歐氏對於直線上點的次序和〞在…之間〞的觀念都不能由公設導出，這樣就產生了疏漏（*paradoxes*）概由公設一只知至少存在一線通過兩相異點，而唯一性則未知；此外歐氏幾何中的疊合原理（*principle of superposition*）也有令人非議的地方。

以上所說乃歐氏幾何的缺點。歐氏對點、線、面等都給以明確的定義（事實上必導至名詞定義的循環），而巴斯卡 *Pasch* 就乾脆把它們當成未定義名詞加以接受，並把歐氏幾何變成一種純粹的邏輯符號系統，所以它的眞確性不因其基本分子被給與的特殊意義而改變。在巴斯卡之後，有義大利人皮亞諾（*Peano*）和皮里（*Pieri*）分別以〞點和在…之間〞，〞點和變換（*motion*）〞作爲未定義名詞、關係。由於符號邏輯化的結果，減少了因直觀，認爲理所當然所引起的錯誤。此後德人希爾伯特（*Hilbert*）用了五個未定義名詞、關係（點、線、在之上、在之間、全等）及十五個公設，建立了一個比巴斯卡、皮亞諾的具有更高純度的假設演繹的平面幾何。以前的哲學家和數學家都認爲幾何中的證明在於圖形，今天則不然。誠如羅素（*Russel*）所說：「最好的幾何書本上根本就沒有圖形。」蓋一旦用了圖形，則一切都顯而易知，而不必經由嚴格的形式邏輯規則的考驗；若去掉圖形，那麼我們就會發現所有我們需要的公設了（卽用了圖形時所遺漏的公設，如今都被找到了。）

二、歐氏幾何第五公設——平行公設

在未說平行公設前，先說明一下數學系統的一致性（*consistency*）與獨立性（*independence*）。所謂一個系統的絕對地一致，是指能在自然世界中找到一個特殊的模子（*model*），它的分子與關係是此抽象系統的未定義名詞及關係的特殊解釋。若我們找的模子是在普通算學與歐氏幾何中的話，則原來的抽象系統叫相對地一致。至於一組有 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 一共 n 個公設的系統的獨立是說：若 A_i 是〞$A_1, \cdots, A_{i-1}, A_{i+1}, \cdots, A_n$〞的結果，則此 $n-1$ 個公設成立必導至 A_i 的成立，所以造一個模子使得 $A_1, \cdots\cdots A_{i-1}, A_{i+1}, \cdots\cdots A_n$ 成立，而 A_i 不成立，則我們說 A_i 和其餘 $n-1$ 個公設獨立。如果 A_i 改以 A_1 到 A_n 之任何一個均合上述要求的話則說此系統是獨

立的（ *cf.*〔F〕.P.13～22）

讓我們回到平行公設吧！歐氏平行公設是說，在一平面上，過一不在已知線上的一已知點，只可畫一直線平行於已知直線。這公設的形式竟有九種之多。爲什麼這個公設這麼受人重視呢？原來這些人一直以爲平行公設可由其他公設引導而得，然而他們都失敗了。他們不是像歐氏一樣犯了顯然的錯誤，就是在證明過程中用了和平行公設相等的公設，如任兩平行線間距離有限，…等。不過因爲他們努力研究的結果，使得非歐幾何有了萌芽的機會。如義大利人 *Saccheri* ，*Lambert* ，法國人 *Legendre* 等都做了鋪路的工作。他們用的是歸謬證法（ *reductio ad absurdum*）——包括矛盾律（ S 與非 S 不能同時成立）和排中律（ S 與非 S 至少有一成立）在歐氏幾何中前二十八個命題都未用到平行公設，所以在非歐氏幾何中此二十八命題仍成立。*Saccheri* 的工作，一共給了我們十三個命題，我們拿其中一個來討論。如圖一，四邊形 $AC=BD$ ，角 A 和角 B 都是直角。*Saccheri* 證明角 C 和角 D 相等，它們或是銳角（ CD 往下凹），或是直角，或是鈍角（ CD 往上凸）。若是角 C 和角 D 是銳角，則所有的這種四邊形也都是如此，依此類推。（其實上述三種情形分別就是 *Lobachevsky* 的雙曲幾何

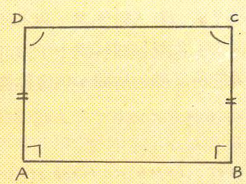


圖1

，歐氏幾何，*Riemann* 的橢圓幾何。）眼看 *Sacch-eri* 就要發明非歐幾何了，可惜他竟然不自禁地用了"無限"的錯誤概念去證明上述鈍角的假設是矛盾的，不但如此，他還照樣去"打擊"銳角的假設，至喪失了"非歐幾何之創始者"的頭銜！

（ *cf.*〔B〕.P.65 ）

三、非歐幾何的建立

兩千年來，人們囿於傳統的成見，相信歐氏幾何是世間唯一眞理，而其他相反的體系都是不對的。今天我們知道這三種幾何都是同樣一致的。（ *cf.*〔B〕P.105 ）。在歐氏幾何中平面上過線外一點可作一線不與已知線相交（即平行方已知線），在雙曲幾何中過一點可作無限多條線不和已知線相交（不相交不一定平行，事實上在這無限多條線中只有兩條和已知線平行）。在橢圓幾何中過線外一點根本沒有線和已知線平行（即任兩線必相交。）以上只是大略說明而已，下面還要詳細說明雙曲幾何與橢圓幾何這兩種非歐幾何。

1. 雙曲幾何：

首先說到高斯（ *Gauss* ，德人），他是最先期待非歐幾何的人，雖然他未公開發表任何有關非歐幾何的文章，但他鼓勵其他的人作類似的探討，他也是最先把這種新幾何命名爲"非歐"的人。之後又有匈牙利人 *Bolyai* ，俄國人 *Lobachevsky* 等從事於非歐幾何中雙曲幾何部分的工作。

雙曲幾何中，如圖二，若 $\overrightarrow{PA}$ 和 $\overrightarrow{PB}$ 平行線 l ，則過 P 點夾於 $\overrightarrow{PA}$ ，$\overrightarrow{PB}$ 之間的射線必和 l 相交，以外的射線和 l 必不相交。若 $\overrightarrow{PQ}$ 垂直於 l ，則 $\overrightarrow{PQ}$ 分別和 $\overrightarrow{PA}$ ，$\overrightarrow{PB}$ 夾相等的角 α。這個垂直距離和角 α 有關，設我們取的單位長是很好的，則

$\alpha = 2\ \arctan\ e^{-1}$ （ e 是自然對數），

$h = \ln \cot \dfrac{\alpha}{2}$ （ *cf.*〔H〕.P.134～137 ）

雙曲幾何有如下的兩種歐氏模式：

①*Klein's Model* （ *cf.*〔F〕. *Section* 5；〔H〕. P. 194～201 ）

如圖三，$\overrightarrow{PC}$ 和 $\overrightarrow{PD}$ 平行於線 l ，點 C 和 D 在圓上三角形 PQC ，PQD 叫做直角漸近三角形在此

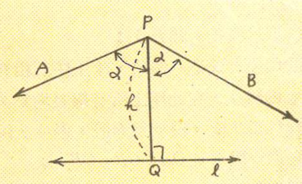


圖2

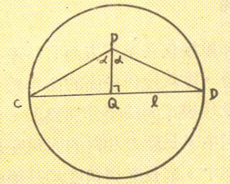


圖3

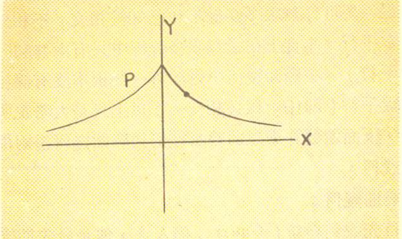


圖4

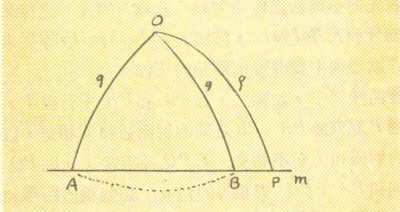


圖5

圓內任一三角形的三角和小於π，其差數與三角形面積成正比。

②如圖四，有一頂點P，一漸近線X軸，一平面曲線 tractrix，將此曲線沿X軸旋轉成一曲面（曲率爲一負常數）（此模式有二缺點：一是它限制成二維幾何，二是被尖銳的邊所分的旋轉面的兩部分中的每一部分只代表非歐面的一部分）（cf〔E〕. P. 93）

2.橢圓幾何及其歐氏模式（圖五）：

橢圓幾何的歐氏模式就是一個球，球上任二相異點決定一大圓（即線），在此球上所有線長均爲$4q$（有限長）設O爲北極，線m爲赤道，過m上任意點所作垂線必過O點，且$OA=OB=OP=q$

設角AOB爲直角的話，則$AB=q$，

又當角$AOP=2\pi$時，OA和OP重合。（此大球曲率爲一正的常數）

四、結　論

歐氏幾何與非歐幾何在某些方面有些差異，如就微分幾何的觀點看，歐氏幾何平面的曲率爲0，而橢圓與雙曲幾何的歐氏模式的曲率分別爲正，負的常數。又如在歐氏幾何中，長度是相對的而角度是絕對的，可是在非歐幾何中，則長度與角度均是絕對的。歐氏幾何三角形三內角和等於π，而橢圓與雙曲幾何之三角形三內角和分別大於、小於π。橢圓幾何的空間曲線是向內的，體積是緩慢的增加—這樣的宇宙是有限的；雙曲幾何空間曲線向外，體積急速增加——這樣的宇宙是無限的；至於歐氏幾何，沒有空間曲線，體積之增加正常（即隨半徑的立方而增加）——這樣的宇宙是無限的。

經過上面的討論，我們對於「歐氏幾何是否最眞的幾何？」這問題該如何回答？當我們把幾何看成是數學的一支時，這問題顯得無意義（歐氏與非歐幾何本身均是一致的）。當我們把幾何當做物理學的一支時，這問題就有意義了。（對物理學家而言，他認爲那種幾何較適用就採用那一種幾何。）潘卡瑞（Poi-ncaré）說：「若雙曲幾何是對的，則很遠處的星視差不爲零，如果橢圓幾何是對的，則視差爲負。」（如歐氏幾何對，則視差爲零。）（cf.〔J〕）高斯（Gauss）曾經測量在哥丁根（Göttingen）附近的三個城市（Inselsberg, Brocken, Hoher Hagen）所形成的三角形三內角和，但無論如何，此內角和和2π之差竟小於觀測所應允的誤差，於是哲學家們就說「歐氏幾何的眞與否不能以經驗的觀察來證明。」說眞的，我們對空間的看法是習慣使然的，相對論學者告訴我們說若我們處於一很强的重力場內，就會感覺到空間的非歐性質。如一三角形之一角，在很强的重力場內，很可能我們會發現這三角形兩邊之和小於第三邊，你相信嗎？假如有人對你說「我不能想像我會感覺到非歐空間！」你就該回答說：「你可以從一個拭亮的圓把手看它所反映的房間，想像你自己生活在其中。」

References :

〔A〕: *Coxeter : Intro. to Geometry*

〔B〕: *Eves and Newsom: The Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*

〔C〕: *Hilbert : Geometry and Imagination*

〔D〕: *Eddington : Space , Time and Gravitation*

〔E〕: *Hermann Weyl : Space , Time ,Matter*

〔F〕: *Wylie : Foundations of Geometry*

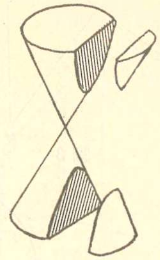
〔G〕: *Borsuk : Foundations of Geometry*

〔H〕: *Stefan Kulczycki : Non-Euclidean Geometry*

〔I〕: *Russel : Mysticism and Logic*

〔J〕: *Poincare : Science and Hypothesis*
（協志叢書有中譯本）

數四乙　王禎玉譯



曲線與曲面的直觀了解

1. 平面曲線

平面曲線是曲線的一種簡單情形。在曲線上取兩點連成一直線，我們稱此直線爲割線，固定其中一點旋轉割線而使得另一交點接近此交點，我們稱割線的極限位置爲一切線，此固定點稱爲切點。(*Fig 1*) 在所有經過切點的直線中，無疑的，切線是曲線的最佳近似，所以我們把切線的方向稱爲曲線在此點的方向。若兩曲線相交，在其交點的兩切線交角爲 α，則謂此二曲線有一交角 α，若 α 爲 0，則稱兩曲線相切於此點，過切點垂直於切線的直線稱爲法線。

在曲線上任何一點，切線和法線構成一個直角座標系。這個特殊的座標系有助於我們對曲線在此點性質的了解。假定我們選定了曲線上動點的方向，然後把這個座標系的四個象限規定如下：把向着這定點接近的隣近動點劃入第一象限，切線作爲一二象限和三四象限的界線 (相當於平面直角座標系中之 x 軸)，法線作爲一四象限與二三象限的界線 (相當於 y 軸)，這樣劃分之後，我們把點依照它們運動的情形分爲四類 (*Fig 2*) 第一種情形叫做正規點，其他各種情形叫做奇異點，其中第二種叫做映射點，第三種叫做第一類尖點，第四種爲第二類尖點。我們可以發現此種分法和曲線上動點運動方向的選取無關。

現在我們討論切線方向的變化情形，首先，我們選定曲線上動點的方向，並且在曲線所在的平面上作一單位圓，對曲線上每一點的切線，我們在單位圓上選一半徑與之對應，使得半徑的方向平行於切線，半徑的指向同於切線，這樣一來，曲線上每一點 P 對應於單位圓上一點 Q —即平行於切線的半徑與圓的交點，單位圓上這些 Q 點所成曲線爲原曲線的"切線映像"，很明顯地，曲線在 P 點的法線平行於單位圓在 Q 點的切線。

讓我們看看前面所分的四種點高氏映像的情形，我們將可看出，Ⅰ Ⅲ的情形高氏映像在此點不改變動向，Ⅱ Ⅳ則反之；因此，前四種點可描述如下：

Ⅰ 正規點：曲線上的點與切線映像皆繼續原來的方向。

Ⅱ 映射點：曲線上的點繼續原方向，其映像顚倒原方向。

Ⅲ 第一類尖點：曲線上的點顚倒原方向，其映像保持原方向。

Ⅳ 第二類尖點：曲線上的點與其映像皆顚倒原來的方向。

這樣把點分類並不窮盡所有情形，例如重點，曲線和自己的相交點，孤點，很奇怪的，有些在圖形上看來極簡單的情形，用分析式子表示則顯得相當複雜。

現在我們要介紹曲率，我們將發現它和高氏映像有密切關係。設 p_1, p_2 爲曲線上兩點 (*Fig 3*) ，t_1, t_2 爲兩切線，n_1, n_2 爲法線，n_1, n_2 交於 M，則切

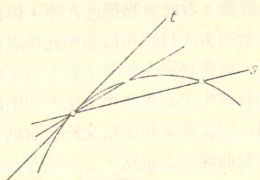


圖 1

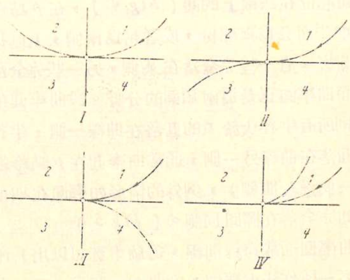


圖 2

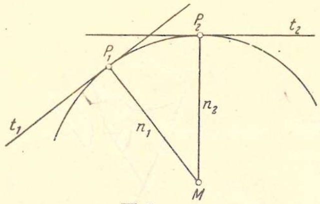


圖 3

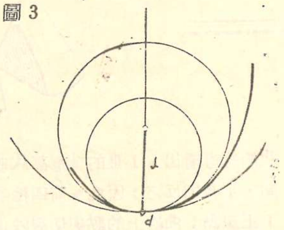


圖 4

線所夾角：$\angle(t_1,t_2)=(n_1,n_2)$，若$p_2$接近$p_1$，則規定$p_1$，則規定$p_1$的曲率如下：

$$\lim_{p_2\to p_1}\frac{\angle(n_1,n_2)}{p_1p_2}=k$$

實際上，K是Mp_1 極限值的倒數，簡單的證明大致如下：

$$k=\lim_{p_1p_2\to 0}\frac{\angle(n_1,n_2)}{p_1p_2}=\lim_{p_1p_2\to 0}\frac{\sin(n_1,n_2)}{p_1\ p_2}$$

$$=\lim_{p_1p_2\to 0}\frac{p_1\ p_2}{Mp_1\cdot p_1p_2}=\lim_{p_1p_1\to 0}\frac{1}{Mp_1}=\frac{1}{r}。$$

這個r值可以用另一個方法獲得：過p_1與其隣近兩點作一個圓，若此兩點接近p時，得此圓一極限位置，用分析的方法我們可以證明此極限圓的圓心恰爲上述M點。此圓稱爲p_1的曲率圓，曲率圓的圓心、半徑分別稱爲曲率中心及曲率半徑。曲率圓是這樣構作的，所以我們說此圓和曲線交於三重點，同樣我們也可說切線交曲線於二重點。

曲率圓亦可求得如下：考慮所有和曲線相切於p點且圓心位在法線上的圓（Fig 4），在p點附近，曲線把平面分爲兩部份，或者稱爲兩側，上述我們考慮的圓裏，有一些完全落在某側，另一些完全落在他側，而曲率圓正是這兩類圓的分野。設曲率圓半徑爲r，則所有半徑大於r的圓落在曲線一側，半徑小於r的圓落在曲線另一側，通常曲率圓在p點跨過曲線（自一側進入他側），例外的情形如橢圓在四頂點的曲率圓完全落在橢圓同側。（Fig 5）

曲率圓通常跨越曲線，這個事實可以用上述曲率圓第一種作法來解釋：設曲線兩側爲A側、B側，曲率圓過p_1,p_2,p_3，當通過p_1時，圓從A側跨入B側，過p_2時，又從B側跨入A側，過p_3時從A側又跨入B側，那麼當$p_1p_2p_3$三點非常接近時，通常圓的此種行爲並不因此改變，把上述三個程序合併起來所得結果是：曲率圓自A側跨入B側，同理，我們可解釋切線通常不跨過曲線的事實。

我們提到過，曲率圓和高氏映像有密切的關係，令Q_1,Q_2爲p_1,p_2的映像，（Fig 6）則

$$\angle(t_1\ t_2)=\angle(Q_1\ Q_2)=Q_1Q_2$$

因而曲率半徑等於p_1p_2與Q_1Q_2弧長比值的極限。

討論到這裏，有一些重要的問題發生，例如：我們是否能把曲率值定義爲弧長的函數？從分析裏我們得到肯定的答案。而且，曲線函數可唯一決定曲線。由於這個函數關係獨立於座標系的選取，我們稱弧長和曲率爲曲線的自然座標，或內稟座標，例如$k=0$時，則此曲線爲一直線，若k爲一不爲0的常數，此曲線爲一圓。

此外，我們可由一曲線得到其他曲線，例如，曲線的曲率中心所成曲線稱爲此曲線的漸屈線，原來曲線稱爲此曲線的漸伸線（譯註一）。

譯註一：此定義爲Struik 書中定義的一段特殊情形，即$\lambda(s)=1/K(s)=r(s)$. Struik：Lectures on Classical Diffecential Geometry. P.39.

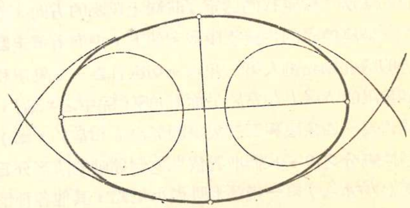


圖 5

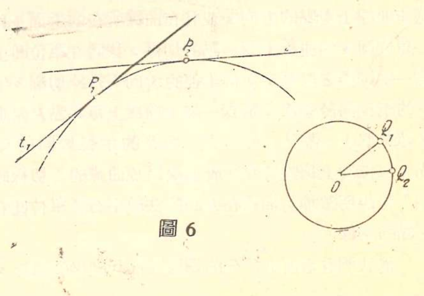


圖 6

2. 空間曲線

前一節關於平面曲線的討論大致可以適用於空間曲線。同樣的，我們定義切線爲割線的極限位置。但切線的垂線却不是唯一的，它構成一平面，稱爲法面。我們試著在曲線上找一個最接近曲線的平面，過切線和鄰近一點作平面，且令鄰近點接近切點，則平面得一極限位置，稱爲密切平面。我們說密切平面交曲線於三重點，因此，一般而言，曲線在此點跨過密切平面。

密切平面包含切線，因而垂直於法面。最後我們把垂直於此二平面的平面稱爲從切平面。這三個平面可視爲座標平面。它對我們所要瞭解的曲線局部性質很有幫助。若把密切（從切）平面上的法線，稱爲主法線（副法線），則我們以切線，主法線，副法線爲座標軸，這個系統稱爲動標三面形。它把空間分爲八個象限，因而，也像前一節的方式把點分爲八類，其中祇有一類是正規點。在正規點上，曲線要穿過法面和密切面，而落在從切面的同側。

現在我們把高氏映像推廣到空間曲線，我們作一單位球，令曲線上每一切線對應於一半徑，則每一切點對應於半徑的末端，即球面上的一點，這樣便把空間曲線移到球面曲線上去了。如果我們以主法線和副法線代替切線，便可得到另二球面曲線，這三個曲線及原曲線間皆有某些簡單的關係存在。例如切線指標和副法線指標可以把曲線上的點分爲上述八類，依照二曲線上的點運動方向，切線指標及副法線指標運動的方向之繼續或顚倒分爲八種可能（參看上節）這樣分類也不是窮盡的。

下面研究空間曲線的曲率，令 $t_1 t_2$ 爲 $p_1 p_2$ 點的切線，則當 p_2 接近 p_1 時 $\angle(t_1 t_2)/p_1 p_2$ 的極限値稱爲曲線的曲率 k（或稱第一曲率）像前一節我們考慮兩法面交線的極限位置，稱爲極軸。極軸位於法面上，平行於副法線。我們稱極軸與主法線的交點爲曲率中心，曲率中心和 p_1 的距離稱爲曲率半徑 r，r 爲 k 的倒數。

曲線上經過三連續點的圓，當三點接近時達到一極限位置，此極限在密切面上，以曲率中心爲圓心，曲率半徑爲半徑，稱爲曲率圓。

把上述求曲率的方法中，切線交角代以密切面的交角（亦即副法線的交角）所得極限位置稱爲扭率 T（或稱第二曲率）。

我們要找到相當於曲率對曲率圓的相關性質，在曲線上找鄰近四點，構成一個球，四點靠近的時候，球的極限位置稱爲密切球，其半徑爲 $\sqrt{r^2+(r^1/T)^2}$（詳細計算參看 p.25 Struik）密切球交密切平面於曲率圓（Fig 7）像前面一樣，我們稱曲率 k 及扭率 T 爲空間曲線的自然座標。

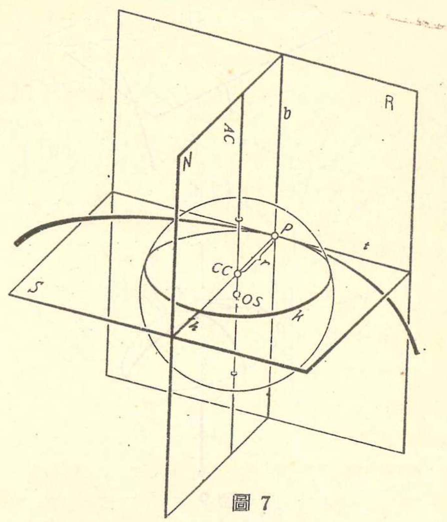


圖 7

3. 曲面的曲率

考慮平滑曲面上一點 P 及曲面上過 P 之所有曲線。很巧地，每一曲線在此點的切線共面，稱爲切面。過曲線上的點存在一切面，則稱此點爲正規點。

過 p 點與切面垂直的線稱法線。任一包含法線的平面交曲面於一曲線，此曲線稱爲一正截曲線。曲面上正規點 p 的正截曲線在 p 點可能爲正規點或映射點。

下一步將要找出曲面的曲率，在曲線的情形下，曲率是曲線上一點切線和曲線上此點鄰部分離程度的指標（譯註二）同樣的，我們現在所感興趣的在於曲面的切面的行爲。如果我們思考實際例子，我們立刻發現兩個主要的不同情形，第一：曲面在某點附近成杯形，第二：曲面在某點附近成馬鞍形。

第一種點的徵定性爲切面不與曲面相交（在我們所考慮的點的鄰近），而落在曲面的同側。因此曲面可置此點於平桌面上。例如球面和橢圓面在每一點都是杯形，此種點稱爲橢圓點。

第二種所謂馬鞍點，例如類似越山道的一曲面（Fig 8）在越山道的最高點，切面是水平的，在 p 點

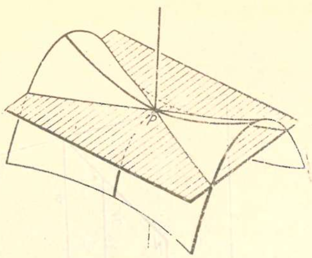


圖 8

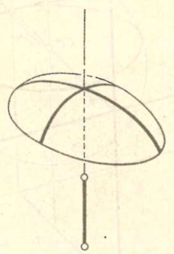


圖 9

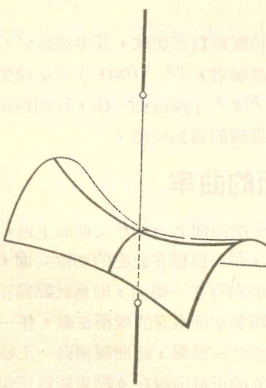


圖 10

左右地面升起，p點的前後地面降落，而p點的切面交曲面於一曲線，此曲線由相交於p點的兩支組成。(換句話說，有兩條水平的通路(過p點)因此不能置此點於桌面。曲面上每一點均爲馬鞍點的例子有單葉雙曲面及雙曲拋物面。馬鞍點又稱雙曲點。

還有一種過渡情形，謂之拋物點，我們將在下一節中詳細討論它。

爲了將曲率以數式表示，我們先考慮p點正截曲線(在p點)的曲率，每一正截曲線在p點的曲率中心均落在曲面(在p點)的法線上，因爲那正是每一正截曲線(在p點)的法線。將過法線的一平面繞法線旋轉，我們得到所有的正截曲線，在旋轉過程中，曲率中心沿著法線上的固定方向移動，這個移動狀況描述曲面在p點的彎曲情形。

在橢圓點(*Fig 9*)的情況下，曲率中心落在法線上曲面的同側，通常曲率半徑隨法面的旋轉而異，對某一正截曲線s_1曲率半徑有一極大值r_1，對另外某一正截曲線s_2曲率半徑有一極小值r_2，r_1、r_2稱爲曲面在p點正規曲率的主半徑，而$k_1=1/r_1$，$k_2=1/r_2$稱爲主曲率，s_1，s_2在p點切線的方向稱爲曲面在p點的主方向，我們可以證明出：在一正規點的兩主方向互相垂直，而任一正截曲線的曲率可由主曲率及正截曲線與主方向的交角決定。

在雙曲點(*Fig10*)曲率中心的範圍並不限於法線上在曲面的某一側，當正截曲線過曲面上兩邊高出來的部分時，曲率中心位於p點上方，當它過曲面上p點兩邊凹下的地方時，曲率中心就落到p點下方來了，在所有使曲率中心位於p點上方的正截曲線中，我們找到一個曲率極大值k_1的正截曲線，當法面旋轉時，曲率漸漸減小，曲率半徑則呈連續性的增加，當法面最後轉到一個水平通道的方向時，曲率值變爲0，曲率半徑則向上方增至無限大，繼續旋轉下去，曲率中心落到下方來，從下方無限遠處上升到一極限位置，於是得到另一極大值k_2，跟橢圓點一樣，我們稱k_1，k_2爲主曲率，稱兩對應正截曲線的切線方向爲主方向。同樣的，兩個主方向互相垂直，而且它們分別爲曲面交切面所成曲線的兩部分所成交角及其補角的分角線，兩部分曲線的方向稱爲曲面在p點的漸近方向。

一般言之，拋物點也存在兩互相垂直的主方向及兩個極限k_1，k_2，而拋物點的徵定性爲，兩個主曲率之中有一爲0，當正截面線變動時，曲率中心沿着法線的一方下來(*Fig11*)。通常在拋物點的情形，對應於主曲率爲0的正截曲線是唯一的。此正截曲線的方向爲主方向之一，同時也是漸近方向。

考慮任一曲面，用分析的方法可以找出曲面上所有使得其上每一點方向都沿着此點的主方向之一的曲線，由此可得曲面上一直交曲線網，亦即，兩組互相垂直的曲線系統，其中每一組蓋住曲面一次，這種曲線叫做曲率線。

還有一種點，上述討論不能適用，原因是：我們的討論基於一個假設：即曲率的值隨正截口改變而改變。但在某些點，任何正截口曲率的值相等，而主方向就無法確定。這種點叫做臍點。曲面上各點均爲臍

點的例子爲一球面，僅有另一個例子是平面。通常，曲面上的臍點都是孤點。曲率線可能在臍點有奇異性，而且也只有在臍點上才能有。

關於曲率線，*Dupin*提出一個著名的定理：考慮兩兩直交的三曲面一在平面或曲面上，給予任何一組曲線，我們可以找到另一組和它們直交，在空間裏呢？任意給予兩組直交的曲面，是否有第三組曲面與兩者直交呢？*Dupin*定理告訴我們，這種猜想是錯的，定理說：三曲面兩兩直交的必要條件是：它們兩兩相交於曲率線，所以，給予二組直交曲面，第三組直交曲面存在的必要條件是：它們相交於曲率線。正好這也是充分條件。依照*Dupin*定理，橢圓面上的曲率線爲它與共焦點的諸單葉雙曲面及雙葉雙曲面相交所成的曲線（*Fig12*）此一曲線網在焦雙曲線上有奇異性，而焦雙曲線的四點實爲橢圓面的臍點。

橢圓面上圍繞臍點的曲率線，情形很像平面上共焦點的橢圓與雙曲線系統。（譯註三）。這種相似不是碰巧而是表示這兩個系統的曲線有內稟關係存在。因爲橢圓面上的曲率線可以由相同於平面上橢圓的畫法而作出，那就是：繩構法（譯註四）：以其中兩個臍點做爲焦點，因而四個臍點便分爲兩組（參看*Fig13 14*），選好一組臍點F_1,F_2後，取一適當長度的細繩，把繩的兩端固定在F_1,F_2上，用鉛筆拉緊它於橢圓面上一點p，移動p點即成一曲率線。由細繩長度的改變可得到所有曲率線。依同法以另一組臍點可作出另一組曲率線。平面上*1*共焦點錐線爲一組橢圓及一組雙曲線，而在橢圓面上，兩組曲率線可視爲橢圓的一般化情形。

在運用繩構法時，細繩本身在橢圓面上形成一種曲線，類似於平面系統上橢圓的焦半徑，正如平面上

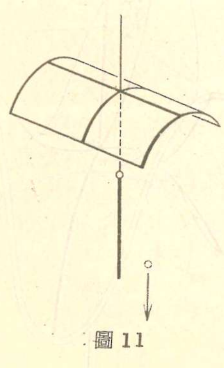


圖 11

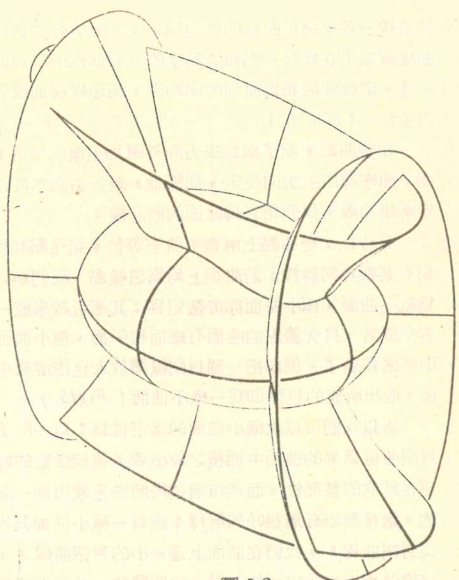


圖 12

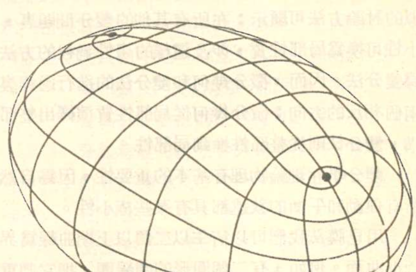


圖 13

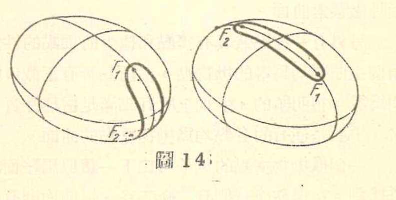


圖 14

的直線一般，這種曲線的徵定性爲：它是所有通過此曲線兩端（在此爲焦點和 p 點）的所有曲線中最短的一條，這種曲線稱爲曲面的測地線，測地線後面還要討論到。（譯註五）

在變曲點，除了兩個主方向外還加上兩個漸近方向，曲率線由主方向決定，同樣地，漸近方向亦可決定兩組曲線，我們稱它爲曲面的漸近線。

有時候，變曲點上兩個主曲率等值，這種點和臍點有某些共同特性；若曲面上均爲這樣點，我們稱之爲極小曲面，極小曲面亦可徵定爲：其漸近線形成一直交網者。只含臍點的曲面有球面和平面，極小曲面則範圍較廣了。例如把一個封閉線圈放入皀泡溶液中後，取出所成的皀膜卽爲一極小曲面（Fig15）。

所以我們可以說極小曲面的徵定性爲：以一所予封閉曲線爲界的曲面中面積之最小者。這樣徵定的好處在於它的整部性，而能和前述局部性定義出同一曲面。這種關聯有着很好的解釋：設有一極小曲面其界爲封閉曲線 s，我們在曲面上選一小的封閉曲線 s，考慮曲面上以 s 爲界的內點，很明顯的，此一小部份曲面亦爲一極小曲面。假如這個小封閉曲線 s 漸漸縮小，我們將期待此種趨近過程可以導出極小曲面的性質。曲面極小性質的徵定問題，叫做變分問題。用類似的討論方法可顯示：在所有其他的變分問題裏，極小性可換爲局部性質，涉及這樣的趨性過程的方法稱爲變分法。因而，微分幾何和變分法的進行過程裏是兩個相反的方向：微分幾何從局部性質演繹出整部結構，變分法則從整部性推到局部性。

變分學在理論物理有基本的重要性，因爲自然中所有運動和平衡的敍述都具有某些極小性。

用皀膜法我們可以衍生以二個以上閉曲線爲界的極小曲面。例如，有二個圓形的閉線圈，把它們重放入皀泡溶液，然後，取出它們並分開但使之保持垂直於其連心線（Fig16），於是連接兩線圈的皀膜很類似雙曲面，由於對稱關係我們期望它是迴轉曲面。證明可顯示我們的猜測是正確的，其經線爲一懸索線，卽一索懸於兩定點由重力作用形成的曲線。因此此曲面叫做懸索曲面。

另外有一種點兼具有臍點和極少曲面點的性質是兩個主曲率均爲零的拋物點，這種點所有正截口曲率均爲零。很明顯的，平面上所有點滿足這種性質。反之，平面是僅有的各點均爲拋物臍點的曲面。

一個孤拋物臍點的例子可由下一類似馬鞍面的構作找到。在馬鞍面我們有二峰二谷，這曲面則有三峰三谷，而且由旋轉 $2\pi/3$ 可得到原曲面（Fig17）。

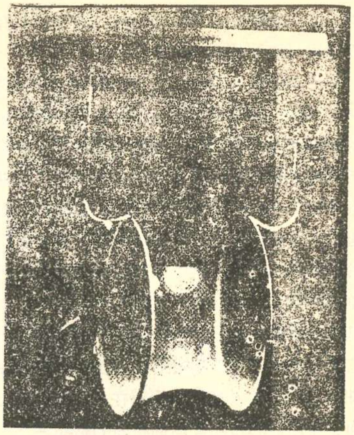


圖 15

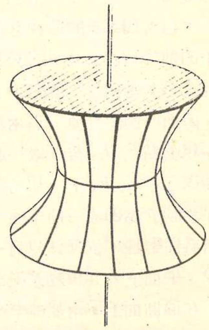


圖 16

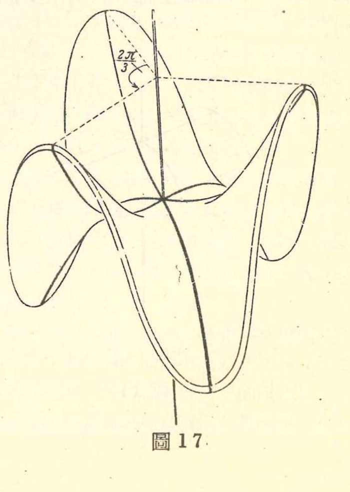


圖 17

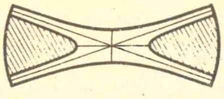


圖 18

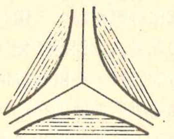


圖 19

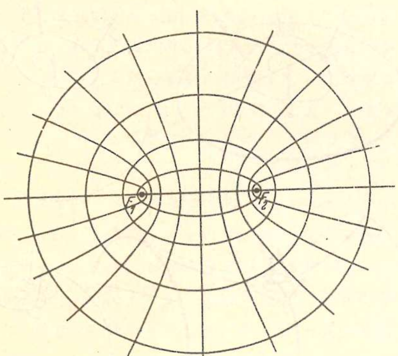


FIG. 7

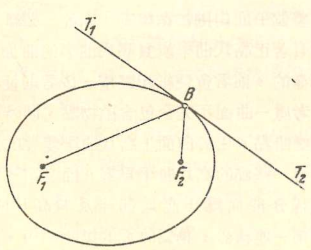


FIG. 2

顯然每一峰面對一谷，因此每一正截曲線上均有同一映射點，在此點每一正截曲線曲率爲零。這個曲面稱爲猴鞍面，因爲供人騎的馬鞍有二個凹處而供猴子騎的鞍需要第三個凹處放它的尾巴。

我們還可以用另一種方法判別橢圓點和雙曲點，順便可驗證它的"橢圓性"及"雙曲性"。我們作一平面平行且接近切面，檢查它和曲面相交的曲線，在橢圓點，只有切面一側的平面和曲面相交，在另一側者則否。如果平行平面與切面距離趨近於零所交於線退化爲一點。但如果距離趨近於零而把曲線適當地放大，我們發現放大後的曲線趨近於橢圓，以切點爲中心，以主方向爲軸，兩軸長的比值等於兩主曲率半徑比值的平方根。

同樣的趨近程序應用在雙曲點切面一側的平行平面時，相交曲線爲一雙曲線，軸的方向和長度比與主方向主曲率的函數關係如上述橢圓點然（*Fig 18*）。在另一側平行平面相交曲線的極限亦爲雙曲線，其軸與漸近線和第一側的相同。在兩種情況下，漸近線的方向與曲面在該點的漸近方向是相等的。在橢圓點及雙曲點如此構作的橢圓或共軛雙曲線被稱爲*Dupin*指標。在拋物點同樣的過程可產生不同類型的曲線，在臍點的*Dupin*指標爲圓，如在球面或橢圓面上之易證然。在猴鞍面*Dupin*指標的圖形如*Fig 19*。

譯註二：因爲曲率是一點上切線與"隣近一切線"交角和弧長的比值極限，而所謂"隣近一切線"實爲此點曲線的最佳線性近似，故兩切線的分離程度可說是切線和曲線的分離程度。

譯註三：如圖諸橢圓及雙曲線均共焦點，且互相垂直。

譯註四：繩構法的平面上畫橢圓的一種方法，如圖將鉛筆尖置於B點，細繩兩端繞B點固定於F_1 F_2兩點，移動筆尖則得橢圓。

譯註五：見"表面上之移動一短程學"一文。

4. 球面映像及高氏曲率

到此我們僅定了曲面的曲率以兩個數值即主曲率。高斯始創表曲面上曲率爲一數的方法，類似於我在曲線中所用的。此一數當然與主曲率的值相關。

自單位球的球心做平行於法線的半徑，在曲面上一點我們任選法線的一個指向並繼續同一選擇至曲面上隣近點，於是得到各法線固定的指向。在球上對應半徑選相同的指向，於是將曲面上一點對應球面上一點——即半徑的端點，於是我們把曲面映至球面，這個過程由高斯提出，稱爲曲面的球面表示。

在曲面的球面表示上，球面上一點對應於曲面上

數點若且唯若曲面上存在數個平行法線有同一指向。直觀上很明顯地，在橢圓點及雙曲點的鄰域沒有二個平行的法線存在，所以在這樣鄰域的球面對應是一對一的。

曲面上任一曲線 k 可表爲球面上一曲線 k'，所 k 所圍的面積爲 F，k'所圍面積爲 G，把 k 縮小至 p 點時，數值 $K=\lim\limits_{F\to 0} G/F$ 稱爲曲面在 p 點的高氏曲率（或全曲率或第二曲率）。

高氏曲率的重要性在它對於任何彎曲的不變性。彎曲是一種保持曲面上所有曲線弧長和角的變形。我們可用以紙或錫箔等近乎不可伸張的材料製成的曲面來解釋彎曲。高氏曲率既爲彎曲下的不變量，必定和曲面上只賴曲線弧長和曲線交角而定的性質有密切的關聯。因此高氏曲率和其高維推廣在相對論裏很重要，因爲相對論所論及的只是高維曲線族的內稟性質。

由於高氏曲率的定義主要用及曲面在空間的位置，它能爲彎曲的不變性就值得驚奇了，下面的討論揭示了它之爲眞的理由。假定有數個由剛性物質製成的平面三角板放在一起使任二相鄰板可繞著公共邊互相旋轉。如圖 20 有四個三角形 a,b,c,d 的裝置，只要公共邊數超過三個，由此構成的角形曲面在形狀上可以作改變，所有可能的改變保持曲面上任意曲線的弧長及角度不變，故可視爲彎曲。在角形的各面上做法線（l,m,n等），選定向外指向，於是得到角形上諸點的球面映像。爲把它作成曲面的球面表示，我們連接面上各點（l',m',n' 等）成一球面多邊形（以球面的大圓之弧），則此球面多邊形在彎曲下面積不變。此事實異常接近高斯曲率的在彎曲下保持不變。

球面三角形的基本定理證實我們的猜測，球面三角形或任何球面多邊形的面積依內角和決定。因此我們現在所要證明的是上述球面多邊形內角在彎曲下不改變。從Fig20 很明顯地各個角爲角形相鄰面所夾角的補角，而這些夾角，我們假定是不變的。

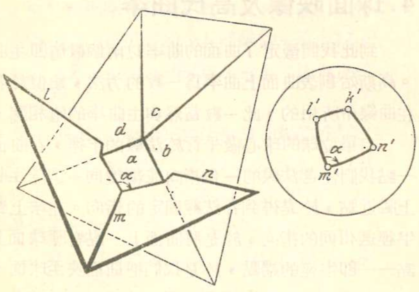


圖 20

如果只考慮任何凸曲面，上述高氏不變性的討論再加上一個極限過程即可完備。準備這樣的過程我們把曲面分爲 n 個三角面，成爲一個內接多邊形以求曲面面積的近似值，然後應用上述討論即成。

讓我們來看看曲面上的點如何以球面表示及高氏曲率區分成橢圓點、雙曲點、拋物點。如果我們沿著曲面上一小封閉曲線繞一橢圓點而運動，它的球面映像——假定此曲線無重點——像仍是無重點的封閉曲線，而曲線的運動方向保持不變。雙曲點亦保持封閉曲線但却反方向而行，在解析幾何習慣上把此種方向的變化定爲曲線所圍曲域面積的同號或異號。依此便計，我們稱曲面上凸部的高氏曲率爲正，凹部的高氏曲率爲負。這符合用二主曲率表高氏曲率的正負符號，因爲在凸點兩個主曲率中心落在法線的同側，而凹點則在異側。（Fig 21,22 ）。

拋物點爲一介於橢圓點及雙曲點之間的角色，我們自然猜測拋物點的高氏曲率爲零，由前面拋物點的定義即可證明，因爲其中一主曲率爲零。

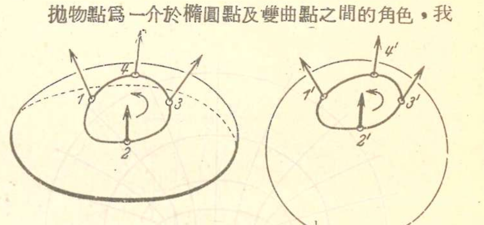


圖 21

圖 22

整個平面由拋物點組成，因此一張紙片絕不可能捲成有著正高氏曲率或負高氏曲率的曲面，這確實是很明確的，前者會使紙起皺摺，後者則使紙撕裂。

考慮一曲面不完全包含拋物點，同時也包含橢圓點和雙曲點。由於曲面上高氏曲率變化的連續性，曲面應有一些點的高氏曲率爲零。而且這些點形成一連續曲線分曲面爲正高氏曲率及負高氏曲率的兩區域。這一連續線，稱爲曲面的拋物曲線，當然拋物曲線的出現只有在正高氏曲率和負高氏曲率並存的的曲面上爲必然。到目前我們所學的曲面均無此情形。在

圖 23

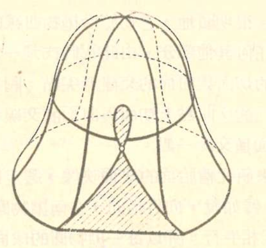


圖 24

任何二階曲面，曲率不是到處為正就是到處為零。在極小曲面上，曲率則是到處非正。

現在我們舉些有拋物曲線的例子，並檢查它們的球面映像。有一個特別簡單的例子是鐘形曲面。此曲面由一具一反射點的平面曲線繞平面上一線所成（*Fig 23*）。讓我們定此軸為垂直軸，在圖 23 中曲線上反射點以上的部份環繞生成橢圓點所成曲面，反射點以下部份環繞生成雙曲點所成曲面，而反射點則環繞成鐘形曲面的拋物曲線——緯線圓。另一方面，我們可從切面的行為來區別這三種點。在雙曲點，切面交鐘形曲面成一 l 形曲線，其重點在切點上（*Fig 24*）。當切點自下方接近拋物曲線，l 形曲線的封閉部份變得愈小，而重點處的夾角變得愈發尖銳，最後當切點落在拋物曲線上時，封閉部份緊縮成一點，曲線在切點處成一尖點，若切點繼續移動到曲面的橢圓部份，交線變成一孤點和曲面雙曲部份上一具連續曲率的曲線。

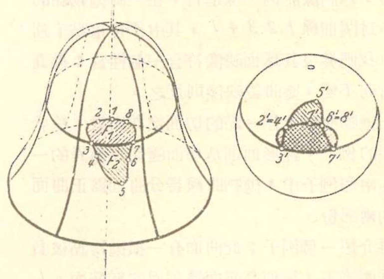


圖 25

讓我們檢查鐘形曲面在拋物曲線附近的球面映像，在拋物曲線上任取一點並畫一小封閉曲線 1 2 3 4 5 6 7 8 1 環繞它（圖 25 ）。令 1 、5 分別為最高、最低點；3 、7 為曲線與緯線圓的交點，子午線（在此即繞成鐘形曲線之母線）在反射點附近切面互相平行。顯然地，鐘形曲面在對應點有平行法線。所以這樣的點有相同的球面映像。（此處球面映像的詳細作法不作贅述，請參看 *Fig 25* ）。

由此我們看到鐘形曲面的球面映像沿着拋物曲線相重疊，通常其他有拋物曲線的曲面映像亦然。不過，下面我們由第二個例子解釋一種典型的例外。

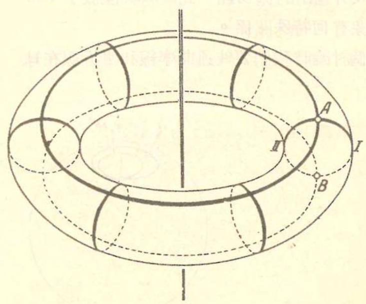


圖 26

在一直立的平面上作一圓和一直立軸，將圓繞軸旋轉得一旋轉曲面稱為輪胎面（*Fig 26*）。最高點 A 及最低點 B 分圓為二半圓 Ⅰ 及 Ⅱ 。Ⅰ 所繞成的曲面部

份有正高氏曲率，Ⅱ所繞成的有負高氏曲率，兩部份以A、B所繞的圓爲界。此二圓爲輪胎面的拋物曲線，其上任一點的切面與輪胎面所成的交線爲含一切點的一拋物曲線。很明顯地，它切於沿拋物曲線的任一點不交曲面上任何其他部分，由此我們找到一個例子，其在拋物點的切面與曲面的交線無尖點。圖27.展示在拋物曲線隣近的反曲點上切面與曲面的交線，在橢圓點切面與曲面僅交於一點。

現在我們來研究輪胎面的球面映像，選定曲面法線的一個指向，譬如說，向外指向，在兩拋物圓上任一點的法線皆互相平行。所以每一拋物圓的球面映像各爲一點，在曲率大於0的曲面部份任二法線皆不平行，其球面映像蓋住球面一次（除了兩個特殊點外），負曲率的曲面部分亦然，所以除了最高點和最低點的映像外，輪胎面的映像把球面蓋過二次，而此二層球面在兩特殊點連接，爲了清楚想像這兩層圓是如何連接近來的，我們像前例一樣進行：在一個拋物點的周圍畫一小封閉曲線$1\ 2\ 3\ 4\ 1$，其中不含重點（圖28）從圖中我們發現其球面映像符合一個性質：橢圓點映像的方向不變，雙曲點映像則反之。

曲面上拋物曲線上任一點的切面都相同者，輪胎面是個典型的例子。鐘形面則是切面隨切點而異的一個例子，在兩個例子中，拋物曲線皆分曲面爲正曲面及負曲率的兩部份。

最後再介紹一個例子：此曲面有一孤拋物點被負曲率的區域圍繞着，這便是前面提到過的猴鞍面。（*Fig 29*）在拋物點兩旁正對面的一雙點，其法線是互相平行的，所以繞着拋物點的一小封閉曲線，其球面映像繞拋物點的球面映像兩圈。同樣我們也可構作一曲面使其拋物點有雙曲點隣域，而環繞拋物點的一封閉曲線映像成爲三圈、四圈或更多。在另一方面，被一正曲率區域所包圍的拋物點，此區域映像似乎不和拋物點的映像有何特殊關係。

結束這個討論時我們要敍述曲率線和漸近線在球

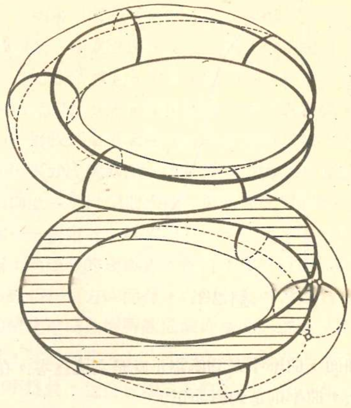


圖 27

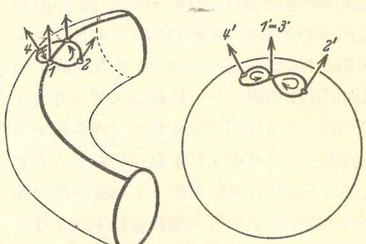


圖 28

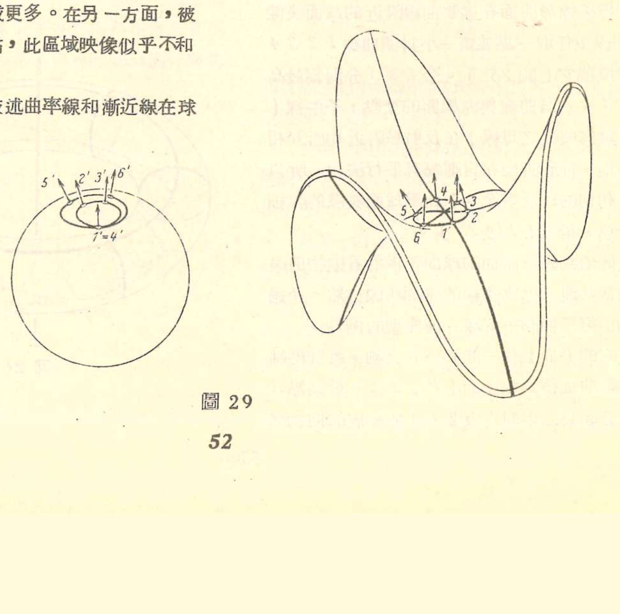


圖 29

面映像下的行爲。主方向的充分徵定性爲：方向之曲線平行於曲線映像之方向者。在臍點時爲例外，每一方向的曲線平行與其映像之方向。這個徵定性給了我們一個找到迴轉曲面所有曲率線的方法，這種曲面的曲率線爲母線和子午線的諸平行線。因爲在球面表示時，曲率線的映像都是平行於經線和緯線的，而任一曲率線在每一點的方向平行於映像在此點的方向。由此可見任一凸封閉迴轉曲面的兩極爲臍點。

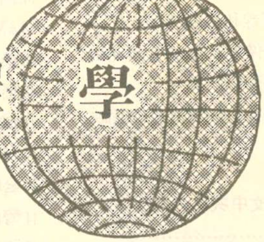
漸近方向的充要徵定性爲：其方向垂直於球面映像之方向者。

譯名中英對照（大致依出現在本文中次序先後）

1. 割線 *secant*
2. 切線 *tangent*
3. 法線 *normal*
4. 正規點 *regular point*
5. 奇異點 *singular point*
6. 映射點 *point of inflection*
7. 第一類尖點 *cusp of the first kind*
8. 第二類尖點 *cusp of the second kind*
9. 曲率 *curvature*
10. 曲率中心、半徑 *center, radius of curvature*
11. 切線映像 *tangential image*
12. 高氏映像 *Gaussian image*
13. 內稟性 *intrinsic property*
14. 自然座標 *natural coordinate*
15. 法面 *normal plane*
16. 密切平面 *osculating plane*
17. 從切平面 *rectifingplane*
18. 動標三面形 *moving trihedron*
19. 主法線 *principal normal*
20. 副法線 *binormal*
21. 球面映像 *spherical image*
22. 扭率 *torsion*
23. 橢圓點 *elliptic point*
24. 雙曲點 *hyperbolic point*
25. 拋物點 *parabolic point*
26. 曲率線 *curves of curvature*
27. 漸近線 *asymptotic line*
28. 臍點 *umbilical point*
29. 正截曲線 *normal seetion*
30. 馬鞍點 *saddle point*
31. 極小曲面 *minimal surfaces*
32. 漸近方向 *asymptotic direction*
33. 弧點 *isolated point*
34. 奇異性 *singular property*
35. 繩構法 *thread construction*
36. 測地線 *geodesic line*
37. 迴轉曲面 *surface of revolution*
38. 經線 *meridian*
39. 懸索線 *catenary*
40. 懸索曲面 *catenoid*
41. 猴鞍面 *monkey saddle*
42. *Dupin*指標 *Dupin indicatrix*
43. 全曲率 *total curvature*
44. 彎曲 *bending*
45. 不變形 *invariance*
46. 高維推廣 *higher dimensiovel analogue*
47. 高維曲線簇 *higher dimensional curved manifold*
48. 拋物曲線 *paraboli curves*
49. 輪胎面 *torus*
50. 鐘形面 *surface of bell*

本文譯自 *Hilbert: Geometry & Imagination.* 26～29 節

數二甲　鄭美琪譯



短程學

本章裏，我們將討論幾何中一些有關直線、曲線、平面、曲面的問題。

我們從考慮下列這通俗的益智問題開始：

有一隻船離開 Porto 港（位於葡萄牙西海岸）向西直駛而去，假設它一直保持着一定的方向；那麼它將抵達美洲海岸的何處？一個粗淺的答案可能是："紐約附近"。因爲紐約和 Porto 港有相同的緯度〔註：位於 Porto 港外之 Douro 海灣是北緯 41°09′；而紐約之緯度介於 40°41′和 40°49′ 之間，且長島最南端的長堤緯度爲 40°34′〕若此船沿緯度圈行駛，則此答案是正確的。但它乃爲錯誤：若船沿一定方向而行時，它並非沿着緯度圈行駛，而是在經過安替列斯群島、古巴、海地後，準確地靠於牙買加東北的 *Antonio* 港。假如牙買加島不阻梗在此船和大陸地之間，則船將繼續直駛而靠岸於尼加拉瓜東岸約北緯 13° 的 *L.de las Perl-as* 換句話說：約離巴拿馬運河 375 哩，紐約 2000 哩。

回到本問題之前，我們先弄清在表面上"保持定方向"（*maintaining a fixed direction*）移動的意義。在我們所討論的課程裏，將考慮各種不同的表面。先從最簡單的表面——平面開始。在平面上取點 A 爲出發點，我們希望自此點開始循一定方向移動（即沿直線移動）經定距離至點 B（見圖 1）爲了保持原有的方向，所走的路徑必須是直的。在眞實的路上，爲保持此種行程，可取一四輪貨車，固定其輪軸使轉彎、操作方向盤皆不可能，則此四輪貨車就只能向前直走了。讓我們想像此車行駛於一完全光滑的平面，則其路徑無疑的，將是一直線。這些例子能直覺而清楚的告訴我們這樣的事實：在平面上保持一定方向而移動就如同沿着一直線路徑而行。

現在，我們自一不同的觀點來考慮連接 A、B 兩點之直線。先考慮連接 A、B 之所有可能路徑：直的、曲的、帶有角或圈的、不帶角或圈的（見圖 2）顯然地，這些路徑有不同的長度，當

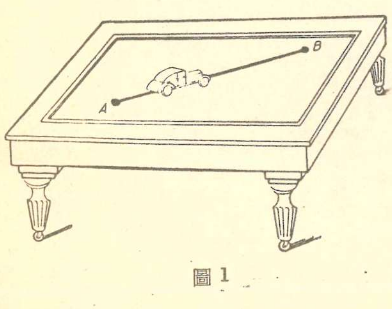


圖 1

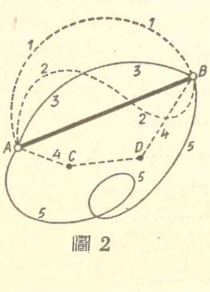


圖 2

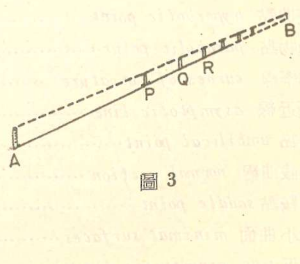


圖 3

然，最短的是那條直路。

雖然這些區別是明顯而瑣屑的，但有一件事須注意：我們曾自兩種相當不同的角度考慮連接 A 與 B 之路徑；第一種是關於方向的保持：若選擇不直的路徑，則方向就會漸漸地或突然地改變了。在圖 2 裏，路徑 1 、2 、3 、5 是逐漸地改變方向，而路徑 4 則在點 C 與 D 作突然的轉彎。若出發點 A 和目標 B 爲相異點或者說自 A 點看不見 B 點，如在大霧中一般，則方向可由短間隔之指標（如同冬天山裏指示路徑的指標）獲得保持。在原則上，只要確定未在指標 P 處（見圖 3 ）離軌，就足以看到後面二指標 Q 與 R，並能弄清其他三個指標是否皆在視線 $P \rightarrow Q$ 上，此即〞方向〞能被〞視線〞所保持；直線上方向之改變能被〞看〞出。

另一種觀點則和「不同路徑之長度」有關。且在此我們須用不同的方法。若用測量竿，則不須以視線串連三個指標，而只須測量自每一 P 點至下一點 Q 之距離。由 P 經 Q 至 R 的距離爲最短的事實，可以下法表之：若指標 Q 被風暴移至另一不在 $\overleftrightarrow{PR}$ 上之點 Q'，則距離之和 $PQ'+Q'R$ 將大於 $PQ+QR$（見圖 4 ）只有當 Q 點位於 $\overleftrightarrow{PR}$ 上時，距離 $PQ+QR$ 才代表最小的可能值。因此，自距離的觀點說：直線具有〞爲始點與終點間之最短路徑〞之特性。

自此兩種不同的觀點來比較〞連接兩點間之路徑〞我們注意到：以保持定方向（由視線決定）聯接兩點間之路徑作爲直線的定義和以具有最短距離（由測量決定）之路徑作爲直線的定義是相同的。我們也注意到：能被指標所影響的「保持定方向」也能以固定輪軸的車子在光滑路面上行駛的方法達成。這對於車主們可能是值得注意的，舉個例說：要省汽油就走直路，但對汽車來說，基於花費油量之多少來選擇路徑是完全離題的，因爲汽車只能向前直駛，機械地保持其方向。〞這條路最經濟，因爲它最短〞之事實是值得考慮的。

至目前爲止，此種討論只和平面有關。現在，我們來考慮球面。這要稍微難些，但其改變並非極重大。拿地球當個大球的例子吧！當然，它並非標準的球，因其兩極爲扁的：赤道的直徑比南北極間之距離要稍大。忽略這相當小的誤差，我們把地球當作一個光滑的實球體，沒有山、海和谷。假如一輛馬車在此光滑美好的地球上沿着垂直赤道的子午線繞圈。它將到達南極，同樣地也能到達北極。此路徑將地球分爲相等的兩半。〞在一球體上，保持定方向的路徑是一圓圈，此圓圈將球面分爲相等的兩半。〞然而，並非球面上每一圓圈皆將球體分成兩等份。球上有些圈如圖 5 中之 b 不具此種特性。要將球分爲兩等份，則圓圈面須通過球心 M。若平面 H（見圖 5 ）通過球心 M，則 H 與球交集之圓 a 平分球面爲二。若包含圓圈 b 之平面 N（見圖 5 ）不通過 M，則 b 將球面分爲二不等份。第一種圓稱爲大圓，赤道及每一完整的子午線皆爲大圓。第二種圓稱爲小圓，除赤道外之每一緯線皆爲小圓。大圓乃保持定方向之路徑。假如在光滑的地表，用視線連接連續着的指標，我們將得到此種路徑。

描大圓的時候，並不需選擇一極作爲定方向路徑之出發點。任何其他一點都能作爲出發點。在一球上，不論出發點爲何，皆可畫出相同的結構。若我們從慕尼黑附近一點出發而保持定方向，則所得路徑爲經慕尼黑之一大圓，且此一特定之大圓只和出發時的方向有關。自慕尼黑出發的所有大圓相會於與慕尼黑正相對之另一點。這些路徑之每一條都將地球表面分爲二等份。

然而，我們須記淸：地球上許多平行的緯度圈中，只有赤道爲大圓，只有它平分地表爲二。我們假設中的馬車（定輪軸者）可能沿着赤道而行，但絕不可能沿着一緯度圈而行，因爲緯度圈是逐漸改變其方向的，此事實很容易在兩極附近的緯度圈看出。想像北極就在你所處屋子的中心，則以此點爲圓心，十碼爲半徑之圓即是北緯 89°59′59.7″ 圈，因爲 90° 的 0.3 秒相當於離極處十碼之距離。當我們保持此中心在我們的右方，由東向西描此大圓時，顯然，我們不停地改變方向，因爲我們總把方向轉向右。固定輪軸的馬車絕不會沿此緯度

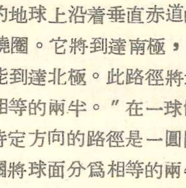


圖 4

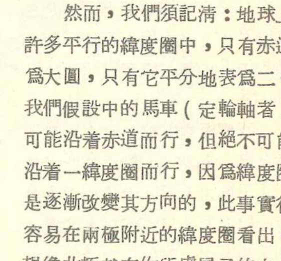


圖 5

圈行駛。此路徑也不可能由聯接在視線上之指標而得。並且在公海上，也不可能有一隻船行駛此路徑而保持其方向不變。在離北極十碼之緯度圈如此，在其他除赤道外之所有緯度圈亦皆如此。北緯 $89°59'50''$ 之圈當然比剛才我們所考慮之緯度圈要大，其半徑非十碼而是 332.4 碼，沿此緯度圈由東向西走時，依然不停地改變方向，且總是向右轉。在北半球，一個人若由東向西沿着緯度圈而行，就將不停地向右改變方向。越近極，其改變越大，越近赤道，其改變越小。

現在，我們找到了本章首那益智問題之解了：假如一隻船自 *Porto* 出發，固定其方向，它將不是行駛在一緯度圈上，而是在通過 *Porto* 之大圓上行駛。此大圓與過 *Porto* 之緯度圈相切於 *Porto*。

我們繼續討論一球之大圓，考慮自一定點 A（就說是北極吧！）出發之大圓，它們稱爲子午圈或經度圈，這些圈都將通過和 A 正相對之一點 G，它當然是南極啦！現在，我們自北極沿着一子午線前進，但在抵達南極前停止。此即我們橫過一小於半圓之弧度。設此子午弧之終點爲 B（圖 6）我們能證明此弧在一大圓上，且爲此球上由 A 至 B 之最短路徑。由此，我們發現大圓有雙重性質；第一：爲球上保持定方向環繞之路徑，第二：若取一小於半圓之弧，則聯接頭尾二點間之路徑以在大圓上者爲最短。

到目前爲止，我們發現了些什麼？我們自平面上之移動開始，且看到直線有兩個與此相似的性質：爲唯一保持定方向之路徑；爲兩點間之最短聯接。然後，我們又看到了球面上大圓的兩個相同的性質，具有此二種性質的曲線，不只在平面或球面上，而是在許多其他的表面上都能發現。這種曲線有其特殊的意義，且在這些表面的數學意義上有極重要的地位。它被稱作此表面的短程線。平面上之短程線爲直線，球面上之短程線爲大圓。

現在我們研究另一些表面上的短程線。這也能使我們大略的認識許多其他不同的表面。首先，我們探討橢面，這是一種和球面極相似的表面，其最簡單的爲旋轉橢圓體：乃是由繞橢圓（見圖 7）之一軸 AC 或 BD 旋轉此橢圓而得。若繞短軸 BD 旋轉，則所得者爲扁橢球（見圖 8）若繞長軸 AC 旋轉，則得紡錘形圓紋橢球，如圖 9 左所示。有些橢圓兩軸的長度相差極微，如圖 10 中 BD 只比 AC 短 $1/20$，此橢圓與圓相差極微，且其旋轉所得之橢球與球也相差極少。地球表面與扁橢球極相似；它與一球相差極微，因其偏差只有赤道直徑的 $1/299$。

正如一球是旋轉橢圓體之一特例，旋轉橢圓體也是橢球之一特例。通常一個橢圓體有三個互相垂直的軸，如圖 9 右此種橢球稱爲三軸橢球。

現在讓我們繼續橢球上短程

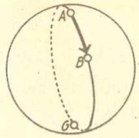


圖 6

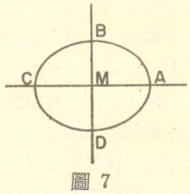


圖 7

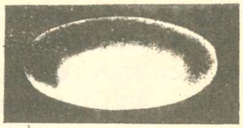


圖 8

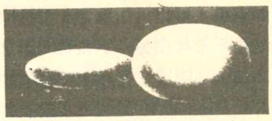


圖 9

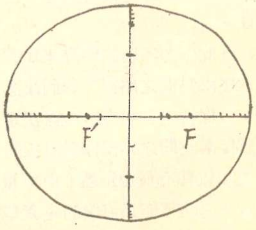


圖 10

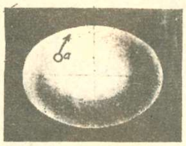


圖 11

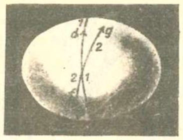


圖 18

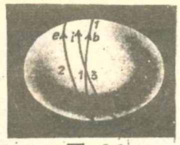


圖 20

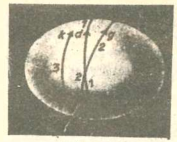


圖 22

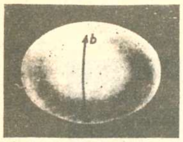


圖 12

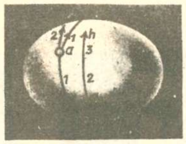


圖 19

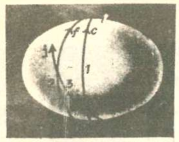


圖 21

圖 23

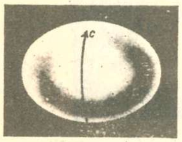


圖 13

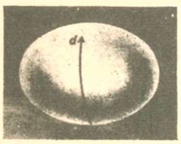


圖 14

圖 15

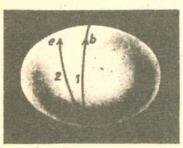


圖 16

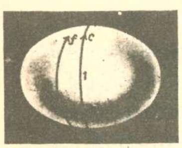


圖 17

1 2 3 4 5 6 7 8

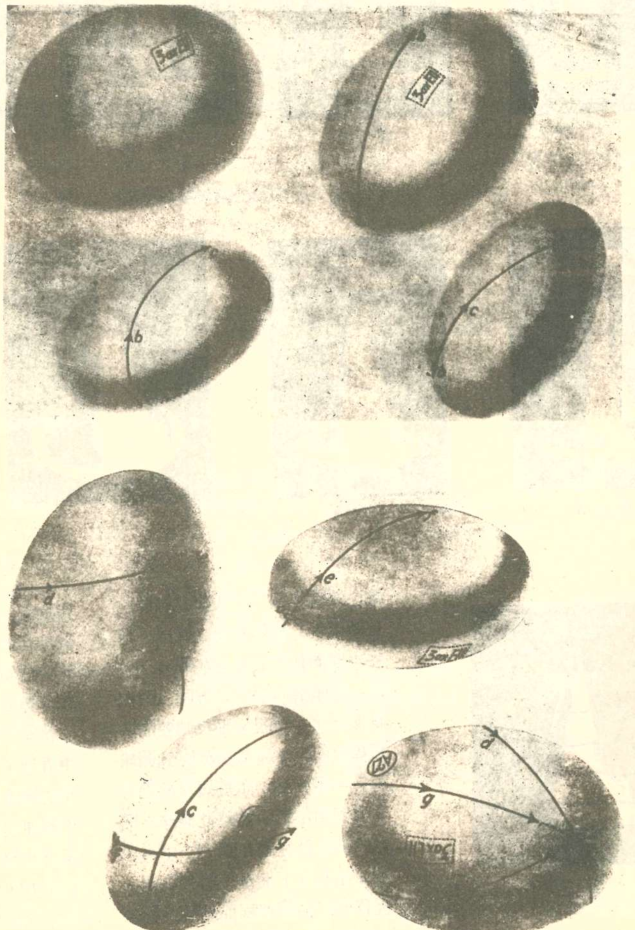


圖 24

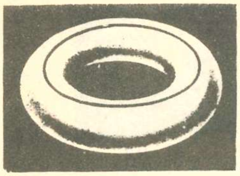


圖 25

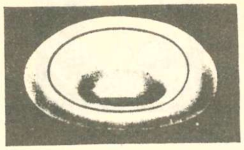


圖 26

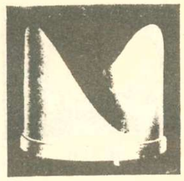


圖 27

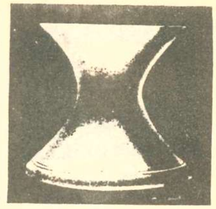


圖 28

圖 29

圖 30

圖 31

圖 32

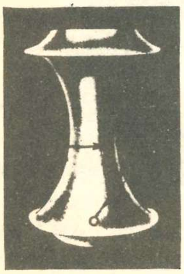


圖 33

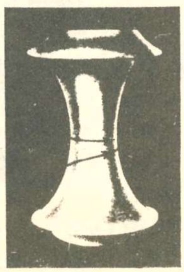


圖 34

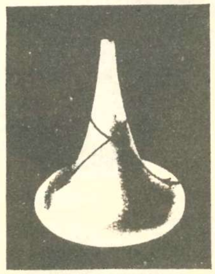


圖 35

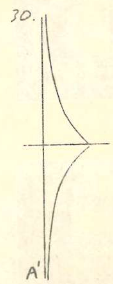


圖 36

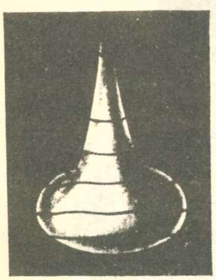


圖 37

線之課程，圖 *11* 代表以橢圓之長軸爲中心旋轉所得之橢球。以一小圓圈代表旅程之始點 a ，並附一箭頭指向選定之方向。我們將保持此定方向，即我們要沿一短程線而行，遠離出發點到橢球的另一邊。爲了順着短程線進行，我們須不斷的旋轉此橢球。開始的部份路徑畫在圖 *12* 中，現在，始點在下面幾乎消失之處，因我們爲繼續路程而旋轉此橢球。此路程將分階表示。一種能加深印象、包容更多的視域，可由此旅行的連續照片得到，我們須對這些單獨的照片感到滿意。繼續旋轉此橢球將帶我們至點 b 、 c 和 d 。我們可在圖 *13* 及 *14* 中看到，並引起一童子軍雪中行軍的回憶，我們後面的路程早已被雪埋起了。圖 *15* 顯示此短程線繞此橢圓體一圈後回到起點 a ，但方向已不同於原來的路線，所以此旅程仍在此蛋形的橢球體上繼續着，但路線不同於前；並

引導我們至中途暫停點 e 及 f（圖 16 及 17）然後跨過以前的路徑而達點 g（圖 18）在環遊第三週的路上到達離出發點 a 不遠之 h 點，然後（橫過路徑 1 和 2）到達點 i 和 j（圖 20 及 21）最後，經過點 k，l 再度回到始點 a（圖 23）此時，路徑將和開始時完全一致。此旅程終結：我們跑完了一封閉的短程線。

相同地，我們能找出在三軸橢圓體上之短程線，如圖 24 所示。此短程線總是回到起點，但有不同的方向，所以它並非封閉而是無限的開放短程線。

現在，我們考慮在其他表面上之短程線。圖 25 表一環面，亦稱環形圓紋曲面（錨環）而圖 26 表不對稱環似面。此二表面都像球與橢球是有界的。此即它們爲有限物體之外表面。圖 27 中之鞍狀表面是一種完全不同的表面。圖 28 中之表面（單葉雙曲面）和圖 27 中者爲同一類型。圖 29 中之旋轉表面和鞍狀表面有關。圖 30 至 34 顯示在此種表面上的一種特殊短程線：一繼續不斷地往上繞而永不經前所走過之點的路徑，一圈隨着一圈，其間的距離越來越小，最後達成緊繞其外表之一圓圈。在此，我們再度遇到一開放的短程線。

圖 35 顯示另一種情況。此表面乃由旋轉一等切面曲線（曳物線）（見圖 36）而以直線 AA' 爲軸所得。此表面像小丑所戴的尖帽，只差其頂端延伸至極遠處。圖 37 顯示一在此曳物線旋轉面上之短程線，此線好像一小圍巾鬆鬆地圍在喉嚨四周，而此曲線的最高點位於頸項上，此圖中被石膏模型所遮蔽。這也是一種開放短程線。

從這些例子我們導出了兩種不同短程線之區別：沿着封閉短程線旅行，會回到始點且和出發時之方向相同。而開放短程線不論畫了多長，絕無上述封閉短程線所具有的性質。

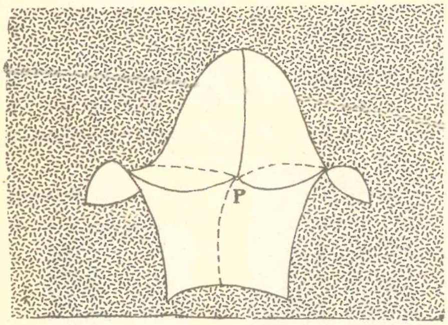
註 1：本文節譯自 *Famous problems of Mathematics by Heinrich Tietze.* Ⅱ. *Traveling on Surface. geodesics-surface curvature.* 一文。

註 2：短程線 *geodesic* 或者譯爲測地線。

It is a basic Principle in the study of mathematics, and one too seldom emphasized, that a proof is not really understood until the stage is Teached at which one can grasp it as a whole and see it as a single idea. ..... A proof should be chewed, swallowed and digested, and this process of assimilation should not be abandoned until it yields a full comprehension of the overall pattern of thought.

Simon, G.F.

高斯曲率與黎曼幾何的一點印象



數四甲 洪萬生

零：序 言

這一點點印象係筆者近來讀微分幾何所得，不能將張量分析和仿射連結 *Affine connection* 包含在內以及由於技術上的困難，有很多地方語焉未詳，至爲遺憾。筆者將在註中一一提出，希望有興趣的同學把它當做難題想想，如果能因爲本文的諸多不「美」引起你對幾何的注意（特別是微分幾何），那便是筆者兩三個月來辛苦的最大報酬了。文中闡述幾何內質適足解脫年來對 " *intrinsic property* " 一詞所引起之困擾；而對非歐幾何所作的「蜻蜓點水」式的品味，則期望成爲觀察非歐體系之一種親切而自然的態度；最後在僅僅的「定義」上 (*only in definition*)，目作主張地爲微分流型找了一個美滿而幸福的歸宿。張量的分析本可寫出，唯恐與「小屋」的風格（瞭解內涵精神相左），故只好作罷。行文如果華而不實，那是用以轉移讀者的注意力，而使結構上的缺陷不致成爲諸大的笑柄。

一、從高斯(Gauss)到黎曼

大約 *150* 年以前，高斯首先提出下面的問題：有多少曲面的 " *Geometry* " 和它的外形（ *shape* ）無關？也就是：到底有多少 " *Geometry* " 與曲面的鑲嵌空間（ *imbeading space* ）無關？要瞭解這問題，讓我們假想曲面 $M \subset E^3$ 上住了一些居民（姑稱爲曲面人或二維人），他們無法感覺到曲面以外的空間，即其感覺乃是二度的，因此無法察知曲面在 E^3 中的外形。然而却仍有量度距離和面積之能力。譬如一隻僅能平視的螞蟻，在球面上爬大概仍能察覺路程的遠近吧！在歐氏幾何中，我們知道兩全等（ *congruent* ）的幾何圖形中，各種度量必定兩兩對應相等，這些度量我們稱之爲剛體運動不變量（ *rigid motion invari-ants* ）。這種剛體運動可定義如下：它是一個函數 $F: E^3 \to E^3$，對任意 $p.q \in E^3$，恒滿足 $d(F(p), F(q)) = d(p, q)$ 之條件，其中 d 係由 E^3 中之向量點積（ *dotproduct* ）"." 決定，即 $d(p, q) = [(p-q)\cdot(p-q)]^{1/2}$，假使我們將這樣的函數稍加修飾，定義一 *1－1* 函數 $I: M \to \overline{M}$ 爲從 E^3 中之一曲面 M 映至另一曲面 $\overline{M}$ 且滿足對任一對 M 上 P 點 E^3 之切向量 (*tangant vector*)，$F_*(v)\cdot F_*(w) = v\cdot w$ 之條件，其中 $F_*(v)$ 爲曲線 $t \to F(p+tv)$ 之初速度，即 $F_*(v) = \frac{d}{dt} F(p+tv) \mid t=0$ 亦即 $F_*(v)$ 爲 $\overline{M}$ 之切向量。現在，我們來考慮在這種 F 運動下的不變量，（姑稱爲 I- 不變量），這些 I- 不變量是否一如曲率（ *Curvature* ）和撓率（ *torsion* ）之唯一決定 E^3 中的曲線，而唯一決定曲面呢？從一個三度空間的居民（稱爲三維人）的眼中，或者兩個曲面有相等的 I- 不變量，而在 E^3 中的外形却不一樣（ *con-gruence* ）。但是假如我們不忽略了二維人（曲面人）的重要性，對他們而言，這兩種曲面的外形可能一樣。（事實上：是！）事實上，這些 I- 不變量恰好是二維國的測量師所能且僅能度量到總和。因此高斯發其端，黎曼繼其緒，西元 *1854* 年黎曼在哥廷根大學發表演說，力主掙脫 E^3 傳統束縛，揭櫫「內（質）幾何」（ *Intrinsic Geometry* ）要義，紆尊降貴，模仿曲面人，開始他在黎曼幾何（ *Riemannian Geometry* ）上的爬行。高斯縱有雅量以避此人風頭

（像歐陽修之避東坡，川端康成之避三島由紀夫），奈歲月不居，次年這位數學史上最富盛名的大獨裁便駕崩了。

二、一個簡單顯明的例子

略知微分幾何的人一定曉得第一基本型（*First fundamental form*）$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$，其中 $x=x(u,v)$ 爲曲面之參數坐標式，而 $E=x_u \cdot x_u$ $F=x_u \cdot x_u$，$G=x_u \cdot x_v$，x_u，x_v 則表對 u,v 之偏導數式。藉 E,F,G，可定義出曲面上曲線之長度、夾角、面積等等。而且我們也張容易地看到一平面和一可展曲面（*Developable surface*）的第一基本型中的 E,F,G 兩兩相等。譬如：由一曲線的切線所構所的色面（*Envelope*），我們叫做切可展曲面（*Tangential developable*）可視如一平面或平面一部分，在不伸長，不摺疊之條件下，所造出來的一種曲面。顯然，此種曲面上的曲線長，夾角面積，均與該平面無二致，就曲面人的觀點而言，由於尺度的不變，所以並無空間變異之感。（當然，依我們三度人的觀點，他們的外形並不一樣。）因此，我們易於求得一函數 F 使 $x_u \cdot x_v=F_*(x_u) \cdot F_*(x_v)$，
$x_u \cdot x_v=F_*(x_u)\,F_*(x_v)$，$x_v \cdot x_v=F_*(x_v) \cdot F_*(x_v)$ 亦即 E,F,G 可以完全控制二維人的剛體運動。設此切可展面之坐標爲 $X=X(u \cdot v)$，則
$\bar{E}=\bar{x}_u \cdot \bar{x}_u=1+k^2(u)(v)^2$，$\bar{F}=1$，$\bar{G}=1$
其中 $k(u)$ 爲該可展面之回歸曲綫（*Edge regression*）的曲率，因此這些量和其扭率無關，故由空間曲線基本定理，我們可以找到一平面曲線（扭率爲 0）使其曲率恰爲 $k(u)$，而平面曲線之切可展曲面恰爲該平面（或其一部分）。由此可知，若度量可以用 E，F，G 表示出來，則因 E，F，G 在剛體運動下保持不變，故這些度量顯然是 I－不變量。（參數的選擇和坐標的變換必須不影響這些不變量才行（註一），這個條件在張量分析和流分微型上將會顯出它的"固執"之普）在 *Laugwitz* 一書中有下面一段動人的描述：幾何性質（*Geometric properties*）必須和下列二性質無關：

(A)特殊坐標系之選擇。(B)特殊參數之使用。

譬如：$X(u,v)$，$X(u,v)=X(u(u,v),u(u,v))$ 同爲曲面參數方程式

$$x(u(t),v(t))=x(u(t) \cdot v(t))$$

爲其上一曲綫，則根據連鎖法則（*chain rule*），可求得：$\dot{X}^2=E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2=\bar{E}\dot{\bar{u}}^2+2\bar{F}\dot{\bar{u}}\dot{\bar{v}}+\bar{G}\dot{\bar{v}}^2=\dot{\bar{X}}^2$
即 $ds^2=d\bar{s}^2$。

Hint：

$$Xu=X\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}+X\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial u}$$

$$X\bar{v}=X\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{v}}+X\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{v}}$$

$$\dot{\bar{U}}=\frac{d\bar{u}}{dt}=\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}\frac{du}{dt}+\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}\frac{du}{dt}$$

$$\dot{\bar{V}}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}\frac{du}{dt}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

三、從古典曲到抽象曲面

現在讓我們回顧一下曲面的古典定義：一曲面可以下述參數方程式表之

$$X=X(u,v)=\big(x_1(u,v),x_2(u,v),x_3(u,v)\big)$$

其中（u,v）佈於平面上一開連通域（*open connected set*），而函數 $Xi \in C^3$（即第三階導函數連續）且 $Xu \times Xv \neq 0$（"$\times$"表向量外積）$Xu=\frac{\partial x}{\partial u}$，據此定義，我們可發現整個球面 S^2 便非一曲面。原來這個古典定義當初已能適應幾何局部研究之要求，後來進入整部領域（*global*）這個定義便顯得張惶失措。因此掌握這些局部性質，設法嚴守幾何和分析的規格，一塊一塊平滑（*smooth in overlap region*）地黏起來，產生了流型，所謂流型，就其直觀而言，便是每一局部都像歐氏空間（因它是一塊一塊的曲面黏起來的，故亦謂之可局部坐標化之空間），而可微分流型（*differentiable manifold*）便是一可定義微分和積分的一種流型。底下讓我們瞧瞧它（註二）的定義：*An n-dimensional differentiable manifold M of C^k is a Hausdorff topological space that has countably many covering U_1, U_2, …, satisfying the following conditions*:

(1) *For each U_i there is a homeo $\phi_i: U_i \to V_i$ where V_i io an open cell in E^n*

(2) *If $U_i \cap U_j \neq \phi$, the homeo ϕ_i, ϕ_j combine to give a homeo morphism $\phi_{ji}=\phi_j\phi_i^{-1}$ of $\phi_i(U_i \cap U_j)$ onto $\phi_j(U_i \cap U_j)$, which is a differentiable map of C^k*

由(1)我們知道它局部與歐氏空間之開盒子（*open cell*）同胚（*homeo*）而且若 $X \in V_i$ 則 X 之座標定爲 $\phi_i^{-1}(x)$ 之座標。

由(2)我們曉得 ϕ_{ji} 必有一反函數 ϕ_{ij}，因此它的 *jacobian determinant* 在 $\phi_i(U_i \cap U_j)$ 中皆不爲零，因此 ϕ_{ji} 爲一 *diffeomorphism*，即其黏縫處必須平滑（*smooth*）。同時若（U_i,ϕ_i）爲另一滿足①②之系統，則對任意（U_i,ϕ_i），（U_j,ϕ_j）同時亦能滿

足②稱爲allowable coordinate transformation）。所以參數可自由選擇，而坐標變換亦在考慮之內。

因此，在這個流型上，曲線可以劃出，一如曲面，而且如將通過一點的曲線切向量收集起來，便構成一佈於實數的向量空間，我們稱其爲切向量空間（Ta-ngent space）或切空間。假如在 n 維的微分流型的每一個切空間 T 內引介（furnish）一個內積（inner product），此內積是一從 $T\times T\rightarrow R$ 之函數：

$(v, w)\rightarrow v\circ w$ 滿足下列條件：

① $(a_1v_1+a_2v_2)\circ w=a_1(v_1\circ w)+a_2(v_2\circ w)$

② $v\circ w=w\circ v$

③ $v\circ v\geq 0 \quad v\circ v=0 \Longleftrightarrow v=0$

其中 $a_1, a_2\in R$，$v, w\in T$

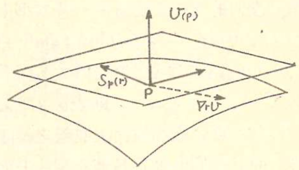
（我們可以認爲它是 E^n 空間向量點積之推廣，因 T 是一佈於實數之 n 維向量空間）。一個 n 維可微分流型有了內積以後，便稱爲黎曼流型（Riemann manifold）而從此流型所導出來的幾何，我們稱之爲黎曼幾何（Riemannian Geometry）。二維的黎曼流型通常也叫曲面（此曲面即爲一種抽象曲面），而黎曼當年就是從這種曲面出發，建構它的幾何，從此幾何解脫歐氏尺度之束縛，奔向大道即開濶廣遠，小徑却深幽迷人的境界。

四、卡當 (E. Cartan) 的撲擊 (Approach)

在本文中，因我們不擬實際去計算 I-不變量，故在尋找這些 I-不變量的過程中，我們採用E.Caratn 的方法，同時也因爲E. Cartan 的觀點在近代微分幾何的發展史上有很大的貢獻。從微分方程的角度觀察，向量場（vector field）是一種很自然的現象。粗言之，所謂向量場便是在 E^3 中一群向量，「微分方程」便是設法找出一個曲線或曲面使得他們的切線或切面分別是已知向量（當然我們必須考慮初期條件），所以在 E^3 中的一向量場 V 即一函數對 E^3 中每一點 P，給它一個向量 $V(P)$。比較有用的向量場是搬到 E^3 中的曲面上來。曲面 M 之Normal vector field U 便是一個與 M 上某點之切平面垂直之向量場（其定義域常爲此點在切平面上之隣域neighborhood）在此向量場上定義一種微分，叫Covariant differentiation。

$V_vU=U(p+t_v)'(0)$

V_vU 稱爲 U 在點 p 對 v 之共變導函數（Cavariant derivative）即 $U(p)$ 在 p 點沿 v 方向之初變率，若 $v\in T_p(M)$，$T_p(M)$ 表在 p 點之切平面，則令 $S_p(v)=-V_vU$ 表面 M 在 p 點之形算子（shape operator），其中 M 爲法向量場，根據covariant diffeventiation 之定義，我們可以證得 $S_p: T_p(M)\rightarrow T_p(M)$ 是一對稱線性算子。其圖如下：



然後我們定義曲面上 p 點之高斯曲率（Gaussion Cu-vature）爲 $K(p)=\det S_p$（$\det S_p$ 表 S_p 之行列式），曲面上通過 p 體之曲線各有一曲率，這些曲率中必有一最大與最小者，稱爲主曲率（principal cu-vature）。尙可證明高斯曲率即爲二主曲率之積。原來要圓滿地描述一曲面之局部，僅用如曲率，扭率這樣的函數是不足的必須動用微分型式（differential form）才行。借用微分型式，我們可以很簡潔地表達很多微積分的知識在流型上做了很完美的推廣。在曲面 M 上，現在採用一種選架場（adapted frame field）：即 E_1, E_2, E_3，而且對每一點 $p\in M$，$E_i\cdot E_j(p)=\delta_{ij}$，$E_3(p)$ 在 M 之法線方向，則對 $v\in T_p(M)$，有 $\nabla_vE_i(p)=\sum_{j=1}^{3}w_{ij}(v)E_j(p)\ (1\leq i\leq 3)$，

但 $S_p(v)=-\nabla_vE_3(p)$ 故 $S_p(v)=w_{13}(v)E_1(p)+w_{23}(v)E_2(p)$。對應於 E_1, E_2, E_3，介紹三個對偶 I-型式（dual-1-form）Q_1, Q_2, Q_3，使 $Q_i(v)=v\cdot E_i(p)$，故 $Q_3(v)=v\cdot E_3(p)=0$ 由Cartan 的第一結構方程式（first structural equation）

$d\theta_1=w_{12}\wedge\theta_2$，$d\theta_2=w_{21}\wedge\theta_1$，高斯方程式 $dw_{12}=w_{13}\wedge w_{32}$ 和Codazzi方程式 $dw_{13}=w_{21}\wedge w_{13}$，（其中"$d$"表exterior derivative，而"$\wedge$"表wedge product）（註三），我們可證得一很重要的結果：$dw_{12}=-K\theta_1\wedge\theta_2$，這個方程式稱爲第二結構方程式。對於一般之幾何曲面 M（geometric surfa-ce）因 M 不必包含於 E^3，不能引用形算子，所以高斯曲率，將循此定義。高斯在黎曼幾何的奠基工程上做了一件很重要的工作（而且聽說高斯頗爲得意）即Theorema egregium of gauss，也就是他證明了高斯曲率是一種 I 一不變量。正因其爲I-不變量，故以第二構構式定義高斯曲率才有意義，欲證明此定理，我們必須使用橫跨兩曲面之I-函數 $F: M\rightarrow N$，而導

出一函數F^*可將N上的型式（form ）拉回（pull back）M：即①若ϕ是N上1－型式，則$F^*\phi$爲M上之1-型式，而（$F^*\phi$）（v）$=\phi$（F^*v），其中v切於M。②若η是N上之2-型式，則$F^*\eta$爲M上之2-型式，且（$F^*\eta$）（v,w）$=\eta$（F^*v, F^*w），其中v, w切於M，而F^*定義如前。這種函數滿足下列三性質：

①$F^*(\xi+\eta)=F^*(\xi)+F^*(\eta)$

②$F^*(\xi\wedge\eta)=F^*(\xi)\wedge F^*(\eta)$

③$F^*(d\xi)=d(F^*\xi)$

④若f爲0-型式，則F^*f爲$f(F)$

有了這些結果，若F：$M\to M$爲1-函數，則$\theta_1=F^*(\bar{\theta}_1), \theta_2=F^*(\bar{\theta}_2), w_{12}=F^*(\bar{w}_{12})$，即$F$可將$\bar{M}$之型式"拉回"$M$（這種「拉回」在微分流型的解析工作上扮演了很重要的角色，熟悉 stoke 定理者當知）。現在讓我們來證明一下高斯曲率之1-不變性。設F：$M\to M$是1-函數，令$K(p)$，$\bar{K}(F(p))$分表M，$\bar{M}$之高斯曲率。在p點隣近二個向量場E_1, E_2切於M，且利用F_*在M上找到$\bar{E}_i=F_*(E_i)$，則我們由$F^*(\bar{w}_{12})=w_{12}$知$d\bar{w}_{12}=-\bar{K}\bar{\theta}_1\wedge\bar{\theta}_2$但$d(F^*\bar{w}_{12})=F^*(dw_{12})=-F^*(\bar{K})F^*(\bar{\theta}_1)\wedge F^*(\bar{\theta}_2)$，故$dw_{12}=-\bar{K}(F)\theta_1\wedge\theta_2$因$\theta_1\wedge\theta_2\neq 0$故$\bar{K}(F(p))=K(p)$

若一曲面M可定向（orientable）則必存在一2-型式dM使得對M之任二切向量$v.w$恒有$dM(v,w)=\pm\|v\times w\|$，我們可選擇參架場（fram fields）E_1，E_2使$dM(E_1,E_2)=+1$但因$\theta_1\wedge\theta_2(E_1,E_2)=\theta_1(E_1)\theta_2(E_2)-\theta_1(E_2)\theta_2(E_1)=1-0=1$故$dM=\theta_1\wedge\theta_2$，因此$dw_{12}$亦可表示爲$-KdM$。我們已經證出了高斯曲率是一種$1$-不變量，呆會兒，我們會設法尋找一些情況，使得高斯曲率也會影響這種剛體運動。

五、非歐幾何驚鴻一瞥

常見的非歐幾何模型都建構在高斯曲率K（以下略稱曲率）爲常數的曲面上，譬如彭加瑞（poincare）模型乃用以解說雙曲線幾何之特性，而其高斯曲率爲-1，相反的，橢圓幾何的模型則從曲率爲正的曲面上建立起來，而歐氏平面幾何則是$K=0$的一種內質幾何（intrinsic geometry） 爲什麼這些模型非建立在$K=$常數的曲面上呢？西元1865年，Belrami 認定一個黎曼空間V_2和歐氏平面之間可以找到一個測地函數（geodesic mapping ）的充分必要條件是V_2之曲率爲常數。歐氏和非歐體系的主要差異在於平行公設，而其他點線關係和點線性質大都相同。而這種測地函數將測地線映成測地線（曲面上之測地線可視如平面上直線之推廣。）因此若V_2之曲率不爲常數，則這種測地函數便不存在了。同時測地函數是一種很弱的函數，亦即它所能裝載的曲面「幾何」爲最少，故若測地函數找不到了，其他可找到的函數大概觸及不到幾何的旨趣了，此時那樣的模型便無法將非歐系統圓滿地描述出來。在另一方面，假使我們在曲面上介紹一種坐標網，此坐標網以一測地線（unit, speed）和此線垂直的線組成（註四），顯然此時$E=x_u\cdot x_u=1$，$F=0$，$G>0$，且$G_u(o,v)=1$，$\sqrt{G}(o,v)=1$。令E_1, E_2爲在此種坐標網之 associated frame field，且其值分別是$x_u(u,v)/\sqrt{E}(u,v)$，$x_v(u,v)/\sqrt{G}(u,v)$則$\theta_1=\sqrt{E}\,du, \theta_2=\sqrt{G}\,dv$，利用Cartan 結構方程式求得：

$$w_{12}=\frac{-(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}du+\frac{(\sqrt{G})_v}{\sqrt{E}}dv\text{，所以}$$

$$dw_{12}=\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{(\sqrt{G})_v}{\sqrt{E}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v\right\}\theta_1\wedge$$

θ_2但$dw_{12}=-K\theta_1\wedge\theta_2$，故

$$K=\frac{-1}{\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u+\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v\right\}\text{（註五）}$$

將事式$E=1$，$F=0$，$G>0$，代入，可得

$$K=\frac{-1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{uu}$$，在此微分方程式中，若固定v，和給予初期條件$G_u(o,v)=0$，$\sqrt{G(o,v)}=1$，則G可完全由K所決定。因此若在已知二曲面的對應點之隣近分別造出這種坐標網，其第一基本型式分別由E，F，G，$\bar{E}$，$\bar{F}$，$\bar{G}$所決定，則$E=1=\bar{E}$，$F=0=\bar{F}$，此時$K=\bar{K}\leftrightarrow G=\bar{G}$。但已知$E$，$F$，$G$可完全決定一$1$-函數，因此對於此種坐標網來說，高斯曲率可以完全決定曲面上的剛體運動。

想像住在曲率爲常數的曲面上的二維人，這些「人」對一個圖形的所有線都能保持度量的一種運動將認爲可能。但對曲率不爲常數的曲面，這樣的運動將變得毫無意義。因根據上述定理，一曲面上任一點移向另一點，若能以"剛體運動"完成，則此曲面之K便非常數不可；反之，若使用此種坐標網（此種坐標必存在，它是一個微分方程解的問題，請同學自己看看書）。則曲面之曲率爲常數者方允許有這種運動。對應於歐氏幾何之SAS全等公設，我們可提出一個 analogue：即在K爲常數之一曲面M上，令P，Q，R，P_1，Q_1，R_1分別爲在P，P_1隣近構成兩測地三角形（geodesic triangle）若$PQ=P_1Q_1$，$PR=P_1R_1$，而且角RPQ和角$R_1P_1Q_1$相等，則$QR=Q_1R_1$且其他兩對應角也兩兩相等。（證明可使用上述定理），從這個角度來看，唯有將非歐幾何模型建立在這種曲面

上，才能滿足克萊因（*Klein*）的「幾何觀點」（見註六）。既如此，非歐體系是否一致呢（*Consistent*）？*Beltrami* 在西元1868年提出第一個相對（*relative*）的解析證明，所謂相對者，即他設法在E^3中找到可以解釋非歐體系之模型（註七），因此，若歐化幾何爲一致，則非歐體系亦一致。（當然我們必須用別的方法來證明歐氏幾何之一致性。）終於：*Beltrami* 結束了非歐氏和歐氏在我們三維笨人眼下的戰爭狀態，而且利用 *geodesic mapping* 來重修舊好。從而黎曼的成就不僅對高斯的幾何內質提出了滿意的答覆，而且對非歐幾何的內層瞭解也有了很大的貢獻，而事實上，非歐幾何僅僅是一種特殊的黎曼幾何罷了。

六、高斯曲率、黎曼度量(Riemann metric)和曲面拓樸

雖然內積或（黎曼度量）的引介可以有無限多，但"引介"却無法任意。它受到兩種限制，其一乃是人爲技術的限制，其二爲曲面本質使然。對於第一種情形，考慮黎曼流型爲某n維歐氏空間之子流型（*submanifold*），則我們希望內積的引入不影響M的外形和M的幾何內質之協調，亦即$K=\det S$，其中S爲M之形算子（*shape operator*）（我們瞭解此形算子S必須藉藉E^n之知識），我們所謂的「協調」乃指利用這種S，可以找到所要的幾何內質，因此我們就必須期望「內積」不致使M從E^n中遁形。（註八）。有些曲面（*2-dems manifold*），若我們想在^{8}中找到它們的影子（*image*），則內積之引入便不可太隨意。譬如$Torus \subset E^3$之參數方程式爲$x(u,v)=[(R+r\cos u)\cos v,(R+r\cos u)\sin v, r\sin u]$，如果$x_n\cdot x_n=E$，$x_u\cdot x_v=F$，$x_v\cdot x_v=G$定義爲歐氏度量，則此*Torus*便可在$E^3$中找到。但假使讓$x_n\circ x_u=1$，$x_u\circ x_v=0$，$x_v\circ x_v=1$，則因$x_*(U_1)=x_v$，$x_*(U_2)=x_v$，故此種*Torus*與歐氏平面局部保距（*local isometry*）即 *isometry* 去掉1-1之性質之$K\equiv 0$（因局部保距函數保持K之不變性），但是一個$\subset E_3$像*Torus*的這樣緊緻曲面（*compact*）一定至少有一點$P\in M$，使$K(P)>0$（註），而這種 *flat Torus* 的$K\equiv 0$，故在E^3中勢必找不到它們的影子（整部的）。但是在E^4裏，我們却找得到，因爲我們可以找到一保距嵌函數（*isometrically immbedding*）將 *flat torus* 整部地（*globallg*）嵌入E^4中：若函數$\bar{x}: E^2\to E^4$使得$\bar{x}(u,v)=(\cos u,\sin u,\cos u,\sin v)$，而$x$則爲上述之 *flat torus* 的參數方程式則$I(x(u,v))\ \bar{x}(u,v)$恰定義-1-1函數$I: T\to E^4$，因此若I_*保有內積（*Preserves inner product*）則I爲一保距鑲嵌函數；事實上$xu=(-\sin u,\cos u,0,0)$ $x_u=(0,0,-\sin u,\cos u)$，故$E=1$，$F=0$，$G=1$。但是否所有在低維度歐氏空間中遁形的曲面都能在高維度的空間復出呢？或者有些「曲面」則根本不存在呢？這裏暫時保留第二個問題，我們嘗試回答第一個問題：據*Whiteney*定理，每一n-維微分流型皆可C^∞嵌入E^{2n+1}內，但假使衡上黎曼度量（*Riemann metric*），而且鑲嵌函數要求具有保距（*isometry*）性質，那麼想在黎曼流型上找一個像*Whiteney*定理這樣漂亮的結果就不可能了。希爾伯（*D.Hilbert*）發現若將雙曲平面（*hyperbolic plane*）嵌入（保距地）則其鑲嵌保距函數之導數便無法到達C^4。但*J.Nash*在1954年認定若將標準降到C^1來，則至少可以下面的結果過過癮。若一n維閉（*closed*）微分流型M可以C^∞同鑲嵌入E^k內（$k\geq n+2$）則每一個在M上的C^∞黎曼度量（*Riemann metric*）可以視如E之歐氏度量的導出距（*induced metric*），而這個導出距却只能滿足C^1。

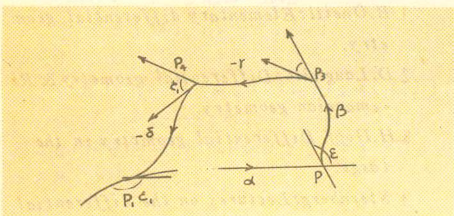
雖然，但從微分幾何的角度來觀察，這樣的結果然起不了什麼作用，因即使就第二基本式而言，它已經需要C^2以上的條件了。而假如這定要適應這個要求，則該鑲嵌空間的維度便壞到極點，*J. Nash* 1956年提出下面定理：若$3\leq k\leq\infty$，一具有C^k之 *positive metric* 之n維流型，有一C^k鑲嵌函數（保距地）函數映入$\dfrac{n(3n+11)}{2}$維的歐氏空間（之一塊小體積）。而$k=2$之情形，則尚無肯定答案。因而如果堅持從歐氏幾何空間的角度來研究幾何，則儘管我們多小心地侍候「黎曼度量」，結果仍可能鑽入一個很壞的空間，譬如每一曲緊緻曲面，雖一定可在$E^{17}[17=2/2\cdot(3\cdot 2+11)]$中找到歐氏觀點的幾何，然而這種空間之維度既壞又高，所以易於削弱我們的直覺想像力。但假如從流型出發來建構黎曼幾何，則不僅可從流部進入整部，且由於新工具之使用，更幫助我們開拓了一嶄新的視野。

前已述及若引用特殊坐標（注意坐標的選擇並不影響「幾何」），則曲面的內質幾何可以完全由高斯曲率K決定，而顯然K係由黎曼度量來決定，因此若曲面本質(拓撲)，足以影響K時，則其威力必及於（*Riemann metric*）黎曼度量。在步向整部分析（*global analysis*）的途中，高斯一卜拿特（*Gauss*

-*Bannet*）定理是一座重要的里程碑；它指示我們：藉史多葛（*Stoke*）定理（此定理係微積分基本定理之擴廣）之助，幾何、拓樸殊途同歸，結果令人驚異而欣慰。高斯－卜拿特定理內容如下：若M爲一可定向（*orientable*）的緊緻（*compact*）曲面，則其全高斯曲率(*Total gaussien curvature*)恰爲$2\pi\cdot x(M)$，$\cdot x(M)$係歐拉－彭加端特徵數（*Euler-Poincare Characteristic*）欲證明此定理，必須從「局部」出發，然後利用緊緻特性，蓋及全部。就局部而言，我們有下述的結果：（稱爲高斯－卜拿特外角公式*gauss-Bonnet formula for exterior angles*）設$x: R\to M$爲一在曲面上之$1-1$, *regular*, 2-*segment*, 若dM爲x所決定之面積型式（*area form*）（同前之2-*form*），則：

$$\iint_x KdM+\left[\int_{\partial x} kgds+(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)\right]=2\pi$$

其中$\iint_x KdM$爲$x(R)$之全高斯曲率，而$\int_{\partial x}kgds+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4$爲$\partial(R)$之全測地曲率（*Total geodesic curvature*），而其定向則由$dM(x_u,x_v)>0$決定。（註九）$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$表如下圖：$x(R)$有四



個邊，ε_1分別爲其旋轉角，即α^1（終點）與β^1（起點）之夾，α（終點）$=\beta$（起點），餘類推。

因$dw_{12}=-K\theta_1\wedge\theta_2=-KdM$（選擇適當的$E_1,E_2$），則$\iint_x KdM+\iint_x dw_{12}=0$由史多葛定理知$\iint_x dw_{12}=\int_{\partial x}w_{12}$，故$\iint_x KdM+\int_{\partial x}w_{12}=0$而且$\int_{\partial x}w_{12}=\int_\alpha w_{12}+\int_\beta w_{12}+\int_{-\gamma}w_{12}+\int_{-\delta}w_{12}$，以及$\int_\alpha kgds=\varphi(b)-\varphi(a)+\int_\alpha w_{12}$　φ爲從E旋轉至α^1之夾角（餘類推），代入$\int_{\partial x}w_{12}$即可得出外角公式。M爲緊緻（*Compact*），故必可分解成有限多個x構成一種 *partition*，將外角式擺到每一個x上，求其和以及考慮歐拉－彭加瑞特徵數，即可求得高斯－卜拿特定理。有了這個定理以後，無論如何我們絕不可能在球面S^2上給一個類似*flat torus*的扁平結構（*flat structure*），因高斯曲率之爲0將迫使歐拉－彭加瑞特徵數爲0，此乃一極其明顯之矛盾。（註十）這樣的事實也可「無聲地」告訴你：雖分析的威力無遠弗屆，但施之於幾何，仍不許任意地賊其天性。

我們但願冷靜一下以致於這種瞬間的歡樂不致於冲昏了頭，試試維度升高，看看高斯或者卜拿特怎麼辦？（*generalized gauss-Bonnet*）*Theorem*：*If M is an even dimensional compact conneted oriented Riemannian manigold, then* $\int_M Q=2^n\pi^k(K!)X(M)$ *wheve, Q is the global, n-form on M, d if* $n=2$, *then* $Q=KdM$（因本定理之證明牽涉頗多微分型式（*n-form*）筆者學力時間均有限，所以只好請有興趣的同學自已看看*Hick's*了。）又高斯－卜拿特外角式於*1848*年由卜拿特證出，但較早時候，高斯最證明了：若△爲一曲面M上之三角形。則$\iint KdM+\int_2 Kgds=(A+B+C)-\pi$，其中$A,B,C$,分別爲△之內角（見外角式），若此三角形之三邊爲測地線，則Kg爲0。（顯然Kg－如撓率之於空間曲線，它用以量度測地線離開曲面之變率。）

此時上式變成$\iint KdM=(A+B+C)-\pi$，因此若K爲常數，則$A+B+C=\pi+Kas\ ABC$，若$K=0$，則△ABC在平面上，則$A+B+C=\pi$，若>0，則△ABC爲球面三角形，則$A+B+C>\pi$。觀察諸幾何之平行公設，同學們必可看到非歐幾何與歐氏體系和平共處的另一佐證。

七、後　記

本文提到之非歐幾何非指古典的非歐幾何，如橢圓幾何和雙面線幾何。關於*Beltrami*對非歐體系一致性的證明惜未能略知大概，筆者敍述概仿很多書的「閒話」託出來的「閒話」，閒話之閒話，其離譜可知，知者若告予，當不勝感激。*J. Nash 1954*年發表者刊於*1964*年第60期的*Annals of Mathematics* *1956*年所發表的則載於該年第63期*Annals of Mathematics*，筆者均能緣一睹其廬山眞面目。儘管如是筆者已很知足能從*B. Oneill*和*D. Laugwitz*二書中獲益良多。最後，要謝謝于靖陳柏兩學弟兩年來不斷地激勵。還有林義雄老師適時給我們的鼓舞和啓示，使小屋的同伴們在傲嘯山林之餘，也曉得回到廟堂，做一番沈潛自雄的工夫了。學院教育和獨立思考能獲至如此奇妙和諧的結合，怎不令人興奮呢？

註一：因參數的選擇和坐標的變換只是一些測量的工具，「本質」在幾何的意義下應不受標尺之影響。

註二：在流型中的定義中 *Hausdorff axiom* 和 *Countable open cover* 都屬必要然而其反例都相當 *pathological*。請分別見*Oneill p.184*

和 *Springer: Introduction to Riemann Surface* p.56。同時也因爲有了這兩個性質，才能充分保證黎曼度量的存在性，見 *Anslander's wedge product* "∧" 是一種型式（*form*）的

註三：乘律（*multiplication*）滿足 $dxdy=-dydx$ 故 $dxdx=0$。*exterior derivative:* 若 φ 爲 p-*form*，則 $d\varphi$ 爲 $(p+1)$-*form* 且滿足 $\phi=\Sigma f_i dx_i$，f_i *real-valued*，$\rightarrow d\phi=\Sigma df_i \wedge dx_i$。

註四：所謂測地線即曲面上之曲線，其切向量場(*Tangent vector field*)之共變導出數 *Covariant derivative* 爲 0，其直觀意義，則爲其加速度爲 0，故爲曲面上之"直線"，如果考慮不太大的區域，則亦可認爲"最短線"，因內容涉及仿射連結 *Affine connection*，故本文沒有深入討論，有興趣的同學可以看看 *Oneill's* 或 *H.Hopf's* 或 *Normizu's*。

註五：請參看 *Oneill* p.278 同時亦可看出這是 K 之幾何內質性之另一證明。

註六：*Klein* 發表有名的 *Erlangen program* 以轉換群（*transformation group*）來歸類"幾何"，依筆者的看法，*Oneill* 在他的書中採取 *Klein* 的觀點。除此以外，筆者所知有限，請自行參考 *Laugwitz* 的 *Historical note*。

註七：這兩種模型都可在 E^3 中找到，譬如彭加端半平面和球面 S^2 等。

註八：有些曲面如 *projective plane*，它緊緻，可是却含一部份集合與 *mobius strip* 同胚，故不可定向，因此它在 E^3 中便不存在了，除非允許自交（*self-intersection*），此斷言根據下面定理：*A compact surface in* E^3 *is orientable*。欲證明此定理可考慮 *Jordan-Brauer* 定理（即 *Jordan curve* 定理在 E^3 中之推廣）然後想法造一個 *nonvanish normal vector field*（注意在 *Mobius strip* 上是造不出來的）。這個例子告訴我們：*Whiteney* 定理中鑲嵌空間的維度無法改善，詳情可參閱 *Sternberg's Lectures on differential geometry*。

註九：*Geodesic cusvature* 可定義如下：設 $\beta: I\rightarrow M$ 爲一 *unit speed* 曲線（M 可定向）則 $T=\beta'$ 爲一 *Tangent vector field*，旋轉 T $90°$ 得 N，則 kg 即爲使 $T'=kgN$ 成立之實值函數。（此想法類 *Frenet formule*）。

註十：所謂 *Euler-Poincare Characteristic* $x(M)$ 即一曲面 M 若可分爲有限個"四邊形區域"（*rectangular decomposition*），且令 v 表這些四邊形之頂點之個數，e 表邊數，f 表"四邊形"之個數，則 $x(M)=v-e+f$ 爲拓樸不變量（*Topological invariant*），（S^2 之 $x(M)$ 爲 2 *Torus* 爲 0 而 *Projeitive plane* 則等於 1），因此由 *Gauss-Bonnet* 定理知整高斯曲率爲一種拓樸不變量（*Topological invariant*）。

參考書：

1. *B.Oneill: Elementary differential geometry.*
2. *D.Laugwitz: Differential geometry & Riemannian geometry.*
3. *H.Hopf Differential geomctry in the lasge.*
4. *Sternberg: Lectures on the differential geometry.*
5. *Bishop & Golderberg: Tensors on manifold.*
6. *Auslander & Mackenzie: Introduction to differential manifold.*
7. *Normizu: Lie groups d Differential Geometvy.*
8. *Hicks: Notes on differential geometry.*

End

TWO Eqivalent Definitions of Arc Length

數二乙 葉樹華

關於弧長的定義，可有兩種選擇：

Ⅰ *By sup*；

Ⅱ *By limit process*.

由於Ⅰ比Ⅱ簡潔方便，故討論弧長性質時，多採用之。現在我們要證明的是，這兩種定義的邏輯同等。爲了便利起見，不妨重述 *rectifiable* 曲線之定義如下：

定義 設 $\alpha \in C$ on $[a, b]$ 描述一條 E_n 中的曲線 Γ。對於 $[a, b]$ 的每一分割

$$P = \{t_0, t_1, \cdots\cdots, t_m\}$$

點集合

$$\pi(P) = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in L[\vec{\alpha}(t_{k-1}), \vec{\alpha}(t_k)],\ k = 1, 2, \cdots\cdots, m\}$$

稱爲由 P 決定的一內接 *polygon*；以 $|\pi(P)|$ 表 $\pi(P)$ 之長而定義爲

$$|\pi(P)| = \sum_{k=1}^{m} |\vec{\alpha}(t_k) - \vec{\alpha}(t_{k-1})|$$

若存在一正數 M，使對所有 $[a, b]$ 的分割 P，皆得 $|\pi(P)| < M$ 則稱 Γ 爲 *rectifiable*，而定義 Γ 之弧長爲

$$Sup\{|\pi(P)| : P \in \mathcal{P}[a, b]\}$$

並以記號 $\Lambda\vec{\alpha}(a, b)$ 表之。

今欲證明，對任一正數 ϵ，存在一正數 δ，使對所有 $[a, b]$ 的分割 P，$|P| < \delta$

$$\Rightarrow \big|\, |\pi(P)| - \Lambda\vec{\alpha}(a, b) \big| < \epsilon$$

先證一個 *lemma*：

Lemma：1. $\vec{\alpha} \in C$ on $[a, b]$

2. $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$，

$\tilde{P} = \{t_0, t_1, \cdots, t_{m+1}\} \in \mathcal{P}[a, b]$，$m \geq 1$。

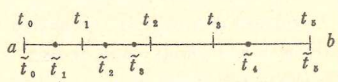
3. $P^* = P \cup \tilde{P}$

$\Rightarrow$ 1. $|\pi(P)| \leq |\pi(P^*)|$ 且 $|\pi(\tilde{P})| \leq |\pi(P^*)|$

2. $|\pi(P^*)| \leq |\pi(P)| + 2m \operatorname*{Max}_{|t-t'|<|p|} |\vec{\alpha}(t) - \vec{\alpha}(t')|$

Proof 由於 P^* 爲 P 及 $\tilde{P}$ 之精細分割（*refinement*），利用三角不等式，很容易就證得 *1*；我們主要的困難是在 *2* 的證明。

先把 P^* 所包含的子區間分爲兩類來討論。第一類所包含的子區間不含任何 $\tilde{P}$ 中的分點，亦即爲 P 的子區間；第二類所包含的子區間，至少有一端點爲 $\tilde{P}$ 之分點。請看下圖，或可得到一些直覺的了解。



故知 $|T(P^*)|$ 中所有相對於第一類子區間的項加起來一定不超過 $|\pi(P)|$；而所有相對於第二類子區間的項加起來一定不超過 $2m \operatorname*{Max}_{|t-t'|<|p|} |\vec{\alpha}(t) - \vec{\alpha}(t')|$。關於後者，我們解釋一下：由於 $\vec{\alpha}$ 爲閉區間上的連續函數，故亦爲均勻連續，而均勻連續就是說，若閉區間上某兩點之距離不超過某一定數時，則其對應點之距離亦不超過某一定數。若定義域上限制之距離爲 $|P|$，則值域上限制之距離爲 $\operatorname*{Max}_{|t-t'|<|p|} |\vec{\alpha}(t) - \vec{\alpha}(t')|$。由於第二類子區間之個數不超過 $2m$ 個，故相對於這類子區間的項加起來，一定不超過 $2m \operatorname*{Max}_{|t-t'|<|p|} |\alpha(t) - \alpha(t')|$

故得

$$|\pi(P^*)| \leq |\pi(P)| + 2m \operatorname*{Max}_{|t-t'|<|p|} |\vec{\alpha}(t) - \vec{\alpha}(t')|$$

問題得證。

Proposition. 設 $\vec{\alpha} \varepsilon C$ on $[a, b]$ 所描述的曲線 Γ 爲 *rectifiable* 則對任一 $\epsilon > 0$，存在一 $\delta > 0$ 使得

$$|P| < \delta \Rightarrow | \, |\pi(P)| - \Lambda_{\vec{\alpha}}(a, b) \, | < \epsilon$$

反之亦眞。

Proof. 因 $\Lambda_{\vec{\alpha}}(a, b) = Sup\{ |\pi(P)| \, | P \varepsilon \mathcal{P}[a, b] \}$，故對任一 $\epsilon > 0$，必存在一 $P_\epsilon \varepsilon \mathcal{P}[a, b]$ 使 $\Lambda_{\vec{\alpha}}(a, b) - \epsilon/2 < |\pi(P_\epsilon)| \le \Lambda_{\vec{\alpha}}(a, b)$。

設 $P_\epsilon = \{ t_0, t_1, \cdots, t_{m+1} \}$

對此 $\epsilon > 0$，亦可決定一 δ，使對所有 $t, t' \varepsilon [a, b]$ 且 $|t - t'| < \delta$，可得 $|\vec{\alpha}(t) - \vec{\alpha}(t')| < \epsilon/4m$。

由上之 *lemma*，對所有 $norm < \delta$ 之分割 P，可得下之不等式

$$|\pi(P_\epsilon)| \le |\pi(P)| + 2m \max_{|t-t'|<|P|} |\alpha(t) - \alpha(t')|$$

$$< |\pi(P)| + 2m \cdot \epsilon/4m$$

$$= |\pi(P)| + \epsilon/2$$

故 $\Lambda_{\vec{\alpha}}(a, b) - \epsilon/2 < |\pi(P)| + \epsilon/2$

得 $\Lambda_{\vec{\alpha}}(a, b) - \epsilon < |\pi(P)| \le \Lambda_{\vec{\alpha}}(a, b)$

亦卽，對所有 $|P| < \delta$，可得

$$| \, |\pi(P)| - \Lambda_{\vec{\alpha}}(a, b) \, | < \epsilon$$

逆定理之證明頗爲容易，不再贅述。

Remark 1 若 f 爲定義於閉區間上的實値連續函數，且 f 爲 *bounded variation*（照 *Apostal : Math. Analysis* 上的定義），亦可證明其與 ϵ，δ 的定義同等。證明過程完全與上述一樣。

Remark 2 讀過初微的朋友一定已熟悉，積分的定義也有兩種同等的方式。一種就是用 *Sup* 與 *inf*，卽上積分與下積分；另一種就是 *Riemann Sum*，此種定義卽爲一種趨近極限的過程。（參見 *Johnson : Calculus* P.224，Thm. 8.16）

本文亦可算是高微第八章習題 8－10 的解答，筆者是在 *Markushevich* 的複變第 253 頁找到提示。除此之外，筆者不知是否尙有更簡單而"正確"的證法。最後，要感謝胡老師的小考。由於小考的失敗，才刺激筆者作了這番整理。

As long as a branch of science offers an abundance of problems, so long it is alive; a lack of problems foreshadows extinction or the cessation of independent development.

Hilbert, D.

In mathematics as in others, to find one self lost in wonder at some manifestation is frequently the half of a new discovery.

— Dirichlet, P. G. L.

Gauss, Stoke, Green and Cauchy 定理簡介

數三乙 陳登源

這幾個定理在數學分析上所佔有的角色及其重要性，該是我們學數學的人所不能忽視的，由於它們在積分上的貢獻，使得它們在科學應用上更佔有極重要的地位，其在物理學上之貢獻，可自己在各種書本中發現。它們主要是能化重積分爲更簡的積分式，使在科學應用和數學本身能有更簡單的表式和極大的進展（*development*）。

本篇主要是描述這幾位數學家對這些定理的發展和演進，及各定理彼此間之密切的關係，至於各定理的證明，篇幅限制，將無法介紹。還有對同一定理，可能賦予各種不同的名稱，如在本文中所述之 *Gauss's theorem in 2-dimension* 有些書本稱其爲 *Stoke's theorem* 而亦有些書本稱其爲 *Green's thm* 其實，這些定理只是他們幾位數學家對此發表之先後而已；譬如在 *Apostal* 的 *Math Analysis* 中對 *Green's thm* 有個註解：*Actually, it (Green's thm) appeared much earlier in the works of Gauss (1813) and Lagrange (1760)*，若此，我們豈不是又要稱 *Green's thm* 爲 *Gauss* 或 *Lagrange thm* 了嗎？故對此我們可不必注意其係何氏定理。

現在我們簡述如下：

I. Gauss's theorem

(A) a. *Function f with one variable*

$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

此定理又稱爲 *Fundamental theorem of calculus.*

b. *two variable: i,e the above thm also holds in two dimensiong.*

$$\iint_R [f_x(x,y) + g_y(x,y)]\,dxdy = \int_{P(R)} \{f(x,y)\,dy - g(x,y)\,dx\}$$

此式亦可表爲下列形式：

$$\iint_R g_y(x,y)\,dxdy = -\int_{P(R)} g(x,y)\,dx \text{ and } \iint_R f_x(x,y)\,dxdy = \int_{P(R)} f(x,y)\,dy$$

註 1：*P(R) is the boundary enclosing the domaim R.*

註 2：*The above two theorems are both "a differentiation is cancelled by an integration" in the sense that double integrals of the form* $\iint_R f_x\,dxdy$ *or* $\iint_R g_y\,dxdy$ *ore transformed into integrals that are only taken around the boundary curue P(R) of R.*

c. *Gauss's thm in n-dimension.*

Let B be a region in n-dimensional $x_1 x_2 \cdots\cdots x_n$ *space and let its boundary S be given by an equation* $G(x_1 \cdots x_n) = 0$ *such that* $G \leqq 0$ *in B. Let the function* $a_i(x_1, \cdots, x_n)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ *be continuously differentiable in B, Then*

$$\iint \cdots \int_B \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n}\right) dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \int \cdots \int_S \left(a_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} + \cdots + a_n \frac{\partial x_n}{\partial v}\right) dS$$

where dS is the element of surface and $\partial xi / \partial v$ *are the derivatives of the coordinates with respect to the outward naronal, i,e*

$$\frac{\partial xi}{\partial v} = \frac{G\,xi}{\sqrt{G^2 xi + \cdots + G^2 x_n}}$$

(B) *Gauss's thm in terms of vector field.*

Let f(x,y) and g(x,y) be the components of the plane vector field A.

$div A = f_x(x,y) + g_y(x,y)$

Now we state the form as follow:

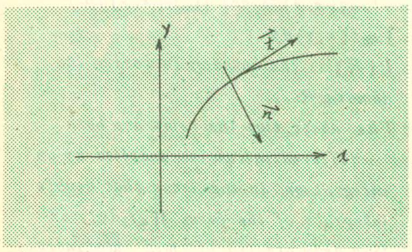
a. *The integral of the divergence of a plane vector field over a closed region R is egual to-the line integral, along the boundary, of the component of the vector field in the direction of the out-ward-drawn normal.*

〔*Outline of proof*〕: $div\, A = f_x(x,y) + g_y(x,y)$

$$\Longrightarrow \int_{P(R)} \{ f(x,y)\,dy - g(x,y)\,dx$$

$$= \int_{P(R)} \{ f(x,y)\dot{y} - g(x,y)\dot{x} \}\, ds$$

where $\dot{x} = dx/ds$, $\dot{y} = dy/ds$



S: are length of P(R) positive as the direction s increase.

Let t be plane vector with x-component x and y-component $\dot{y}$, $|\vec{t}|=1$, $\vec{n}$ *be plane vector coith x-component* $y(s)$ *and y-component*-$x(s)$, $|\vec{n}|=1$ $y(s)=\partial x/\partial n$, $-x(s)=\partial y/\partial n$ *where* $\partial/\partial n$ *denotes the differentiation in the direction of the outward-drawn normal.*

Hence $\iint_R (fx+gy)\,dxdy = \int_{PR} (f\frac{\partial x}{\partial n} + g\frac{\partial y}{\partial n})\, ds$

$\rightarrow \iint_R div\, A\, dxdy = \int_{P(R)} A n\, ds = \int_{P(R)} A_n\, ds$ ♯

b. *with curl-form to express Gauss's thm. The integral of the curl and of a plone vector field over a cloed region is egual to the integral of the tangential component taken round the boundary—This statement is also known as Stoke's thm in the plane.*

$$\iint_T (curl\, \vec{A})_n\, ds = \int_C \vec{A}_t\, ds$$

Ⅱ. Stoke's theorem

Gauss 定理和 *Green* 定理有密切的關係，它們在微分方程和流證力學如 *Givergence and intensity of flow* (參考 *p.373 reference* (1)) 方面有廣泛的應用。

From Gauss's thm, if we assume that u(x,y) and N(x,y) both have continuous derinaives of the first and second order in the regionR. then since

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv_x) = u_x v_x + uv_{xx} \text{ and } \frac{\partial}{\partial y}(uv_y) = u_y v_y + uv_{yy}$$

putting these two equation into Gauss's thm, we get Green's first theorem as fallow:

(1) $\iint_R (u_x v_x + u_y v_y)\, dxdy$

$= -\iint_R u\triangle v\, dxdy + \int_{PR} \{-uv_y d_x + uv_x dy\}$

where $\triangle v = v_{xx} + v_{yy}$ *is a Laplacian operator: if, in addition, we assume* u_{xx} *and* v_{yy} *are continuous functions, then we have*

(2) $\iint_R (u_x v_x + u_y v_y)\, dxdy$

$= -\iint_R v\triangle u\, dxdy + \int_{PR} \{-vu_y dx + vu_x dy\}$

(1)−(2) *we have*

(3) $\iint_R (u\triangle v - v\triangle u)\, dxdy$

$= \int_{PR} \{(vu_y - uv_y)dx - (vu_x - uv_x)dy\}$

the aboue formula(3) *is also known as Green's second thoarem Next, we state the Green's thm in 3-dimension as fallow:*

(4) $\iiint_T (v\triangle^2 v - v\triangle^2 u)\, dxdydz$

$$\iint_S = (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial v}{\partial n})\, d\sigma$$

$\triangle^2 =$ (*Laplace operator*)

where $d\sigma$ *denotes an element of the surfa-aceS which bounds the domain T and* $\partial/\partial n$ *denotes derivation along-the outward-dracon normal.*

〔*Notes*〕: *Green's thm for region bounded by rectifiable Jordan curues is discussed in detail on p.289. Math. Analysis by Apostal. Here we expressed another form of Green's thm in 3-dimension (See Analysis by phillips)*

Let $P(x.y.z)$, $Q(x.y.z)$, $R(x.y.z)$ *be three given integrands, T is a 3-dimensional domain, then if the functions P. Q. R.* $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$ *are all cotinuous throughout T and on S, its closed boundary surface, and if the surface be taken over the outer side of S, then*

$\iint_S (Pdydz+Qdzdx+Rdxdy)$

$=\iiint_T (\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\,dxdydz$ #

Ⅲ. Green's theorem

a. In plane: $\iint_R (\text{curl}\,\vec{A})_n\,dS = \int_{P(R)} \vec{A}_t\,ds$

s: are length of $P(R)$ increases in the direction of $P(R)$.

A_t: tangential component of $\vec{A}$ along $P(R)$ where $\vec{A}$ is a vector field, R is any plane region in space bounded by the curve $P(R)$, and $(\text{curl}\,\vec{A})_n$ is the component of the vcetor curl $\vec{A}$ in the direction of the normal to the plane containing R.

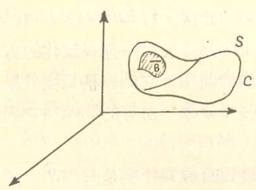
b. In space:

S: Oriented surface. $\vec{B}$: vector field on a neighborbood of S with component $\phi(x.y.z)$ $\varphi(x.y.z)$ and $\chi(x.y.z)$. then Stoke's thm implies $\iint(\text{curl}\,\vec{B})_n dS=\int_C \vec{B}_t ds$

$\rightarrow\iint_S \{(\frac{\partial\chi}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial z})dydz+(\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial\chi}{\partial x})dzdx$

$+(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial y})dxdy\}$

$=\int_C (\phi dx+\varphi dy+\chi dz)$



Ⅳ. Cauchy's integral theorem

This theorem is deduced mainly from Gauss's thm. we state it as fallow:

if C be a closed contour enclosing the domain D and if $f(z)=P(x.y)+iQ(x.y)$ be a regular functron of $z=x+iy$ i,e, (i) $f(z)$ is single valueed function and (ii) $f'(z)$ exists uniquely everywhere in D, then $\int_C f(z)dz=0$

〔Outline of proof〕: Here, we only express the related part of the application of Gauss's thm.

$\int_C f(z)dz=\int_C (p+iQ)(dx+idy)$

$=\int_C pdx-Qdy+i\int_C (Qdx+Pdy)$

$=\iint_D (-\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy+\iint_D(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y})\,dxdy$

$=0+0$

$=0$

〔Note〕: Past Ⅳ is only a special cass, all of the integral thearems concerned are discussed in Elements of Complex Vanables by Pennisi. The following two parts are the general case about integral theorem.

(A) Cauchy's integral theorem for a simple closed contour.

Let p be a simple closed contour and let $f(z)$ be analyti in on open set D containing T and its interior, Then

$\int_P f(z)dz=0$

(B) Cauchy's integrmula.

Let $f(z)$ be analytic within and on a simple closed contour, if z_0 is any point interior to C, then

$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$ wher the integral along C is taken in the positine direction.

以上只是將那些有關多變數的積分，將各種情形作一個綜合性的歸類和比較，錯誤之處，敬請指正。

Reference: (1) Couant: Differential and Integral Calculus (Vol Ⅰ.Ⅱ)

(2) PHILLIPS: Analysis.

(3) PENNISI: Elements of Complex Variables.

(4) Apostal: Math. Analysis.

(5) Borisenko: Vector and Tensor Analysis with application.

數三甲 陳 柏

泛函分析簡介

漫談分析問題的幾何化

泛函分析，在當代大數學家：德國*Hilbert*（1862～1943）匈牙利*Riesz*（1880～1956），波蘭*Banach*（1892～1945）等人領導下，正式創始於本世紀初期。它的基本概念與方法是十分緩慢地來自分析裏一些古老的領域，像變分學、常（偏）微分方程、富氏級數論（函數近似論）等。從某一角度來說，泛函分析裏討論的對象是函數而不是數，是函數之間的關係而不是特殊函數的研究。採用的方法是幾何化與抽象化的組合，首先將函數視作數（或點）然後將古典分析、代數與幾何裏討論數的觀念與方法抽象化以對付函數問題。我們將從趣味問題裏獲得對這些話意義的解釋。讓我們借用一段變分學的歷史故事作為本文的開始。

變分學的起源

1696年，瑞士數學家柏努利*John Bernwlli*（1667～1748）在當時最權威的科學季刊 *Acta Eruditorun*上提出著名的最速降落曲線問題：想像一個質點在黑板上，從定點A延著一曲線滑向另一（不在過A鉛垂線上的）點B。如果這質點僅受重力的影響而落下，那麼它將延著怎樣的曲線，才會使所需的降落時間為最短？初看之下，答案可能是直線，因為兩點間直線距離最短；或者是圓，因為它可以獲得最大的初加速度（伽利略曾這樣認為）。然而，柏努利聲稱他已獲得一個奇妙的解法，答案既不是直線，也不是圓。您猜是什麼？拋物線嗎？當時柏努利不願立刻發表答案，希望能够刺激當代數學家思考這類新問題，並且他特別向哥哥*James Bernoulli*（1654～1705）挑戰，那時他們正為了某些事情發生嚴重的衝突。他甚至公開批評哥哥沒有能力解決這問題。這問題立刻引起了數學家的興趣，它具有不同的特性：落下的時間隨著不同的曲線而變化，考慮的對象（變數）是所有通過A、B的曲線，而不是像初等微積分裏的變數是一個或多個數。

差不多整整過了一年，哥哥寫了篇論文作為答覆，答案是內擺線（圓延著直線滾動時，圓周上一點的軌跡）。這使得數學家們更為著迷，既使是這曲線本身也是剛發現不久的。同時，在論文結束時，哥哥也邀請當代數學家來思考一些更難的問題，譬如說：決定一曲線，使得一有定初速的質點延著它下降至另一鉛垂線（或者一曲線）所需時最短。由於對鉛垂線上一點可決定一條最速降落曲線，因此這問題要在衆多的最速降落曲線中找出一條費時最少的。而且特別提供了一筆獎金，徵求弟弟給予完滿的答案。這回似乎獎金被省了下來。此後，經*Euler*，*Langrange*，*Hilbert*等人的努力，發展出一種一般化的方法解決這類極大、極小值的問題，它們被稱為變分學。

下面是一些變分學 初等的問題和它們的解析描述：

①連接兩點的最短曲線為什麼是直線？（請證證看）
連接點$P_1(x_1, y_1)$ $P_2(x_2, y_2)$的曲線是$y=y(x)$ $x_1 \leq x \leq x_2$，且$y(x_i)=y_i$ $i=1,2$其長度是

$$I(y)=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y^1)^2dx}$$

，因此這問題要在所有這類曲線y中找出使$I(y)$為最小的。

②從很小的時候起，我們就曉得給一定長的平面曲線若要圍成最大的面積一定要圓形，為什麼？（同樣地，給予封閉定面積的曲線，如何才能有最大長度？）曲線方程式是$x=x(t)$ $y=y(t)$ $t_1 \leq t \leq t_2$ 且$x(t_1)=x(t_2)$ $y(t_1)=y(t_2)$

曲線長是$L(y)=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x')^2+(y')^2dt}$，其包圍

面積是 $I(y)=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} xy'-x'y\,dt$（以 Green Thm 證明）因此這問題要找出這類函數 y 使 $I(y)$ 值爲最大，$L(y)$ 爲定值的。

③在所有連接 xy 平面上兩點的曲線中，尋找其中使對 x 軸旋轉而能產生最小面積的曲面。這問題是找 $y=f(x)$ $x_1\leq x\leq x_2$ $y_1=f(x_1)$ $y_2=f(x_2)$ 且

$I(y)=2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ 爲最小的。（因爲 $I(y)$ 是旋轉曲面的面積）

④最速降落曲線問題：因質點從 $P_1(o,o)$ 到 $P(x,y)$ 運動距離 $ds=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ 速度 $V=\sqrt{2gy}$

（設初速爲 0，$\frac{1}{2}v^2=gy$）所以需時 $I(y)=\int\frac{ds}{v}$

$$=\int_0^{x_2}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}dx=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_2}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}dx$$

尋找曲線 $y=f(x)$ 且 $f(o)=0$，$f(x_2)=y_2$ 使得 $I(y)$ 值爲最小就是從點 $P_1(o,o)$ 到 $P_2(x_2,y_2)$ 的解答。

此外在微分幾何裏有許多變分學問題，譬如在曲面上求最短曲線（ie geodesic），或者 Plateau 問題：決定通過已予曲線的最小（面積）曲面。這些問題都要〞求某一實値函數的極値（極大或極小）〞，然而這些函數的定義域並不是數集合或 n 維空間的點集合，而是函數（曲線或曲面）所成的集合。我們如何求這種函數的極値呢？在初微裏有兩個定理分別被用來說明實變函數極値的解法與存在性：一個說明是 Fermat 定理：它告訴我們在極點若可微則 $df=0$，因此把極點的尋找轉變爲解 $df=0$ 方程式。另一個是 Weierstrass 定理在緊緻集（或是 bdd 的閉 closed 集如閉區間）上，連續函數必有極値。我們希望能够以類似的方法來討論變分學裏（以函數集爲定義域的）函數的極値。因而重新考慮〞什麼叫微分？〞它是否可以適用於以函數集爲定義域的函數？〞數集與函數集共同性質的研究是促使泛函分析誕生的一項重要因素。我們一方面凝聚在微分時眞正需要的性質，另一方面設法將數集所有的概念、性質拓展到函數集上。譬如兩個數可以加減乘除，那麽兩函數間也可這樣運算（不過，這是說兩函數如 f，g 運算成另一函數如 $f+g$，$f-g$ fg f/g 等）兩數之間是有距離的，因此函數間也被定義了度量距離的方法。每一數都有長度（與原點的距離）因此函數也有長度。以技術性的話語來說，它們都是 Banach space，一種可以度量長度的向量空間（或稱線性空間），（這種空間我們將逐漸詳細討論）它具有的性質是微分所必需的、基本的性質（也就是說它們是 essential 的），數集裏許多其它性質是不必要的。排除不必要的性質，凝聚 essential 的性質單獨研究而不計較對象本身是什麽（譬如不管它是點（數）還是函數），這種過程就是普遍化或抽象化。抽象的微分理論建立在 Banach Space，微分的意義成爲線性近似—以簡單的線性函數近似一般函數，好比以直線近以曲線。這樣一來變分學裏奇怪而新穎的問題就可以用「古老的方法的改良法」去解決。爲什麽數學家要不停地抽象，再抽象？抽象化的價値在那兒？從一些例子裏，我們可以看出來，抽象化絕不僅是一種方便的形式以便於符合邏輯上的要求使得理論嚴格正確，它應當是一種解決問題的方法，一種研究數學有力的工具。（有興趣的讀者還可以仔細看本期裏〞數學是怎樣建築起來的？〞一文。）以初微的類似方法來討論變分學極値存在問題，是由於以上的認識產生的自然構想。您覺得可行嗎？但是由於定義在數集上的函數，它的連續是被數與數間的鄰近性（距離）所決定的，因而若想討論 I-函數的連續也必需要在函數集之內定義一種鄰近性的關係或距離。這種新的結構已經不再計較它是數或函數而祇討論元素間的鄰近關係（與保持鄰近性的連續函數），稱爲拓撲空間（見後）。當鄰近性由距離所決定時，稱此空間爲距離空間。

解決函數問題的新方法：幾何化

數學家 E. T. Mc Shane 曾說：「在數學家試著要證明某些事之前，他必需要猜測一些事提供他證明，在他成功地證明之前，他必需決定證明的大致型式。」數學問題幾何化，給予一些預感提供可能發生的定理及證明方法。這種例子在數學上幾乎俯拾卽是。

初微的幾何化

初微裏非常漂亮地使用著幾何化方法。當一個高中同學接到這個問題：求函數 x^2+2x+3 的極小値，他會立刻配方成 $(x+1)^2+2$，而得到極小値爲 2。但是這種解法祇能算是一種沒有多大用處的〞技巧〞，因爲它缺乏普遍性，可應用的對象太少。在初微裏將函數以圖形畫出，由幾何上的觀察使我們得知極値點的切線必爲水平（或者切線斜率爲 0）借用幾何事實〞割線斜率趨近於切線斜率〞而定義函數的導數

$f'(x_0)$ 爲 $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$。因此而獲得一種求極值的普遍有力的方法：找 $f'=0$ 的點。在這過程裏函數的幾何圖形祇是一個跳板，但是它使得我們跳得又高又遠。笛卡兒之偉大在於這種認識：能够將複雜不易捉摸的函數以幾何圖形具體表示出來。這是一個很成功的幾何化的例子。初微理論許多部份建立在這跳板上。比如積分定義的形成基於幾何事實：曲線下的面積可以由長方形的面積來趨近，而獲得對應的函數事實 $\lim \Sigma f(x_i)\triangle t_i$ 還有梯形及 $Simpson$ 積分近似值求法等。一年級的學弟妹們初學微積分時不妨多欣賞多學習這種方法的運用，不要陷在 $\varepsilon-\delta$ 的技巧與算式當中。在研究複變時複數幾何化的跳板是 $Argand$ 圖示法它將複數表示在平面上，使得複數的幾何（拓撲）性質掘起，奠定了研究解析函數的基礎。

實數的幾何化

從結構的觀點來看，實數系是戰爭與和平奇妙的組合（$H.Weyl$的妙喩）。"戰爭"起因於它的運算，它成爲群、環、體、向量空間（或稱線性空間），線性代數。幾何化（或相反地直線座標化）爲實數系帶來了和平的景緻一直線的拓撲幾何性質，何謂拓撲學呢？除了常被提到的橡皮幾何學之外從另一較抽象的角度來說，它是研究"鄰近性"的幾何學。當一點 x 與一集合 A 無窮接近（鄰近）時我們稱 $x\in\bar{A}$（A 的閉包 $closure$ $i.e.$ $\bar{A}$ 爲所有與 A 無窮接近點所成集合）。一集合 X 稱爲拓撲空間（具有拓撲結構）若對任二子集合 A、B 而言：

(i) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$ i.e. A 或 B 的鄰近點必爲 $A\cup B$ 的。

(ii) $A\subset\bar{A}$ i.e. A 自身的點必與 A 集合無限接近。

(iii) 若 $A\subset B$，則 $\bar{A}\subset\bar{B}$

(iv) $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$，$\bar{\phi}=\phi$ 。

連續函數就是在兩個拓撲結構之間能保持鄰近性的函數。$i.e.$ 與 A 無限接近的點，其函數值 $f(x)$ 仍然與 $f(A)$ 無窮接近，或者簡寫爲 $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$ 。

利用以上的公設爲基礎，可以定義閉集、開集：一子集合 A 爲閉集若 $\bar{A}=A$，爲開集若其餘集爲閉集。並且可證明這種拓撲和平常我們在點集拓撲論裏學到的是一樣的。（參考 $Mendelson$）

在這兒附代提出一個問題：從拓撲的觀點來看，有理數集和實數集有什麽區別？

線性空間的幾何化

愈是抽象的結構，幾何化表現的功效就愈大。線性空間的特例 R^2（或 R^3）間接地反映起代數結構的幾何性質。在 R^2 裏，內積運算

$$\langle v, w\rangle=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2$$

決定了向量間的長度、角度（其餘弦值 $\cos\theta$）

$$\|v\|=\sqrt{v\cdot v} \qquad \cos\theta=\frac{v\cdot w}{\|v\|\|w\|}$$

因此介紹內積運算進入線性空間之後，便有可能"幾何化"代數結構。譬如選定一特殊線性空間 R_2 由所有定義於區間〔$0, 2\pi$〕且 f 與 $|f|^2$ 可黎曼積分的函數構成。內積運算定義爲

$$\langle f, g\rangle=\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx$$

那麽富氏級數的收斂問題，變成了是否 f 可表爲

$$e_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos n\pi, e_m=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin m\pi$$

等向量之和（應當說是線性結合）。求富氏係數成爲幾何問題：若一向量可表爲其它向量的線性結合，則在各向量上的投影（分量）爲何？所不同的在於過去一組垂直的單位向量是 e_1, e_2, e_3，而現在有了無限多 e_n。從前向量在各向量上的分量爲 $\langle V, e_i\rangle$ 所以富氏係數是 $\alpha_n=\langle f, e_n\rangle$ $\beta_m=\langle f, e_m\rangle$ 但是這必需基於無限維情形的幾何性質。抽象的 n 維與無限維歐氏空間是自然而有用的。譬如在解線性方程組

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

n 維空間 R^n 使我們簡化它爲

$$\begin{cases} \langle A_1, X\rangle=A_1\cdot X=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \langle A_n, X\rangle=A_n\cdot X=0 \quad A_i=(a_{i1},\cdots,a_{in}) \end{cases}$$

這過程好像用一個布袋 A_i 同時裝了 n 樣東西 $a_{i1}, \cdots, a_{in}$ 當然比用手直接抓著 n 樣分散的東西方便得多！

方程組的解成爲幾何問題：求垂直於每一 A_i 的向量。因此在平面 R^2 上，若 A_1, A_2 不共線，則祇有原點爲解。在空間 R^3 裏，若三 A_i 不共面，同樣祇有原點垂直於三者。我們需要 n 維空間類似於共線，共面的關係而幾何化地討論代數問題。無限維空間應該怎樣推廣呢？既然 n 維空間是 R^n，那麽無限維空間是不是

$$R^\infty=\{(x_1,\cdots x_n\cdots)\mid x_n\in R\}$$

所有數列的集合呢？由於每一向量的長度是 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2}$

要使這幾何性質有意義必需此無限級數收斂，因此自然的無限維空間不是 R^{∞} 而是它的子集 $l^2 space$（所有使前級數收斂的數列）。無限維空間需要額外地加入拓撲性質（指收斂性）的考慮！類似於 R^n 抽象為內積空積的過程，$l^2 space$ 的抽象結構就是 *Hilbert Space*，它在內積性質之外加上了一重要的拓撲性質──完備性（見後），我們因而有了一般的無限維幾何，它可適用於函數集合這點比 $l^2 space$ 好得多。無限維空間的幾何事實：

①一向量在一組座標向量上分量（投影）之和是否等於向量本身，相當於函數的富氏級數是否收斂於函數本身（不過它會依不同的鄰近關係而變化）。

②投影長度的平方和為大於向量自身長度的平方，相當於 *Bessel inequality*。

③垂足形成點至平面間的最短距離，相當於 *least square property*。（參考級數論課本）

④投影長度的平方和恰等於向量本身的長度平方──畢氏定理，相當於 *Pasval equality*。不過 $R_2 space$ 並不是 *Hilbert Space*（沒有完備性）好些漂亮的幾何性質像畢氏定理沒法成立。函數空間幾何化的成果吊足了味口，意猶未盡反倒令人大失所望。怎麼辦呢？如何使 $R_2 space$ 擴大成 *Hilbert Space* 呢

函數空間的幾何化

前面富氏級數牽涉函數空間幾何化的特殊例子所採用的幾何化方法來自實數的"戰爭面"，實際上可以直接把函數看作點，討論函數間的鄰近性（由距離如 $d(f,g)=[\int(f-g)^2dx]^{1/2}$ 來決定。）這種方法有什麼優點呢？我們再從存在問題的解決方法觀察。

在數學裏存在問題通常有兩種證明方法：其一是建構性的（*constructive*）另一則是非建構性的。建構性的證明偏重特殊物的研究，它往往是較為智巧的"奇技"，沒有一定的思考路線。然而非建構性的證明偏重整體性質的研究，往往是一種"方法"有易尋的思考途徑。

例①無理數的存在：建構性的證明，找出像 $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ 這類數，證明它們是無理數。非建構性的證明則比較有理數與實數集。拿元素的個數來說（*Cardinal number*，有理數是可數的，（與自然數一樣多）然而實數却是不可數的，不但因此而得證無理數存在，而且它較有理數多得多。或者從這兩集合的性質中挑出一個實數集擁有，但有理數集缺乏的性質（例如完備性）而得知此兩集合不等，故存在無理數。

例②超越數的存在：代數數是有理係數多項式的根。不是代數數的實數稱為超越數。超越數存在證明，建構性的如造出 *Liouville* 數

$\alpha=0.1100010000\cdots\cdots$

（其中 1 的位置在小數位為 k！處）

〔非建構的則比較代數數集與實數集元素個數的多寡。代數數集是可數的，因此超越數存在、〕

例③韋氏 *Weierstrass* 定理與函數：在分析裏，特殊函數的存在性證明也同樣地遇到這兩種情形。從前分析學家常誤解 *analytic expression*（三角，對數，多項等初等函數運算之結果及其極限，級數和）直到韋氏發現了兩件事實才被澄清。其一是韋氏定理：任一連續都可表為 *analytic expression* 是多項式序列的極限，（或者說：任一連續函數可被多項式無限近似）。另一是韋氏函數：找出一個連續但却點點都不可微的函數。韋氏定理的建構性證明是造出多項序列 *Bernstein polynomial*

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

n 為正整數

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

韋氏函數建構成

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b^k\cos a^k x \quad 0<b<1\ ,\ ab>1+\frac{3\pi}{2}$$

其後 *Van der Waerden* 建構了稍為簡單的 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[10^k x]}{10^k}$ $[10^k x]$ 是最大整數函數

函數空間的幾何化使上列兩事實非建構性的證明成為可能。第一件的證明是使多項式集合處在連續函數集合內" *dense* "這種處境就像有理數集在實數集內一樣，每一實數是可以表為有理數列的極限（或可被有理數任意接近。）第二件的證明是以 *Baire Category* 定理，使可微函數處在所有（週期）連續函數內；情況的對比相當於有理數在實數之內。這種新的解決方法蘊藏在幾何化與抽象化的組合運用：將函數視為點（幾何化）借用點集的幾何性質作為指引，最後將點集（數集）的關係推廣到函數集去（抽象化）。在常（偏）微分方程，積分方程裏也有許多類似的例子。

富氏分析幾何化的功臣：Lebesgue 積分

在 *1904* 年，*H. Lebesgue* 提出了新而重要的積分觀念，它是黎曼積分的推廣。它們有什麼不同呢？

從函數空間的幾何觀點來看：若 R_2 爲所有在〔$0,1$〕之間且 f 與 $|f|^2$ 可黎曼積分的（複值）函數，並定義內積 $<f,g>=\int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$ 則 R_2 成爲一有距離的線性空間（嚴格地說，應該是由對等關係 $f=g$ $a.e.$ 所決定的等值類）同樣地 *Lebesgue* 積分形成一 L_2 空間。這兩函數空間主要的區別在於完備性：R_2 沒有，但 L_2 却是完備的（*Hilbert Space*）。這使得 *Lebesgue* 積分非常有用，爲什麽呢？

何謂完備性：

分析裏經常遇到的問題是決定極限存在與否（譬如數列收斂，級數求和，函數是否可微，可積等）然而極限的存在問題却非常令人頭痛。根據定義，祇能讓我們驗證那些數是極限，那些不是。我們不能把每一個數逐一拿來驗證，因此常常不容易肯定極限到底是否存在，連續函數在分析裏爲什麽常被討論，那麽有用？從這觀點來說，因爲它的極限值就是函數值，方便極了！*Cauchy* 最早提供一種方法；如今被大大地推廣成爲分析裏討論極限存在的利器。他提出一種數列（*Cauchy* 序列）其項間距離愈來愈近。在 R^n 或 C^n 裏，每一 *Cauchy* 序列都收斂因此收斂問題不必苦心外求，祇要看自身項是否愈來愈近就好了。每一 *Cauchy* 序列皆收斂的距離空間，稱爲完備距離空間。若有模（長度）線性空間導出的距離空間爲完備，則稱爲 *Banach Space* 內積空間導出之距離空間爲完備，則稱爲 *Hilbert Space*。這類空間裏，極限存在的問題是可以被 *Cauchy - type* 的推論方式來決定的。

L_2 完備性的優點：

爲什麽 L_2 的完備性這麽重要？舉例來說：

例①設 $e_n=e^{2\pi nit}$ $0\leq t\leq 1$ $n=0,\pm1,\pm2\cdots$

則 e_n 爲垂直單位向量，已予一函數 f，其富氏係數

$$a_n=<f,e_n>=\int_0^1 f(t)\,e^{-2\pi nit}dt$$

爲 f 延著向量 e_n 的分量（由 *Bessel inequality* 可以證出）$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2$ 必收斂，且 $\Sigma a_n e_n$ 收斂於 f，但逆定理（*Riesz - Fischer Thm*）：若已予複數 a_n & $\Sigma|a_n|^2$ 收斂，則存在 f 使其富氏係數爲 a_n，是否成立呢？假如存在 f 的話，它必然是 $\Sigma a_n e_n$。這無限級數是 *Cauchy* 序列由於 L_2 的完備性，因此它必收斂，產生我們所需要的 f，但在 R_2 裏此極限不一定存在。

例②在 R_2 或 L_2 中畢氏定理（*Paseval equality*）是否成立？ie（$\|f\|^2=\Sigma|a_n|^2$）

若富氏級數 $\Sigma a_n e_n$ 收斂，則不論黎曼或 *Lebesgue* 積分都可以證出（可以嗎？）它們是收斂於 f 因此而得證

$$\|f\|^2=\|\Sigma a_n e_n\|^2=\Sigma|a_n|^2$$

由於級數 $\Sigma a_n e_n$ 爲 *Cauchy* 序列，在完備的 L_2 裏它收斂，但在 R_2 裏則不盡然。因此畢氏定理誕生在 L_2 而不在 R_2 內。

L_2 的完備性是使許多好定理成立決定性的一環。它使得 L_2 完全類似於歐氏空間。從幾何化的觀點來說：*Lebesgue* 積分的價值在於建立起跳板（橋樑）使數學家得以用幾何方法來研究富氏級數問題。這種方法形成了古典與近代富氏分析一大分野。

後記：

"採用歷史或舊有的數學題材作爲背景，發掘新理論的起源與動機或揣摩數學家研究問題時內心的思考過程及研究方法，藉以強調該理論擁有的主要概念與方法，並表明它特具的意義與精神"——這是本文寫作的原則。祇是一種大膽的，創造性的嘗試，希望您惠於指正。更望能拋磚引玉，形成新的風氣，而不過分偏重驗證定理與演算習題。最後，願與您分享內心的愉悅與自我期許。

附註①*Lebesgue* 在"積分觀念的發展"一文裏敍述了一段獲得 *Lebesgue* 積分的思想過程，從黎曼積分的缺點談到如何擴張積分觀念。（譯文見淡江數學第五期）。測度論爲積分的骨幹，黎曼積分基於 *Jordan* 測度；*Lebesgue* 積分則基於 *Lebesgue* 測度。"測度論介紹"一文裏，比較 *Jordan*，*Borel*，*Lebesgue* 測度的區別並略述它們與積分的關係。（見科學教育第五卷第三期）②林義雄老師提供複印了一份 *Laurent Schwartz*：*theory of distribution* 的可向係舘借閱。③變分學存在定理的證法請參考56年暑期科學研討會 *James Eells*：*On Existence Theorem of Calautus of Variation* 及 *R. Courant*：*Dirichlet principle & minimal Surface*。④由於興趣和時間關係原稿內第二部份：泛函分析基本定理的證明與分譜論的動機節略。⑤接近泛函分析的基礎僅包含分析、拓撲、線性代數和 *Lebesgue* 積分。書目像 *Lang* 的 *Analysis*（或 *Apostol* 的高微）*Simons* 的 *Intro to modern analysis & topobogy* 及 *Berberian* 的 *measure & integration* 等）。

數學家傳記

・數學界的女傑・

數三乙 沈堯培 譯

（I）蘇菲吉爾麥 (Sophie Germain)

蘇菲吉爾麥在*1776*年*4*月*1*日誕生於巴黎。當她還是個孩童的時候，並未產生任何她將有特別異乎尋常職業的跡象，但在*1789*年僅僅只有*13*歲的時候，一些事情偶然的巧合導致她對數學作了深入的研究。

*1789*年法國所有的經濟，社會及政治上的衝突，在三級會議裏都被帶到一個焦點。*6*月中產階級宣佈其所代表的即法國國民會議，*7*月*14*日巴士底監獄被攻破了，爲期十年革命性的浪潮終於展開了。由於幽居在家裏，蘇菲花了很多的時間在她父親的圖書館裏。一天她在孟吐克拉的數學史（*Montucla's History of Mathematics*）中偶然發現了關於阿基米得（*Archimede*）死的傳奇。在這兒她讀到了阿基米得—一位生長在西西里島喜奧克斯的希臘城市的士著—如何藉著設計機械去打擊敵人來幫助那個城市抵禦羅馬人，而且當這個城市在西元前*212*年被攻陷後，他又如何地因專心在沙地上研究數學圖形時被羅馬士兵以矛刺死。這個故事給蘇菲的印象極深。也只有一種科學—數學—能完完全全地集中一個人的心志而把周圍的事務完全忘却。也唯有這強且有支持力的學科可以幫助她對抗目前城市中的一切苦痛。她決心開始研究數學。

她的家人反對她的志願，堅持數學的研究不適合她的性別。堅強的她，每天半夜就起床一直研讀到天明。由於她手頭沒有比較好的書籍，因此她必須從那些充滿了漏洞缺點麥第克（*Medi-ocre*）的書中去學習那些基礎性的東西。然而她終於瞭解了分析的語言，同時在恐怖時代（*1793*～*1794*）她開始研究"微分"了。

艾克工藝學校（*The Ecole Polytechrique*）在*1794*創立，當時它並不招女生，但是蘇菲却偶然地得到了許多教授講授的筆記。拉格倫基（*Lagrange*）創新的分析很自然地吸引了她的注意，她利用學生們必須在課程結束時提出一份心得報告給教授的機會，以布拉克（*M. Le. Blanc*）的筆名將她的一份以通信的方式寄給拉格倫基（*Lagrange*）。拉格倫基（*Lagrange*）非常欣賞她的心得，在獲知她的身份後更推崇她爲年輕的解析家。自此以後她就自視爲一個數學家了。

*1801*年高斯（*Gauss's Dis-quisitiones arithmeticae*）發表了，*1804*年蘇菲就藉著「以她自己在算術中探討的成果呈送給他」爲由，與他取得聯絡，這一次她用的又是布拉克（*M. Le. Blanc*）的筆名。在幾封信之後，高斯（*Gauss*）對於她敏銳的觀察力有極深的印象，同時當她的身份被*French general Pernety*透露時，雖然蘇菲曾推崇過他，高斯仍毫不猶豫地恭維她的成就。

當蘇菲的注意力移轉至物質彈性時，她正處於數論探討的中點。那時工業上的進步正待在彈性物質的性質（變形後仍能恢復原來的大小形狀）上做一整套的研究，同時需要建造一個數學理論能應用在當一彈性物質受外力時，其內力的研究上。*18*世紀的末葉恩斯特，契拉第尼（*Ernst chladni*）——一位德國物理學家—以灑細砂與彎曲金屬片角的方式，致力於金屬片振動的研究。他發現它們產生了節狀的圖形。在*1809*年以前這些結果仍無法解釋，法國學院（*The Institute de France*）爲了發現這些振動現象的數學律，提供了一筆獎金。蘇菲接受了這項挑戰，不久即分別在*1811*，*1813*，*1815*年提出了三份這些現象理論上的解釋。雖然那些方程式並不能很嚴密地說明，但"彈性金屬片振動的報告"（*Memoir on the Viberations of Elastic Pla-tes*）仍爲她贏得了那筆獎金。

受了"成功"的鼓勵，蘇非又繼續去發展她那些公式的推論，而且重新開始她在數論上的工作。後者她致力於菲瑪(*Fermat*)最後的定理($x^n+y^n=z^n$假如$2<n$,正整數 此方程式無異於零的整數解)，證明出其在某種限制之下成立。她證明如果P是小於100的質奇數，這個方程式沒有能被P除盡的整數解。

除了前述著名的彈性物質之報告，蘇非又發表了許多其他的如1826年彈性面之本性，限度，擴張，1828年分析理論應用於彈性面的問題，1831年彈性面之曲率。至於她在數論上的幾個定理都被萊根特荷(*Legendre*)羅致於他第二版數論的附錄中。

蘇非在分析上的研究，乃是以相同的綜合力，纖細的分析特性應用於化學、物理、地理、歷史及哲學上。她在數學上的思想，從她的言行中都完全表露出來；在她的眼睛也是充滿了正義與道德之光。她在哲學上的工作有好些都是以文學形式之美與深度而著名。她在哲學史上的成就正如在數學史上一樣的輝煌。

雖然蘇非與高斯從未見過面，但她是那麼的爲他所尊敬著，甚至爲她從哥廷根大學(*University of Göttingen*)爭得名譽學位。很不幸，1831年6月26日在這項學位授與之前，她竟在巴黎與世長辭了。

(Ⅱ)婀杰克娃萊佛斯基
Sonja Kovaleusky

蘇菲亞，克文・科烏克夫斯基(*Sophia Koruin Krukousky*)，後來以婀杰—克哇萊佛斯基(*Sonja Kovaleusky*)這個名字著稱，在1850年1月15日生於莫斯科的一個皇族家中。當她才8歲的時候她的家搬到布里必諾(*Polibino*)的鄉下。也就是在那兒她渡過了童年生活同時接受了她的早期教育。她在一般課程方面的第一位老師描述她爲一個又甜又吸引人的女孩，有相當堅忍的個性，在她赤褐帶棕色的眼睛中閃耀著智慧及仁慈的光芒。當時她的數學課程包括兩年半的算術，三年半的代數與幾何，最後才是平面及立體幾何。

婀杰(*Sonja*)寫過兩個使她致力於數學研究的因素。第一是她的叔叔畢奧圖(*Pyotr*)他曾經在這方面努力過，並曾發表過將圓改爲正方及漸近線(指能越來越接近於一曲線之直線，但他們決不可能相交)等的問題，正如許多其他的事情一樣，這些刺激了她的想像力。第二是一些奇特的"糊壁紙"在布里必諾，那些原是用來裝飾兒童的房間的，然而那些現在已變爲她父親學生時代所學得的微分與積分之草稿，這些紙使她眩惑，她必須花許多的時間試著去解釋分離了的句子並找出這些記錄前後的次序。

1867年的秋天，婀杰去了聖彼得堡在那兒她隨著亞歷山大，史壯諾利布斯基(*Alexander Strannolyubsky*)——一位海軍學校的數學教員學習微積分。在那兒她曾向一位卓越的俄國數學家契依必斯夫(*Chebyshev*)請教她在數學上學習的途徑，但是當時俄國大學對於女學生是完全封閉的，沒有任何辦法能使她在本國繼續從事更進一步的研究。

在那時候遭遇在婀杰身上的問題，同樣地困擾著許許多多希望繼續進修並貢獻力量求國家進步的皇族女孩們。由於唯一的解決辦法就是到國外的大學去深造，但是這種想法同樣地被作父母的所反對，因此許多女孩就與同意她們這種想法的男孩們完成了名義上的婚姻。所謂的"妻子"即可自由地到國外去深造了。婀杰的姊姊安娜(*Anna*)認識一位願意幫助她們的人，他就是維拉底米爾・克望勒夫斯基(*Vladimir Kovalevsky*)，後來成爲一位著名的古生物學家。

維望底米爾對於婀杰在高深數學上的研究，語文上的造詣及她的才華與努力都有極深的印象。他們在1868年9月結了婚，第二年的春天就一同去了海登堡(*Heindelberg*)。在海登堡(1869～70)婀杰聽過科尼格斯柏呵克爾(*Konigsberger*)杜・柏意斯-漢義孟特(*Du Bois-Reymond*)在數學上，吉爾希夫(*Kirchoff*)漢爾摩喝爾次(*Helmhotz*)在物理學上的講演。然而科尼格斯柏呵克爾是卡爾-威斯壯爾斯(*Karl-Weierstrass*)(1815～97)從前的一個學生，受了她老師的鼓勵，婀杰極希望前往參加在柏林由許多著名數學教授的演講會。由於這個新的機會1870年8月她到了那兒，但她發現那所大學也同樣地不歡迎女性，卽使對她也不例外。因此她直接拜謁威斯壯爾斯，在這同時他又從科尼格斯柏呵克爾處獲得了一份關於婀杰的推薦書，因此特別爲她個人上了幾課。

婀杰很快地就變成了*Weiergtrass*所鍾愛的學生。他爲她一再地重述他在大學裏的講演，同她討論他尚未發表的工作，最近科學界的成就，復原性的問題，及幾何上的新理論。他曾寫信給一位朋友提到她對科學的勤勉

，努力，堅忍與感情是他任何一個學生所不及的。她跟著他學了四年（1870 ～1874 年）在那段日子裏她不但學遍了數學的大學課程並且發表了三項重要的報告(1)偏微分方程的理論(2)從第三類的亞倍爾積分化簡爲橢圓積分(3)對於拉布拉斯在 Saturn 環的探討作了更進一步的研究與觀察。

1874 年"哥廷根"大學（Gö-ttingen University）授哲學博士學位給姍杰，她所提出的論文是以偏微分方程爲主題，以其他兩項爲附，由於她論文的優異甚至免除了口試。

在獲得學位後克望勒夫斯基一家（Kovalevskys）回到了布里必諾，沒有幾個月姍杰的父親就去世了。他們計劃著到聖彼得堡生活工作，但他們的願望並沒有實現。原因是姍杰的財產已不敷支出了，她與維拉底米爾將他們所有的錢都投資於投機事業中。他們終於有了一段富裕的日子，在那段時間姍杰幾乎放棄了數學的興趣，但這並沒有持續太久。1878 年10月17日姍杰唯一的女兒弗法（Fufa）誕生了。同年的秋天她的熱誠又轉向數學，姍杰爲了某些工業上的意見寫信給威斯壯爾斯（Weierstrass）（已有三年沒寫信給他了）。1880 年10月她又爲了工業上的意見寫信給威斯壯爾斯（Weierstrass）在還沒收到回信之前她就決定到柏林去了。在威斯壯爾斯的建議之下她著手於晶體介質中光線傳導的問題。

1883 年的春天姍杰的丈夫在悲慘的環境下去世了。她正在巴黎這個消息給她的打擊極深。但在夏天以前她又重新開始她在數學上的探討，同時在 1883 年的 9 月在奧第哲（Odessa）的一項科學會議上她對在晶體介質裏光線折射的問題發表了她的發現。

1883 教授哥斯達・米塔克-來佛勒（Gosta Mittag-Le-ffler）邀請她到在史維登（S-weder）新成立的史特克荷勒姆大學（Stockholem Univer-sity）去演講，1884 年的春天她就在那兒對偏微分方程的理論發表了演說。學生們對她講解的完整性極爲讚佩，呈獻給她他們全體合影的相片，並以感佩的口氣表達他們內心的感激。由於這次講演的成功，她被要求擔任教授一職達五年之久。同時她又參加了米塔克-來佛勒（Mittag Leffler）於 1882 年所創立 the journal Acta Mathema-tica 編輯的工作。

1888 年—在38歲的年紀—姍杰完成了她最偉大的成就，也就是由法國學院（Institut de France）由於她對"物體環繞著一固定點旋轉的問題"的報告，推崇她爲 Prix Bordin。這篇論文一直被認爲是這個座右銘"說你所知道，作你當作的，將一定會產生某些成就的"。它不只是被認爲15篇論文中最好的，而且規定如果發現它有例外發生時，獎金將由原來的 3000 增至 5000 法郎。

1889 年的春天姍杰到史特克荷勒姆大學（Stockholem Uniuersity）擔任教授。1889 年12月 2 日她終於成爲蘇俄科學學會第一位女性會員。這也是她在學術上的成就第一次在俄國被承認。兩年後 1891 年 2 月10日姍杰克哇來佛斯基（Sonja Kov-alevsky）因染流行性感冒而去世了享年 41 歲。

姍杰的科學生命是短暫而輝煌的。她的成就完全由於她對研究數學的方法上有卓越的洞察力。作爲一個數學家她是屬於威斯壯爾斯（Weierstrass）一派的，而且她希望以她在數學上的成就去證明他在這方面見解的力量及可延伸的範圍。在史特克荷勒姆大學（Stockholem Univers-ity）她所教授的有(1)依據威氏（Weierstrass）之代數函數論(2)依據威氏之亞倍爾函數論(3)依據威氏之橢圓函數論。除了是一位天才數學家，姍杰也是位優異的作家。當她還是個小女孩時，即顯露過她有強烈的文學愛好，而且喜歡寫寫詩句。後來她將寫作轉變到研究數學上。在她發表了轉動問題後，她寫了（The Rayevsky Sisters）雷蕙夫斯基姊妹，那是描述她年輕時的生活。這項作品在 1889 年發表了。文學評論界對於她的內容與形式有極高評價。受了這項成功的刺激，她又繼續地寫，但由於她的早逝，大部分的作品都未完成。她對於任何她所從事的事情都有極大的熱誠，她卓越的能力與堅強的個性是永遠爲人們所懷念的。

"數學界的女傑"這篇文章是爲數學教師這本雜誌歷史性文章的部門所寫的，經由教授艾文斯（Eves）的介紹，它也曾經登載在算術教師的雜誌上過。作者荷爾・弗・萊克貝西（Rora．F Lacobacci）（紐約大學的哲學博士），現任於紐約，布克任聖約翰大學的數學系助理教授。（Saint-John's University，Br-ooklyn，New York）。

Emil Artin

數三乙吳家怡譯

Emil Artin 在 *1962* 年十月廿日逝於心臟病。他去世的消息使所有知道他的人十分震驚。事前沒有一點危險的預兆，使人難以相信如此一位富有活力的人，已經離我們而去了；如此一個偉大的心靈竟因軀體的毀滅而殞落了。

Artin 在 *1898* 年三月三日生於維也納，而在海伯克(*Reichberg*)長大，當時那兒還是奧地利帝國的一部分。他幼年的時候很寂寞，直到他在法國唸書時，才是他一生中最快樂的時間之一。他最喜歡回憶他在高中時對化學的濃厚興趣。他自已覺得，在十六歲以前並沒有顯出對數學的偏好。我常常想一位高中老師班上有像 *Artin* 這樣的學生，不知滋味如何。

第一次世界大戰，他入奧國軍隊。戰爭結束後，他在萊比錫大學讀書，*1921* 年在那兒修得博士學位。*1923* 年他便成爲漢堡大學的助理教授——這是德國大學起碼的學術職位，該職位有開課的權利。

從此 *Artin* 開始了一段最有力，最有收穫的數學工作，他很快的在 *1926* 年在學術行列中成爲一位正教授。漢堡大學——一個只有幾年歷史，當時德國最年輕的大學—當時已經成爲領導的學校之一。它在數學上的地位可由他們辦的那份刊物「漢堡師範學院數學論文」中看出。當然使這份雜誌成爲傑出刊物，*Artin* 有很大的貢獻。

這時期德國大學中的學術氣氛，一直爲所有人所懷念。*Artin* 由於他在各方面的廣泛興趣，成爲朋友中的模仿中心。他那奇怪的外號"*Ma*"—他喜歡這名字甚於他原來的名字 *Emil* —在當時十分通用。"*Ma*"是 *Mathematical* 的縮寫，對那些年輕人而言，他簡直就是數學的化身。

1929 年 *Artin* 與他的學生 *Natalie Jasny* 結婚。*Natalie*，數學家們叫她 *Natasha*，由於她的熱情又樂於助人；她的才華和風韻，使她本人在國際數學界中，也佔了一個特殊的地位。

Artin 做事從不半途而廢。他的家庭現在占了他生活的中心地位。當他的孩子們漸漸長大了，他便積極的參加他們各方面的教育。每天他都花好幾小時和他們在一起，他認爲以身作則是最重要的。

1933 年希特勒和納粹統治德國，憑着他愛好自由，正義和反對暴力的個性，他離開德國只是時間的問題。*1937* 年他們一家遷居美國。在 *Norte Dame* 大學任職一年後，他便受聘爲印地安娜大學的教授。他立刻着手將他在教學上的理想付諸實現，並且組織了一個積極的數學小組。雖然他很喜歡伯明頓，但是在 *1946* 年，他還是搬到了普林斯頓。對於一向以教書爲最重要的他，普林斯頓將使他在教育上有豐盛的成果。後來他在那兒果然有出人意外的收穫。

1956 年 *Artin* 有一年的休假—這是他一生中第一次。在這段時間以前，他一直避免訪問德國，到這時候，他接受哥廷根大學之邀，擔任一學期的"*Gauss Professor*"。另一學期他在漢堡大學任教。在哥廷根及漢堡都有許多他的朋友和同學，當他還是個年青的博士時，他曾在哥廷根—*Gauss*，*Riemman*，*Dirichlet*，*Hilbert*，*Minkowski* 和許多其他偉大數學家曾工作的地方—任教一年。至於漢堡，他曾在那兒參與建設一所新大學，他在那裏的幾年，是他一生中最有創作的日子。

我最後一次遇到他，是 *1958* 年在漢堡，他帶着滿意的口氣談他在美國的生活及工作。在普林斯頓，*John Tate*，*Serge Lang* 曾是他的學生。他說「這種機會並不多，並不是每個數學家都如此幸運」，他很滿意他在德國的新生活。他曾有計劃到美國，但是很明顯的漢堡依然是他的家。

一天下午，我們一面散步一面回憶往事，那天是個北部海港都市常有的多霧陰鬱的晚秋天氣。我們不停的穿過大街小巷尋找，起先我實在不知道找的是什麼，後來才明白原來是那些已經不存在的漢堡舊面目和那已逝的歲月。我相信在 *Artin* 眼前，一定有一幅年青的 *Artin* 走在相同街上的景像。

我現在試着來形容一下 *Artin* 在不同方面的個性，他是一個數學家兼藝術家。他喜歡數學同樣也深愛藝術。他是一位有數

學氣質的音樂家，也是位有藝術氣質的數學家。在談到一些新數學理論未來的發展時，他有時像位鋼琴家坐在琴旁奏他的幻想曲。有時一些理想十分清晰，而另一些却仍曖昧不明毫無線索可尋。到最後，我們才會感到整個交響曲是慢慢進展的，從一開始，就有一個偉大的默示。

我們一直認為一位眞正的偉大數學家也是一個偉人，而且他有一些特點一不只是數學方面，而是他整個天性中的特點。這對某些人或許不眞，但對 *Artin* 而言，他在藝術與數學方面的共同愛好，便是他的特點。

如果 *Artin* 不是一位數學家，他會在他所做的那方面有卓越的成就嗎？答案無可置疑一定是肯定的。他對化學，天文、音樂史方面均有令人驚訝的高深知識。有一次許多生物化學家，在他那篇" Σ *Xibraids*"的演講後表示，他們希望知道如此抽象的思考，對人類可能有什麼好處。他用生化上的理論仔細討論，最初似乎沒有實用價值，結果却很重要。當他為了興趣而造一架望遠鏡時，他學習許多在製造一些重要的現代儀器時所用的精細技巧。在另一方面，當他到日本訪問時，他對佛學有很大興趣。為了要回答他的問題，我們在日本的同事，往往必須請教著名的專家。在三十多年前，*Artin* 便曾讀過許多這方面的東西。

不論他做什麼都是專心一志，雖然他有很廣的興趣，但他的創作却都是數學方面的。數學是他表現特殊才能的天然工具，也是他那獨特的推理能力的發揮場所。他相信相同的推理可以用在各種科學上。有人認為數學本身是需說明的。但是音樂不需說明，那為什麼數學需要呢？

Artin 有各種不同的興趣，他能完全享受人生。他喜歡許多東西；新印象，有意思的談話，好吃的東西。他在伯明頓那些年，學生們在學期結束後，或他渡假的時候，聚在他家裏，教書對他是一個滿足的來源。

他和別人從來沒有隔閡，他有了解人的天性，是一個你可以依賴的人，是一位熱心的朋友。

對 *Artin* 而言，成為一位數學家，就是參與許多人聯合努力的工作；是繼續幾千年前開始的工作；是從舊的發現中放出新光芒；是為未來的發展準備新的路。不論從那一個標準去看，他都是個偉大的數學家。

本文節譯自 *Bulletin of Mathematics 1967. Tanuary Volume 73 No1.*

Oswald Veblen

數三乙劉旭東 譯

奧玆威爾特·威卜蘭教授於一九六〇年八月十日逝於緬因州布魯克林（*Brooklin Maine*）的夏季別墅裏。遺下了妻子伊莉莎白·理查生·威卜蘭（*Elizabeth Richardson Veblen*），四個妹妹和一個弟弟。他於一八八〇年六月二十四日生在愛阿華州的德克萊（*Decorah Iowa*）是四男四女八個孩子家庭中的老大。

他為本世紀最具影響力的數學家之一，一部份是由於他對這方面的貢獻，一部份是其非凡判斷與人格力量的影響。在他高尚水準中有個永恒的信念，並且不顧自己的利益準備去擁護這些水準。他以一種具有決定性的方式來貢獻，不僅在數學上，在美國一般學術上也都達到了臻善。他是那些將普林斯頓（*Princeton*）自一微弱的發展機緣中推進至一主要數學研究中心的負責人之一，僅有極少數的人在美國及世界數學的發展上擔任過這麼大的角色。

於他死後不久該高級研究所（*The Institute for Advanced Study*）的全體教員和董事們聯合銘誌如下：

"吾等對於本所及世界一主要研究人物的殞世深感惋惜。"

"威氏對於發展該所成為一超博士研究中心（*Post-doctoral research center*）具有偉大的影響，然而這僅是回溯到五十年前普林斯頓及全美的學術性工作於其萌發階段時的生涯的一部分。他在數學上的影響，超過了普林斯頓及整個國家至未來的數十年；但他的興趣和影響遠超過了他自己的領域，並且他在建立一般最高學術標準中是一股強大的力量。

"他喜愛樸實，憎惡虛偽。他將該所的聲望置於個人利益之前。他持有友誼的藝術，他的幫助對許許多多人的生涯都是具有決定性的。他那援助的手將破

全球許多的學術團體感激地惦記著。

"吾等感激其力量和勇氣，其非凡的智慧，無畏的廉正和篤實，其堅定的思想以及至要者乃其寬宏的友誼。"

於一九五五年該所成立二十五週年紀念時，校董會主席赫伯特・馬斯（*Herbert Maass*）說道："……我們均爲奧茲威爾特・威卜蘭教授的貢獻之幸運受益者，他極力促增數學學校的建立，他是維護本所原設的高尚水準的力量之塔。"

雖然威卜蘭有比一般人更多的朋友和崇拜者，但是對於那些不瞭解或只求名利而不跟隨其顯赫的學術理想的人所產生偶然的衝突，自然是免不了的。任一熟悉學術輿論的人都曉得對質的壓力是可怕的，而爲至善的奮鬥乃無窮盡。在學術實體內偏好和繁瑣的藉口均爲人所知悉的陳腔爛調，這些通常是在某人高尙動機的掩飾之下提出，但對威氏而言任何事的選擇除了最好的以外，不復存有任何正當的藉口。

威氏爲湯姆斯・安得生・威卜蘭（*Thomas Anderson Veblen*）與卡莉・若斯坦絲黛特・本德・威卜蘭（*Kari Thorsterinsdatter Bunde Veblen*）之孫，他們於一八四七年從挪威・威爾得里斯（*Velderes Norway*）遷至威斯康辛的奧沙基（*Ozaukee county, Wisconsin*），在密西根湖（*Lake Michigan*）西岸，而正於密耳瓦基（*Milwaukee*）之北。（威斯康辛於一八四八年成立爲州。）他們就住在這裏和希波干（*Sheboygan*）及曼尼托瓦克（*Manitowoc*）隣近，一直到一八六五年移入明尼蘇達的萊斯郡（*Rice county Minnesota*）的農場，農場約在明尼亞波利斯（*Minneapolis*）南方五十里處。他們有十二小孩，當時整個家庭就處於西北部艱苦拓荒者的那種情況之下。其中一個孩子叫若斯坦・本德・威卜蘭（*Thorstein Bunde Veblen*）（1857～1929）成爲一精明的經濟學家和社會理論家，另一叫安德魯・安得生・威卜蘭（*Andrew Anderson Vablen*）（1848～1932），安德魯・威卜蘭在一八七七年與吉兒絲蒂・弗金（*Kirstic Hongen*）（1851～1908）結婚而奧茲威爾特・威卜蘭就生於一八八〇年。吉兒絲蒂・弗金於一八五六年自挪威・哈林達爾（*Hallingdal Norway*）遷至明尼蘇達的西古得修（*Werstern Godhue County Minnesota*）的農場。弗家和威家就住在距明尼蘇達近郊不遠的納爾斯特雷德（*Nerstrand Minnesota*）農場，在這區域裏挪威移民佔絕大多數，甚至在今日隣人相遇仍常用挪語交談。

威氏出生時，他父親正在愛阿華州德克萊的馬丁路德學院執教數學和英文，其父自一八八一年至一八八三年在仲斯・霍金斯（*Johns Hokins*）從事研究工作，他於一八八三年與家眷遷入愛阿華城，便在愛阿華州立大學執教數學和物理。威氏就在愛城公立學校裏接受了他初中及高中的教育，並且於一八九八年在該州立大學完成了學士學位。當學生時在數學和射擊方面都曾得過獎，他還常樂道那些年中划船至愛阿華和密士失必河（*Mississippi*）的旅行。畢業後那年留在母校擔任助教，當他父親患了傷寒症時，他還替他父親補了一些鐘點。次年隨即到哈佛（*Harvard*），於一九〇〇年得到了他第二個學士學位。

他於一九〇〇年前往芝加哥（*Chicago*）開始著手研究工作，同時若斯坦・威卜蘭在那裏當政治學副教授。在芝加哥他選了布爾查（*Bolza*）、梅需克（*Maschke*）、和*E.H.* 摩耳（*E.H.Moore*）的數學課程，在哲學方面選了約翰・杜威（*John Dewey*）的課。於一九〇三年以在*E.H.* 摩耳的指導下有關幾何學基礎的論文得到了博士學位，並以數學會員的身份在芝加哥多呆了兩年，早於一九〇三年創立的芝加哥大學，便因此很快地在數學方面集中了一强大的教員陣容。這大約是在當從美國得到優良的數學研究訓練第一次成爲可能的時候；在這時期以前美洲人前往歐洲求在數學上做高深的研究是必要的。此時在芝加哥其他的一些學員有伯克霍夫・雷尼斯（*Birkhoff Lennes*）和*R.L.* 摩耳（*R.L.Moore*）。伯克霍夫於一九〇七年在芝加哥取得了博士學位，*R.L.* 摩耳於一九〇五年在威氏指導下得到了博士學位，其後當威氏在普大時他們兩人也都在那裏執教一段時期。

威氏於一九〇五年由當時普林斯頓大學校長伍德羅・威爾生（*Woodrow Wilson*）及教務長亨利・柏查特・懷恩（*Henry Burchard Fine*）引到普大來，就像簇新的"傳道的傢伙們"之一；這些人將加强普林斯頓的學術力量。他於一九一〇年陞爲專任教授，一九三二年威氏被指派到一剛成立而坐落於普林斯頓的高級研究所當教授。他在該所擔任教授之職直迄一九五〇年名譽退休，其後因在數學上建設性的興趣並藉著聯絡同事以及爲該所董事的地位繼續留在此研究所。

他對於普大及該研究所的貢獻就像對於一般學術輿論一樣有極大的貢獻，他是促使該大學設立數學系的主要力量之一。他的一些學生像*J.W.* 亞歷山大（*J.W. Alexander*），*A*・邱吉（*A Church*）和*T.Y.* 湯姆斯（*T.Y.Thomas*）等都加入該校的教員陣容。威氏於萊福需茲（*Lefschetz*）和其他一些精明人們的會晤中扮了一重要的角色，在仲斯家族（*Johns Family*）捐贈給該校的數學系建築・懷恩廳（

Fine Hall)裏也同樣居要位。對於研究所早期數學教員團人員的選擇他負了很大的責任，除了他以外，教員團中尚有亞歷山大（*Alexander*），愛因斯坦（*Einstein*），摩爾斯（*Morse*），凡・諾曼（*Von Neumann*)和魏爾（*Weyl*）。此外，對於該所集中在超博士研究工作方針的決定上他也負了很大的責任，在研究工作上所出的主意皆是他大學裏的經驗。自研究所的早期直到他去世，他一直是該所的一董事（在他晚年是個榮譽董事），又在辦理購買研究所現在所佔有的地區一事件，他擔負了大半的工作。

國家研究會（*The Natianal Research Council*）於一九二四年開始承認數學超博士社團，便是威氏的建議，這建議對數十名年青人的一生有極大的影響。這社團的遴選委員會，好幾年都是由伯克霍夫（*Birkhoff*），伯利斯（*Bliss*）與威氏所組成，這社團的基金目前來自國家科學基金會（*The National Science Foundation*）。這建議便是他對別人不斷的幫助、鼓勵的一典型例子，特別是對青年與隨地發掘的人材。他對遴選人員的工作做得既謹愼又徹底，在他公文匣內放有一份三頁長信的複寫抄本，這信是在每個年會之前寫給其他會員的，信裏提到他已整整花了三天的時間研究這些基金的用途，又說他已寫信給國內外的同事徵求他們對申請人的忠告辦法，並且已在普林斯頓和許多人論及此事。藉著對每個候選人所做的評審註釋着手初步規則的製定。委員會的決議決不是一種馬虎的態度，那是很明顯的。他審查人材的能力是衆所周知的，顯然地部份原因是基於徹底的尋求。

緊在希特勒（*Hitler*）崛起稱霸之後的那些年裏頭，威氏對於幫助在美國的許多精明外國數學家生活的另定安置乃是一中心人物。他的幫助主要是基於個人的立場，但部份是以委員會會員的身份。公文匣內裝著與國內外人士討論此事大量的信件，有不少是哈羅得・伯爾（*Harold Bohr*)與G.H.哈地（*G.H. Hardy*）之間的信函，這兩個人都是這方面的熱心者。數年後偶然收到來自他曾幫助過的人的一些謝函，而那是威氏早已忘懷的事。後來他在創立數學雜誌（*Mathematical Reviews*）亦極具影響，並且在這方面花了不少的心血。

威氏是英國和歐洲大陸的一偉大景仰者，同時同樣地是所有熟諳美國傳統與嘗巧於品評美國成就的人之一偉大讚佩者。

威氏在撰寫普大的懷恩教務長及G.D.伯克霍夫的訃聞時透露了一些他自己的事和許多有關前兩者的事情，而這些事都可用來形容他本人，對伯克霍夫的某一演講他有如下的批評：

"在這講題爲「美國數學五十年」的講演中，許多不易察覺的啓示裏，最生動的是伯氏對數學源由探討眞摯的熱誠與奧妙的領會，尤其是對「美國數學」更有收獲。可附帶說明的是將對美國數學的一種宗敎熱誠視爲一個「理由」是許多當時美國人的特徵。

於懷恩敎務長的訃聞中，他坦誠的評論如下：

"懷恩乃是那些將美國的數學從一幾近於空虛的狀態提進至與歐洲國家平分秋色的邊緣之一功臣，這早就需要一幻想式的努力來克服此逆境，當時的人爲此也不得不有所爭辯；缺乏鼓勵，缺乏指導，缺乏有關問題和當時科學狀況的認識，以及受科學以外其他各方面的環境壓力。但是將目前國內事務的平均狀況與世上最先進的地方相比較，再逐漸往後比較，我們便可重構一圖表，這將有助於我們欣賞他們的特質與成就。"

自一九二八年至一九二九年威氏在牛津（*Oxford*）任交換教授並在一九三二年於哥丁根（*Gottingen*），柏林（*Berlin*）及漢堡（*Hamburg*）講演，他與他的妻子便常到歐洲去旅行。

一九二三年至一九二四年間威氏任美國數學學會（*The American Mathematical Society*）會長，這時學會正處於一財政危機，對於幫助解除這危機和建立一捐助基金威氏是非常有力的。一九五〇年於哈佛召開的國際會議他擔任會長之職，這項榮譽深深地感動他，他始終認爲這是他對數學及獎學金所付巨大的努力與熱心所得之讚譽。他在該會開幕時所做簡短的致詞對他們的智慧及見識而言是非常値得一讀的。他從奧斯陸（*Oslo*），牛津（*Oxford*），漢堡（*Hamburg*），芝加哥，普林斯頓，愛丁堡（*Edinburgh*）及格拉斯哥（*Glasgow*）等地接受了許多榮譽學位。此外他是美國許多學術團體的榮譽會員並且也是丹麥，英國，法國，愛爾蘭，義大利，秘魯，波蘭及蘇格蘭等國的榮譽會員。

威卜蘭在一九〇八年與英國約克耶郡雕玆伯立（*Dewsbury Yorkshire England*）的伊利莎白・理查生（*Elizabeth Richardson*）結婚。他們倆是當她前往普林斯頓拜訪她哥哥歐文・理查生（*Owen Richardson*）時相遇的，歐文當時大普大教物理，後來歐文在君王學院（*King's College*），倫敦大學擔任教授並得了諾貝爾獎金，另一諾貝爾獎金得主是威氏的姻親，他妹妹莎羅特・理查生的丈夫，克林頓・約瑟夫・大衛生（*Chinton Joseph Daisson*）。

第一次世界大戰期間威氏曾任上尉，後來晉陞少校，是在浦魯英陣地（*Proving Ground*）負責砲

火射程及彈道工作。第二次大戰時他協助在亞伯丁 Aberdeen)成立一彈道工作研究組。

晚年時他眼睛部份失明，而只保留一部份輪廓的視覺，他逐漸地對幫助他自已和其他同患此痛苦的人閱讀所需的裝備之發展產生了興趣，其中一項裝備由美國盲人基金會予以製造生產。後來心臟積勞成疾，最後便因而去世。雖然那些病痛是令人沮喪，但威氏僅稍微縮減了以往的生活幅度而仍保持愉快並繼續他通常的興趣和活動，他的思想判斷仍是非常敏銳，他的言談仍是像以往一樣的耐人尋味。

攝影和對考古外行的興趣都是他的嗜好之一，他在一天中都喜歡森林和戶外活動。威氏夫婦將一叫赫隆場．亞伯來頓(Herrontown Arboretum)八十英畝的地區贈給新澤西的麥塞郡(Mercer County, New Jersey)作為新澤西自然森林區散步活動的場地。

威氏對其他的數學家有異常的幫助，他一生中對年青的數學家特別有興趣。夫婦倆在招待客人方面都很大方，久居普林斯頓大多數的數學家和許多學術人員曾都是他們在巴特路(Battle Road)或者在後來的赫隆場路(Herrontown Road)住處的客人。

不計在數學及獎學金方面所做極大的努力，他自己直接的貢獻乃是具體實在的。其最早的論文當中是有關於海涅．伯羅耳(Heine Borel)定理，在論文中他觀察到這定理可用於定分析裏有關極限，連續的定理證明中取代壓縮過程(The Pinching Proc ss)。這項觀察研究在他與N.J.雷尼斯(N.J.Lennes)合著的"單實變數之無窮小分析及函數導論"("In-troduction to rifinitesimal analysis,fuvctions of one real variable")一書中曾利用過，此書對於介紹給學生有關高等微積分和實數函數論定理中嚴密的證明具有很大的影響，這在當時的美國可說是較新穎的。

那幾何學基礎的論文是他在數學上第一主要的興趣之開端，而且還影響了他大部份的興趣，其一生中的著作幾乎全與幾何有關，在這裏面全部關連到精確與完整。他有能以一種明確中肯的態度來研究這些基礎而不致陷於數學要求外的細節中之能力。論文裏有一註脚是向他的導師E.H. 摩耳及校訂部份手稿的N.J.雷尼斯和R.L. 摩耳致謝的。他那些公設是以點和序(Points and Order)闡述的，有十二個公設被證明是獨立、絕對的，該論文導致後來數年中有關投影幾何學公設和有限投影幾何學論述的產生。或許可說他這方面的興趣已在兩册投影幾何學理達到了頂點，兩册中第一册是與J.W. 楊(J.W.Young)合著的，形式上楊也是第二册的合著者(但實際上由於其他職務使他無法分身)這兩本書是廣泛的被參考著。

威氏是個堅定的信徒，一一相信數學抽象的方法。在幾何學的著作中他曾計劃"不僅嚴密地證明每個定理而且還要顯示出使它為眞的空間及它所屬的幾何。"這兩册投影幾何學以令人讚佩的方式實現了他的計劃。"於第一册裏所有的定理都是正確的，不僅單在一般的實數和複數投影空間裏，而且也在一般的有理空間和有限空間。"此外，使得每個定理都成為眞確的那些假設也都列成一表，從這表中投影幾何與代數結構之間的關係便可辨別出來。

隨著他對幾何學基礎的興趣，他的興趣更擴展到代數拓樸學(Algebraic Topology)，在當時或稱位置分析(Analysis situs)。一九一二年以前他還寫了這方面的論文，那時這學科尚未普遍研究，因此聆聽威氏對那些在這較新領域裏籌劃的人的感觸所作的批評是有趣的。其著作對於鼓勵這方面其他人的效果比今日一般所了解的有更大的影響，好幾年裏他於這方面的論文和論文和會議講演都具有其影響力的，這些會議講稿一九一六年送到康橋(Cambridge)並在一九二二年出版，數年內均為這方面的最佳介紹讀物。

慢慢地威氏變成對微分幾何更有興趣，自一九二二年後他大半的論文都在這範圍內以及微分幾何與相對論的關連。除了論文外他在這方面也寫了三本小書，其中之一是和J.H.C.懷海德(J.H.C.Whitehe-ad)合著的。對於所有的著作，他始終堅持明晰，這也就是有利於將代數拓樸學置於穩固基礎上的特點，雖然彭加瑞(Poincare')及其他人已有輝煌的成就和貢獻，但它的一些方法和觀念仍是有些含糊不清。威氏在可微流形(Differential manifords)與微分幾何學公設方面的著作對這領域有直接的貢獻，並且有助於未來蓬勃的發展所需背景的創造。事實上一些未來的觀念可從這些書中尋得。在科學生涯的後幾年中他花了極大的心血在旋子(Spinors)上，而許多這方面的著作却從未出現過，或許是由於他堅持要求明晰和精確之故。

到末了威氏在觀點上仍保持甚年青，他常對年青人的一些批評感到興奮。上了年紀的人對於那偉大時期的影響已不復存在了，他不信這些鬼話。他年青的態度可能部份來自對青年的興趣；他堅信該研究所大半數學的生命新血是在通過該所的那股年青數學家的奔流中，同時他感到他對該研究所主要的辯護沒有其他的，而只是在該所對學術輿論，尤其是對美國學術輿論所有的評擊。

系友來鴻

楊盛成系友來函•••

親愛的同學們：

系刊的編者來信要我替系刊寫點稿件，可是一來我的國文一直不很好，在師大時也不是一個很用功的學生，並且來美國才一年半所學、所見都是有限得很，不敢在各位師長同學面前發表什麼意見。只能談一點來美後的感想。

當初我決心來美求學時，就已準備犧牲一切生活上的享受，專心讀書，所以對這裡生活的苦悶、緊張、單調倒也漸漸麻木了。這裡的教授一般只教 *2 - 3* 門課，不必在外頭兼一大堆課，可以專心於研究與教學，而且教學用具充足，圖書的齊全都很適宜於讀書研究。

在這裡教授對習題的要求很嚴，而且每份都親自批改。記得在師大時，只借作業來看，從不動手作的。如今才體會到″作習題″的重要。來美前家父曾訓示，要我做到″課前預習、上課用心聽、抄筆記、課後複習、作習題″。這五點對讀書實在有效。

記得在大學時常常問自己，數學系畢業除了教書外還能做什麼？其實如果*Calculus* 及 *Statistics* 學得好，就可以學做精算師。在美國許多大學都有*Actuary Science* （如 *Uni. of Iowa*，*Wisconsin*等）大多附設在統計，或數學系中。

在美國做一個正精算師要通過十次全國性的考試，年薪約在二、三萬間其中第一次考的是微積分及初等代數第二次爲統計其他的多屬法、商。即使一個大二學生，只要通過了第一次考試，都有可能被保險公司僱用（起薪約 *$7500* 一年）同時資助你繼續通過其餘的考試，每通過一次考試年薪就加幾百元。

除了這一行外，如果你微分方程、高微學得還不錯的話，只要畢業後加修些力學的課，就可以讀應用數學，月前曾有一位*Dept. of Mechanics and Hydraulics, Uni. of Iowa* 的教授，問我願不願意去他那裡讀 *Ph.D.*

除了精算學、運用數學、電子計算機外，還有許多可以讀的，例如我現在讀的*Operations Research*. 這*O.R.*是二次大戰的產物。是以統計、經濟的方法用電腦爲計算的工具在有關資料的蒐集後，以求對資源做最大的運用。例如如何分配兵力，何處設廠，運輸路線的安排等等幾乎可以用在任何工商業*Operation* 上。如果同學想知道什麼是*O.R.*有本書

Intro. to Operations Research (*Fredericks. Hillier. & Gerald T. Lieberman*)

可以給你一個大約的概念。另外有本

A first Course in Abstract Algebra (*Tohn B. Fraleigh*) *1967, 1968*

是本深入淺出的書概念也新。我相信適合大二、大三學生讀的。

還有一本*Advanced Calculus* (*Allen Devinatz, 1968*)也是一本很好的書，適於大三、大四的學生，最後我要報告各位師長同學：留美的師大校友，都讀得很好，而且都很關切母校的近況，開了些什麼課，用些什麼書，教授有沒有變動，但願有機會回母校替同學效力。

楊盛成

於南伊大

1971, 4, 6

Remark on Measurable Functions

The main purpose of this Remark is to give an answer of the following question:

Question:

Let $(X, \mathcal{M})$ be a measure space, $(Y, \mathcal{J})$ be a topologicol space and f be a mapping from X into Y.

Assume for each measurable function g with respect to $\{(X,\mathcal{M}), (Y,\mathcal{J})\}$, $Bg = \{x \mid x \in X, f(x) = g(x)\} \in \mathcal{M}$.

Is f a measurable function w.r.t. $\{(X,\mathcal{M}), (Y,\mathcal{J})\}$?

Besides, we get a class of continuous functions which are not measurable.

Definition: Let $(X, \mathcal{M})$ be a measure space, i. e. X be a set, $\mathcal{M}$ be a σ-algebra in X, $(Y, \mathcal{J})$ be a topological space.

$f: X \to Y$, a mapping from X into Y.

If $\forall V \in \mathcal{J}$ implies $f^{-1}(V) \in m$, then f is called a measurable function w.r.t. $\{(X,\mathcal{M}), (Y,\mathcal{J})\}$

It is clear if $X = Y = R$ (set of all real numbers), $\mathcal{M} = \{A \mid A \subset R$, A is Lebesgue measurable set$\}$, $\mathcal{J}$ = usual topology in R. If $X = R$ is also with usual topology, then every continuous function from X into Y is measurable w.r.t $\{(X,\mathcal{M}), (Y,\mathcal{J})\}$, but the converse does not hold.

Proposition 1:

Let $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{M} = \{A \mid A \subset X$, A or $X - A$ is countable$\}$, $\mathcal{J}$ = usual topology in R restricted on $[0,1]$ $f: X \to Y$ be any injective or surjective mapping.

Then f is a non-measurable function w.r.t. $\{(X,\mathcal{M}), (Y,\mathcal{J})\}$

This is a consequence of the following lemmas.

Lemma 1: If $g: X \to Y$ is measuroble w.r.t. $\{(X,\mathcal{M}), (Y,\mathcal{J})\}$, where $(X,\mathcal{M})$, $(Y,\mathcal{J})$ defined as proposition 1, then $\exists 1$ (one and only one) $y \in Y$, such that $g^{-1}(y)$ is uncountable.

Proof: It is obvious that at most one y has such property.

we need show the existence of such point.

Suppose no point $y \in Y$, $g^{-1}(y)$ is uncountoble.

Divide $[0,1]$ into $[0, \frac{1}{2}]$ and $[\frac{1}{2}, 1]$, either $g^{-1}[0, \frac{1}{2}]$ or $g^{-1}[\frac{1}{2}, 1]$ is uncountable, but not both.

Say $g^{-1}[0, \frac{1}{2}]$, let $I_1 = [0, \frac{1}{2}]$, then $g^{-1}(I_1)$ is uncountable, $g^{-1}(Y - I_1)$ is countable.

Divide $[0, \frac{1}{2}]$ again into $[0, \frac{1}{4}]$ and $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, either $g^{-1}[0, \frac{1}{4}]$ or $g^{-1}[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ is uncountable, but not both.

Say $g^{-1}[0, \frac{1}{4}]$, let $I_2 = [0, \frac{1}{4}]$ then $g^{-1}(I_2)$ is uncountable, $g^{-1}(Y - I_2)$ is countable.

Continue this process, we get a sequence of bounded closed intervals $I_n \subset [0,1]$

such that

(1) $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots\cdots \supset I_n \supset \cdots\cdots$

(2) $g^{-1}(I_n)$ is uncountoble, $g^{-1}(Y-I_n)$ is countable.

(3) $d(I_n)=1/2^n \to 0$ as $n\to\infty$ ("d" meanes diameter)

Hence we get $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n=\{p\}$, a point in $[0,1]$ $g^{-1}(p)=g^{-1}(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} g^{-1}(I_n)$, and

$X-\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} g^{-1}(I_n)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} g^{-1}(Y-I_n)$ is countoble. hence $g^{-1}(p)$ is uncountable,

a contradiction.

Lemma 2: Let $(X,\mathcal{M})$, $(Y,\mathcal{J})$, g be as proposition 1. Then $g(X)=\{g(x)\mid x\in X\}$ is countable. hence $g^{-1}(p)$ is uncounta untable, a contradiction.

Proof: Suppose P is the unique element of Y, such that $g^{-1}(p)$ is uncountable.

since $Y-\{p\}\in T$. then $K=g^{-1}(Y-\{p\})\in m$, so K or $X-K$ is countable, but $g^{-1}(p)=X-K$ is uncountable, hence K is countable.

Say $K=\{x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n,\cdots\}\subset X$

Let $y_n=g(x_n)$, $n=1,2,\cdots\cdots$,

Then $g(X)=\{p,y_1,y_2,\cdots\cdots,\cdots\}$ is countable. #

Prove prop. 1: It is clear m is a σ-algebra in X. If f is injective, then each $y\in Y$, $f^{-1}(y)=$ a point in X, or ϕ. By lemma 1, f is non-measurable. If f is surjective, then $f(X)=Y$ is uncountable, by lemma 2, f is also non-measurable. #

Cor. of lemma 2: Notations as lemma 1. If f is injective, then $Bg=\{x\mid x\in X, f(x)=g(x)\}\in m$.

Proof: By $g(X)$ is countable for each such g, and f is one to one, hence Bg is countoble, so $Bg\in\mathcal{M}$. #

If $(X,\mathcal{M})$ $(Y,\mathcal{J})$ as proposition 1. $0<a\leq 1$, n is positive integer, $f_n: X\to Y$ defined by $f_n(x)=ax^n$ $x\in X$; then f_n is non-measurable, and $B^n g\in m$,

where $B^n g=\{x\mid x\in X\ f_n(x)=g(x)\}$;

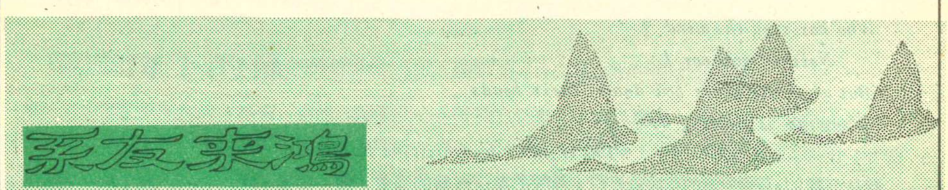
hence the answer of our question is "No". Actually, each injective function defined from X into Y are non-measurable w.r.t. $\{(X,\mathcal{M}),(Y,\mathcal{J})\}$ moreover, if $X=[0,1]$ is with a topoeogy as Y, then f_n are continuous, but not measurable. #

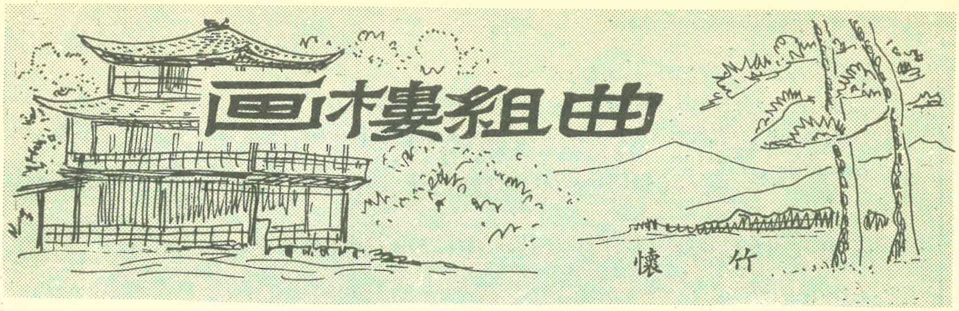
END

陳昭地於普大數學系

60年3月1日

(J.D.Chen) Purdue Univ.





大自然的歌

小鳥樹林爲家，蝴蝶花瓣爲屋，小溪大海爲依，只有風到處流浪，只有雲到處飄泊，濃霧來臨時，總是急得哭起來；唉！您懂得來安慰他們嗎！像安慰您懷裏的小花猫。

雲倦了，有風托着，風倦了，有海托着，海倦了，有堤可以依傍、堤倦了呢？旅人倦了呢？還有您心靈倦了呢？誰來扶偎着您呢？

風帶來幽幽的琴，雨帶來跳動的鍵，溪流帶來汨汨的笛，白鵝帶來低低的管，黑牛帶來雄雄的喇叭；大自然的一切組成了一首明媚、熱情、悲愴的歌；貝多芬的「田園」在心裏芬芳盛放，葛魯飛的「大峽谷」在心裏茁壯，雷斯比琪的「羅馬之泉」從心湖湧現。只須依留片刻，畫樓紅欄聽那自然的美妙，世界是如此的可愛，生命是多麽的富有。啊！我擁有的是整個的世界。

寂寞伴孤獨

我飛向未來，飛得太遠了，恐懼攫取住我。

當我張望四周，看！時間是我唯一的伴侶。

—*The Shake Zarathustra*

寂寞即自由（*Loneliness is free*）。我們的寂寞，是「我們」的脫俗，因此有些人是命定要永遠寂寞下去的；聖人是寂寞的，但他的寂寞不同於我們的寂寞。

造物者給我們一半的心，另外的一半遺失了，這一半的遺失跟着我們的成長擴大，因此寂寞伴時間而來，孤獨伴空間而來，我們必須尋找那一半的遺失；托斯卡尼尼尋到了他的魔棒，羅曼羅蘭找到他的理想主義，鄧肯尋就她的舞衣，請問你尋到什麽？是一個平凡的靜謐，是一個甜甜的夢，抑是一支華爾滋，一夜迷醉，一件紅衣，一片眩惑的刹那虛華？

不愛寂寞，却愛冒險…像一顆流星，只愛那瞬間驚惶的虛榮，而把自己焚成塵埃。耐不住寂寞孤獨的人，像愛冒險的流星，刹那便失去了光明。懂得寂寞，愛寂寞的人，才能超越孤獨，超越自已，在不平的人生道路，朝上攀登、攀登、向上、提升過你的星宿，啊！星光也在我之下了。

詩人的意境

Who has seen the wind ?
Neither you nor I
But when the trees bow down their heads.
The wind is passing by.

"*The Wind*" *by Christina Rosstti.*

詩是沉默的，就像默默的花放着芳香，靜靜的溪流緩緩的唱着，像一陣風，吹起你的心湖，你的白裳，然後

溜向晴空的樹梢間。因此詩來自朦朧、溫馨了新花的夢，來自一束陽光，溫暖凍了的樹根，來自一支遠方的箭，穿戳了奔放的心靈。

葉珊的「水之湄」

我已在這兒坐了四個下午了，
沒有人打這兒走過，別談足音了。
——（寂寞裏）
鳳尾草從足跟長到肩頭了
不爲什麼地掩住我
說淙淙的水聲是一項難遣的記憶
我只能讓它寫在駐足的雲朵上。
……………………………………

鳳尾草從足跟到肩，把四個下午的寂寞拉得好長，掩住了整個長長的午日；不可抹去的記憶一如淙淙的水流、不停的響在心裏，記憶只好寫在雲朵上，讓它飄泊在心的空間裏，只須偶而投下波心的盪漾。

秀陶的「夜歸」

冷冷地歸於冷冷
我的手緊握着一街的寧靜
緊握着一已的孤獨，
一枚小小的門匙
夜敲門前一瞬那樣地
煞有介事那樣地靜着
……………………………………

一街的空間，襯托着一枚小小的門匙，好像一街靜靜的空蕩，只佔着一已的孤獨。一個冷冷、清清、深深的夜、一個人的寂寞，孤獨只有一枚門匙伴着。

龐德的（*In the station of the Metro*）

The Appartition of . these faces in the crowd.
Petals on a wet, black bongh.

這個擁擠的人群裏，這個美麗的突現。
一如花瓣在潮濕裏，在暗淡的樹枝上。

像一朵霧中的蓮突現在迷濛的世界，一朵涉過汚泥而來的花瓣，這麼清新的展現着，像清晨朝霧裏閃爍的露珠，吐放着夜霧沉落時的光亮。這個花似的少女，不知嵌在他心中多深，多麼地難以遺忘。

詩人的心靈是崇高的，美好的，不須買山裏的畫片，已覺身在畫中，不須在麵包裏夾什麼，只須夾着一片微笑；連那小小的郵票，每天在現實世界奔忙的方塊上，都想着：「這小小的郵票上，有着她輕輕的一吻。」只須你細細的體會，你會喜歡詩人的心靈。你心裏的那脈幽徑似乎被發覺，被共鳴着，就像尹里葉說：

「每一個人心裏都有一座花園，
有的雖似荒蕪，但只須
留意，
仍可發現一脈幽徑……」

降下的幕

一束花，一簇的夢，紅的、綠的、白的、每朵花心、每顆的新夢。它來自霧裏，輕輕的，也悄悄地離去，花痴醉過，花后濃過，醉過，濃過總比沒有擁有好。一樹花、有你的、有我的、來探訪也好，遺忘也好；但願您的船在波湖中，尋到一支長篙，向更靑、更靑處漫溯，向更遠更遠處放歌。

望向這一年的歲月

黃奕杰

該過去的日子總會過去的，也應該過去了，然而，提起這一年來學會的工作，總不免有些感慨。我非常樂意藉以表白我們負責同學的心聲，雖然我們的聲音是如此地微弱。然而，這總是發自肺腑的震顫，它澎湃在我們所有負責同學的心靈深處。

我們深信沈默並不一定具有傳統上所有的價值，成熟也並不是一種虛僞，因此我們太願意說眞心話，太願意做眞心事，我們逃避一切假意的掩飾，儘管吃力不討好，儘管召來了些不悅耳的噪音，但站在盡本份的立場，我們不能不這樣做。我們固然不以唱高調自居，但也决不願意敷衍了事，我們只祈望去追求一種大學生活的理想，如果這種目標也正是這一代教育所企望於青年的，那麼，這也正表明了我們底幷言的心聲。一切的陌生，冷漠終將在時間的薰陶下變成熟悉、熱心。但是，這些披荊斬棘的過程，總得有人肶袱，面對這份重擔，負責的同學眞不知道該慶幸，還是迷惑。

回顧這一學年來學會的活動，値得一提的，體育方面，特別感謝莊榮恭同學的負責及各位熱心體育活動同學的帮助，排球重拾痛失兩載的王座，這份喜悅與榮耀分享了全系的師生，迄今那歡愉振憾之聲猶不絕於耳。籃球在高亞明同學負責下，榮登亞軍，打破以往的記錄。男子拔河的冠軍更充分印證了同學的合作與堅忍。其餘女子籃排球皆季軍，校慶大隊接力亞軍，女子田賽男子競賽也分獲二、三名，皆屬難能可貴，還有橄欖球在久疏練習情況下，勇奪亞軍，更是錦上添花。

康樂方面，除了迎新慣例的園遊會外，系郊遊當屬一大特色。從籌劃到就緒費時三週，特別感謝許建志同學的負責與數二甲同學的協助得以順利完成。三輛遊覽車滿載着一佰五十位同學暢遊石門水庫。更難得的是康主任與邱日盛老師能撥冗參加生色不少。今後一個多月內，尙有歡送畢業生晚會，拜望各位同學的協助使其圓滿完成。

蟬鳴聲響，又是夏季了，逝去了三月裏嫩草的菁新，花香馥郁，披上了五月向晚裏臨別的氣息，看見校門口的花開花謝，迴蕩着難耐的意味，一種悵然若失之感，明年此刻有再花開的時候，那將是遠行的時刻，我誠願你記得也好，最好你忘記，在這交會時互放的光亮。

五十九年度數學學會組織表

理事長：黃奕杰（數三乙）
系刊主編：陳　柏（數三甲）
康樂股長：許建志（數二甲）
體育股長：莊榮恭（數三乙）
文教股長：紀嶸崧（數三乙）
衛生股長：沈堯培（數三乙）
總務股長：蔡銘珊（數二甲）
系館管理員：陳登源（數三乙）　蔡子良（數二乙）
理事：沈仲一　張英傑　謝慶興　徐華美　林玉斌　賴雲英　李政貴
李竹光　施能强　鄧賓生　陳博鏞　楊維邦　陳文瑛　許建志
陳丁進　葉樹華　李宗卿　黃和玲　蕭　月　曹一之　朱治平
蔡福富　陳得發　詹紫雲　方忠和
常務監事：劉家興（數四甲）
監事：蘇柏林　洪榮洲　許恒敬　郭伯嘉
楊　揚　張四村　王大有

數 學 系 刊 第5期

師大訓課刊字130號

發 行 人：康洪元

出 版 者：國立台灣師範大學數學學會

學會負責人：黃奕杰

主 編：陳 柏

編 輯：紀爔崧 施能强

葉樹華 洪萬生

印 刷 者：瑞明彩色印刷廠有限公司

地址：台北市康定路173巷33號

電話：三八八九二八

中華民國六十年六月二日出版