數學系刊

4

Department of Mathematics
National Taiwan Normal University

不 連 續 集

康 洪 元

1.標題有“濫用名詞”之弊，不得已而用之，不足取效。

2.數學系刊，為同學的園地，我主張全由同學自己來耕耘，不勞老師越俎代庖。

3.要了解數學教育是什麼一回事，必要條件是閱讀一點有關Principles ofmathematics.的言論，否則，一涉及問題，就令識者有隔靴搔癢，啼笑皆非之感。

4.既然進了師大數學系，對數學教育一些Common notion，有了解的必要，否則作“經師”尙嫌不足，遑論為“人師”。

5.教數學的目的，絕不是把學生變為一本數學辭典，而是教學生會思想，有判斷能力。培養學生的“Sound judgement”是隨時隨地應該注意的。

6.我所想像的中學“新數學”是利用簡易的集合概念，在適當的情況下，把算術代數幾何，貫穿在一起，拋棄那些與近代數學無關的教材，代換一些急切需要而能為中學生所接受的教材。

7.樊畿先生說，三把椅子與三把椅子所成的集合，是用不着要小孩子去分辨的，胡世楨先生在其所著的Elements of modern algebra一書中寫明：“On logical grounds, it is necessary to distinguish between object x and the set $\{x\}$. However, as a matter of notational convenience, we will freguently use the same symbol x for an object x and the singleton $\{x\}$ which consists of this object x。目前，有些人把數學中很多的“trivial cases”當作重要問題來大作文章，看了樊，胡兩先生的意見，似乎應當知所警惕，如果要認為這兩先生的意見還不足為法的話，我想這人不是狂妄，便是無知，“小子鳴鼓而攻之可也。”

8.如果一個數學教師，看懂了SMSG教材，又了解一點美國國情，就必能欣賞SMSG的優點，再用一點思想，配合我國國情，來謙虛的從事數學研究工作，對我們數學教育改革之推行，必大有裨益，而造福下一代了。

9.數學雖為演繹科學，但對初學而言，仍得儘量採用直觀與歸納，中外學者，其所以主張，初學幾何，應以實驗入手，其故在此，項武義先生曾說：“……名詞之意義，有賴於直觀，……加一些老教材中的“實驗幾何”，可以幫助學生把握這些幾何觀念。“可惜有些人總認為凡是容易的教材都是無聊的，對取材問題，茫然無知，還要自以為是，這是數學教育改革中最大絆脚石。

10.自卑感表現於外，往往是惺惺作態，時下青年流行著“蓋”我不知道是否有自卑的因素。我想，若不是為了“輕鬆愉快”，還以少“蓋”為妙。

11.Continuous最為有用，既名“不連續集”，就算是 Improper，應該少寫，惟望同學有以思之，“學而不思則罔也。”

致國外系友

各位系友：

雖然我們進師大數學系以後，從書本上，從老師那兒以及同學的相互討論上學到不少東西。但是相對於今天數學領域日新月異的發展，這點東西實在太少了。所以我們非常希望各位學長能抽空與本系聯絡接觸，站在過來人的角度，以各位在國外的寶貴見聞與心得指點我們。更希望各位在可能的情形下，回到本系出任教職，誨育我們這一代的師大數學系。

敬　祝

學　安

系刊編輯

代表全體同學　謹上

****

目　　錄

公設化理論簡介

～獻給大一新生～

數四　賴世倫

在人類思想中存在著一個大道理。這大道理在古希臘歐幾里得時代，首次以隱蔽的方式與世人見面。而在以後的兩千多年中，隨著人們的探討與發展，確立了它超然的地位。於今道理的重要部份均已顯現並應用到廣大的知識界中。爲了强調其重要性，吾人特稱此道理爲「公設化觀念」（The Concept of Axiomatization）。

一、歐幾里得時期

歐幾里得（Euclid）將古希臘豐富的幾何結果整理之，而寫了一部叫Elements的書。書中有一個構想是前人所未曾使用過的「用最少量的語式，推衍出整部的幾何知識」他實踐這構想的過程這這樣的；先界定一些「觀念」（譬如點，線）的意義，（e.g 定義線爲具有長度而無寬度的個體）而這些「觀念」，在概念上却是無法再予以分割了。隨著便展出一些不同的語句，有些「標著公理」(Axiom)，有些則標著「假說」（Postulate）。很明顯的，那些所謂「公理」（註一）的是指在所有科學中恒眞的「思考原則」（註二）（e.g 一條公理斷言，與某事件相等的諸事件，彼此間必相等。）而「假設」則專指那些在幾何學中至終不能被證明的斷言。（e.g）有一條假說斷言在空間兩個不同的點必能爲一直線通過）。於是定理就在這些定義，假說下依「公理」（實際上就是方法論中的三段論法），相繼的推衍而出，並在適當的地方，應用先前已出現過的定理、定義以介入新的定義以簡化觀念（譬如定義「鈍角」爲大於直角的角）歐氏的構想獲得了以簡馭繁的效果。

二、Bolyai和Lobachevsky時期

當時希臘人研究幾何的目的，是欲求瞭解物理空間的眞實特性，因此人們對於幾何的觀念始終局限在物理空間內。歐氏當然也不例外。他在定理的證明中往往引進了一些假設，這些假設雖然在直觀的物理空間中顯然爲眞的，但却無法用最先的假說爲基礎以三段論法推衍而出。隨著時間推移，人們對於幾何的觀念漸漸有了轉變。十五世紀中葉Bolyai 和 Lobechevsky 各別而同時地發現了非歐幾何。依照傳統的觀念，非歐幾何亦是以空間爲研究的對象。它除了否認歐氏幾何的平行假說外，其他諸假設與歐氏的完全一樣。歐氏平行假說爲：「在一平面上，點A若不在直線 l 上，則有且僅有一條過 A 且平行於 l 之直線」Bolyai 與Lobachevsky 摒除了這一信仰，而代之以另一假說「在一平面上，點 A 若不在直線 l 上，則至少有兩條過 A 的直線，平行於 l」很明顯的，在直觀上，吾人很難相信後者在物理空間內的眞實性。然而從物理空間可量度的部份爲基礎，吾人又實在無法量出當物理空間分別假設爲此二空間時的差異。同時這兩空間在個自獨立的情況下，迄未產生過任何矛盾。這項結果，使得當時的人們相信物理世界與幾何學間的關係可能並不如最初想像的那樣密切

。事實上，非歐幾何的發現是人類思想史上個重大的里程碑，因爲非歐幾何使得人類偉大的創造性思考第一次擺脫了物理空間的羈絆，而在往後的歲月中，使幾何學發揮到了最高的境界，並導致了近代初基觀念（如點、線等不可分割的觀念）與眞實意義的分離。

西元一八七一年，Felix Klein 爲非歐幾何提供了一套「模子」（Model）：他定義「平面」爲歐氏平面上固定圓的內部。「點」爲在此固定圓內的「歐氏點」（即歐氏平面上的點），「直線」爲在這圓內不含端點的歐氏截線，並採用一套 Cayley 於一八五九年發展的公式，以數量來計算距離和角（這 角度和距離意義的改變，當然改變了平行的意義）經過了這意義上的變換，所有非歐平面幾何的假設（因而所有的定理）相對於歐氏平面幾何皆變爲眞。這一事實的本意是說非歐幾何至少和歐氏幾何「一樣」的眞。但是眞實上它却更深一層的提示吾人，在一幾何系統中（此爲非歐幾何），若變換其初基觀念的意義，而固定其推衍的結構是可能的。至於吾人已看出在一幾何系統中，意義並不是頂要緊的，要緊的是那恒常不變的推衍結構，這項瞭解導至今日「公設化理論」觀念的產生。

三、公設化理論

什麼是「公設化」理論？公設化理論具有一最重要的特點，亦即眞實世界中的眞假概念在理論討論的範圍內變得毫無意義。此理論必須具備有一組固定的符號，相當於點、線等不可分割觀念在幾何中所扮演的角色一樣，稱切基符號（Primitive Symble）及一組公理（又稱公設）（Axioms） 在此處公理相當於先前所說的假設）每一公理僅由初基符號與一些邏輯上的量化及連接符號所組成（譬如在歐氏幾何平行公設中，「平面」「點」「線」及「通過」爲初基觀念（註三）其他「有且僅有」，「若…則」，均屬邏輯上的連接字）而其中有意義的結果只是那些稱爲定理的語句。所謂「定理」就是任何經由公設單獨的依邏輯推衍而得到的語句。這一層欲要更嚴格的定義，不得不先解釋什麼是「證明」？所謂「證明」就是一系列有窮而經過秩序排列的語句〔S_1 S_2 ……S_k〕其中的 S_i 或爲公設或可由一個甚至一個以上已出現過的 S_j，$j<i$，依邏輯系統中的推論規則推衍得到，於是「定理」就是在一「證明」中最後的那條語句。至於如何的使公設化理論具有意義，那全得靠「翻譯」了，亦即將切基觀念賦予實在的意義。由於理論中的定理是由公設單獨的依邏輯推衍得到，因此翻譯後的公設若在實在世界中爲眞，則定理亦必爲眞。

在一般大學（甚且中學）的數學教科書中，代數系統（如群，環，向量空間）和拓撲空間均是典型的公設化理論。但是當你在欣賞了它們的邏輯結構之餘，可曾進一步的去思索到底是什麼源頭使得數學家有如此豐富的靈感去建造該理論？我以爲這一點的認識，對學習與把握整個抽象理論，有莫大的助益。且讓我們先看看數學家到底是如何去造公設化理論的：在幾個表面上看似毫不相干的場合（譬如在幾個實例或理論中），數學家首先觀察到一些共同或類似的概念以及一些反覆出現的論據。隨著他便企圖將這些概念和方法抽離出，使成一公設化理論。這工作的第一步是先挑出幾樣最具有代表性的實例（或理論）稱爲「主要實例」（或主要理論），以作爲造公設化理論的「基準點」。因爲該理論至終將是一組毫無意義的符號（或毫無意義的集合或關係），因此若欲抽象得不離譜，亦即涵蓋了主要的概念，唯有在建造的過程中，時時地與主例相比較。第二步就是分析那些共同概念與方法。找出那些基本的概念和其它能藉助基本概念表示出的概念。然後予以符號化（命名），代表前者的符號稱爲「初基符號」（Primitive Symbles）而代表後者的則稱「經過定義後的符號」（defined symbles）。第三步就是將那些在主要實例（或主要理論）中，牽涉到共同概念的性質和定理，重行的整理而「翻譯」成僅由 primitive symble與 defined symble （

當然還包括了些集合論與尋常邏輯中的概念）所編織成的語句。至此，他很可能就找到了一個本身值得研究但却涵蓋了大部份甚且全部原先他所考慮過的實例的理論。拓撲空間（主要實例即 metric space 和 cube ）和代數中常見的群，環與向量空間等理論基礎，就是依照這個方式，經歷了無數次的試驗，繼續的再統一，再抽象，擴充與推廣而後發展成的。

經由前面的討論，吾人對於公設化理論和它主要實例（或主要理論）間的關係，有下列幾點認識：

㈠對一公設化理論而言，主要實例（或理論）是它定義與可能定理的潛在來源。換句話說，藉助實例，往往能窺探出隱藏在抽象理論中的道理。

※㈡由於公設化理論內容的發展是純邏輯的，因此一個成功的理論（此指；就所欲抽離的概念而言，涵蓋了大部份甚且全部的實例）即意謂著對該相關概念『本質』的眞正瞭解。

註一：此處所用『公理』之名詞，在本篇內應屬特殊用法，『公理』的一般用法是與『假說』同。

註二：此處『思考原則』實際上是指方法論中的『三段論法』。

註三：西元一九〇五年Hilbert正式的完成了歐氏幾何的公設化理論。在此理論中，有六個初基觀念　即點（Point）線（Line）面（Plane）通過關係（Incidence ）（即「直線通過點」或「點在直線上」的關係）介乎關係（Betweeness）（譬如在一條直線上，相異兩點間任意一點與該二點產生介乎關係）以及對應關係（Congrunence）於是「平行關係」可藉點，線及通過關係來定義……詳細內容請參閱〔Newson〕page 90。

參考資料

① Robert. R. Stoll　Set Theory & Logic.

主篇的主要構想是出自該書第五章。

② Newsom　The Foundation and Fundamental. Concepts of Mathematics.

火腿三文治（Ham Sandwich Theorem）又稱模壓定理（Squeeze Theorem）。相信各位對它不一定不會有陌生的感覺，因爲它在數學極限部門上扮演了也算很重要的角色。它的外觀，有如用溼紙去模壓碑銘一般，運用起來，却有如吃火腿與三文治一般地令人滿意。現在，我把這所謂的火腿三文治定理敘述一下：

假設 $\operatorname{Limit}_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = b$，而且對於 a 之某一個中空鄰域（Deleted Neighborhood）中之所有元素 x．下式恒成立：$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

那麼就有 $\lim_{x \to a} g(x) = b$ 之關係存在。

或許各位會恍然大悟，原來所謂之火腿三文治定理是這個玩意兒！一當瞭解本定理，那諸如證明 $\lim_{n \to \infty} \frac{\sin^2 n}{2^n} = 0$ 與 $\lim_{n \to \infty} \frac{\cos n}{n} = 0$ 之問題便可輕而易舉了，因爲我們知道

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ 而且 $0 \leq \frac{\sin^2 n}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$；$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$，$\lim_{n \to \infty} \frac{-1}{n} = 0$，而且

$\frac{-1}{n} \leq \cos n \leq \frac{1}{n}$，當然，本定理用到之時不只上面所舉之例子而已，它時時刻刻都盼望各位多去關照它。～黃金豐滿　數四～ **火腿三文治定理**

純數學？
電子計算機？

數四 黃人祥
彭金豐

〈一〉你必須讓自己去認識她

自從西元1642元巴黎的B.Pascal發明了加減機（Adding Machine）及西元1946年美國賓州大學（University of Pennsylvania）的Eckert及Mauchly兩位發明第一座眞正之電子計算機ENIAC以來，由於無數科學家之不斷努力改進，使得在短短的幾十年內，電子計算機竟然有了令人吃驚的成就。

電子計算機（Electronic Computers）或稱資料處理系統（Data Processing System）俗稱電腦（Electroncc Brain）它在今後之社會中，將佔很重要之地位，而其影響所及更未敢預言。因此對於電腦必需有基礎之認識，乃是刻不容緩的一件事——因為未來之時代，無可諱言地是電腦的時代。不管你從事任何研究工作或是就業於那一部門，你都將與電腦不能不發生關係，因為你需要它提高你的工作效率，因為你得以它為你最優秀，最要得的助手。

〈二〉數學系與電腦

我們都對數學有「基本」的「修養」；但有的同學對那抽象得可以的「理論數學」有特殊的興趣與獨到的心得，就像是得到「Bour Baki」親傳似地。然而也有的眼看那「象」被「抽」得既乾又扁，因而不忍心去啃它。但不管你對純數學有興趣或是想走應用方面，你都必須使用電腦來簡化，有效化你的工作——一方面可以節省時間與精力，另方面可增進成果。

假設你是一位數學家來說，那麼你在現今各處紛紛成立的電子計算機中心（Computer Center）是佔的第一把交椅。因為電腦並非萬事通先生，並非所有問題都能求助於它。因此當想要用電腦處理問題一來時，這時你——數學家便可以很神氣地一手摸摸鬍子（或撫弄那烏溜溜的三千煩惱絲），一手端起咖啡，隨從慢條斯理地說：「讓我來分析分析看」，此時你全覽整個問題，接着看看該電腦之性能，最後以數值分析（Nunerical Analysis）及其他理論來判定該問題是否可以用電腦來處理。這個大權是落在你的手裡，由你來決定是否能叫電腦來服務？

如果你並非什麼數學家，而是本系的產物，那麼你也可以靠自己爭氣而輕易地奪得第二把交椅，做個「分析師」或「程式師」或是應用工程師。進言之，你可以把有關理工商方面的問題用數學式子來表示，使能以電腦來處理而做個「科學程式師」。你還可當個工程分析師（分為四種職別：應用數學師，計算工程師、計算分析師及理工系統分析師）或是做個作業分析師、作業研究分析師、經理作業師等，只看你想不想幹。

有人或許會以為我在為吃數學這行飯的人，往其臉上貼金。但是我倒希望你們切莫妄自匪薄，因為這些乃是完完全全的事實。如果有人仍不相信，我在此可舉一例以為答辯。你們

可知道「太空船」是如何在那「虛無飄渺」的太空中會合的嗎？這種太空船之會合便是靠設計一整套「數學與邏輯」模型來代表如太空飛行之環境一般之變幻複雜的種種狀況，然後把這模型輸入電腦加以實驗（這種實驗稱為「模擬實驗」Simulation）當然這種實驗在起初 *n* 次之模擬太空船會合或許是會失敗的。但經多次不斷地改進研究，直到模擬之太空船完全會合成功為止，這個Simulation的工作便算完成。當實際之太空船要在太空中會合時，那在控制中心便有一個模擬之太空船在巨型電腦所模擬之太空中飛行，以高速跑在眞正太空船之前面（指相對地）負責的人便以模擬太空船飛行之狀況及會合所應走的軌道及會合前後之速度來修正太空中運行的太空船。這樣一來始能完成了在太空中會合的壯舉！如果不是準數學家，他還能設計這套「數學及邏輯」的模型（Model）嗎？

〈三〉有趣的職務

因為你要在數學領域裡摸索四年，所以在未進入我們「貴系」以前，大家已俱備了「思考」的能力。加上幾年的磨鍊，使得個個都擁有了邏輯思考的頭腦。這樣，只要激勵自己去看看有關電腦的文章（註１）使對電腦有初步基本的識，然後再涉獵有關程式計劃的書籍（註２）這樣你便會對那要細心地靠邏輯思考的程式設計工作感到非常有趣。

程式設計師之工作其所以能引人入勝，完全因為他所精心設計之程式（只要他在設計之式過中稍有一絲微的疏忽，那麼電腦也照樣疏忽，如此一來該程式便不能正確地解決問題，因而需要修改或重新製作。）並非輕而易舉地可以得到，而是經過設計師眞重地考慮到一切可能發生之狀況及其應付方法，而且要經過 *n* 次的失敗與改進始能得到「放之四海而皆準」的完滿「程式計劃」。在設計某問題之程式時，其中所富有之樂趣，若非君躬自體味，實難以筆墨來形容其萬分之一。

〈四〉電子計算機講習班 你要參加嗎？

程式設計既然那麼有趣，那麼我們要如何爭這門「飯碗」呢？各位對電腦有了概括的認識以後，便可以自己研習Laplace Transform ，Linear Programming，Numerical Analysis 等方面的書籍，這些看一部份以後，可以到歐亞書局及亞洲開發圖書公司購買有關FORTRAN IV及COBOL 等之書籍“Numerical Calculations and Algorithms”一書來研究讀。還有本篇註１與註２中也有好幾本書，有的本校圖書館或系舘裡有，因此你倒不妨去借來看看。

除自己研習外，各位還可以到台大電機研究所，台大商學院，中國生產力中心中華電腦中心及淡江等開辦的「程式計劃」講習班去研習。至於所謂之打卡訓練班，我倒不建議你去參加，因為除了學得記一些規則之外，其他所剩的便是打字的玩藝。

但到底是參加講習班好呢？還是自己研究好？這個問題之解答見人見智，沒有一定的答案。就我們參加過講習的來說，我們以為參加講習的好處是自已所設計的程式（也就是處理某問題之方法的明細步驟）可以由電腦來測試是否正確？看看是否仍有些可能之狀況沒有考慮到？而能使自己知道錯誤與缺點之所在。但是參加講習所費之金錢與受訓心得有點懸殊之感。因為就我們的經驗來說，所謂之受訓心得只是興趣之提高和一些方法之修改，以及熟習塡寫程式計劃之一些規則而已。因此我們深深以為，如果能運用自己之邏輯思考，那還是把講習費1500元左右省下來買些有關書籍自己研究研究。這樣，雖然我們所設計之程式沒有電腦使能讓它依照我們所設計之邏輯方法去做做看，由它所得到的結果，來觀察我們的想法是否有差錯。但是，因為剛開始始作之問題，大都不算繁雜，且都還能以徒手用某些已知數據來校驗一下，看看是否有問題？（其實，因

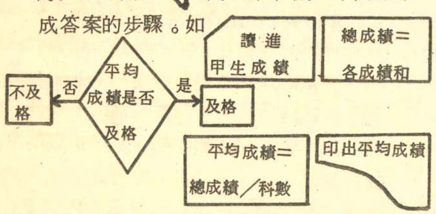
爲電腦之租金過於昂於，其費用均以使用幾分鐘來計算。所以在現階段中，查着邏輯方法有無關問題仍以徒手代勞來得經濟些）由上所論，則知講習班之參加與否，實因人而定。

〈五〉程式計劃之製作

任何事情或多或少均難在«起頭»，我們爲了使各位尚未遊歷這門新學問的系友能在不參加講習班下，於不知如何着手去學的情況下，給各位起個頭，好使各位能在往後的歲月中掌握這新時代的寵物。

首先，先給各位介紹一些觀念：

A、當某一問題可用電腦去處理時，各位首先要推敲推敲看看要用什麼方法，以如何之步驟使一步步去完成它。想好了方法以後，把自己所設想之步驟，依必要之前後左右秩序明列於紙上。普通爲了易於辨別起見，引用各種不同形狀之框子來鑲在步驟上。如用 來代表«讀»資料入電腦之步驟，再有用 來代表一些普通運算加減乘除置換等步驟，用 來代表判別的步驟。用 代表命令機器印出結果成答案的步驟。如



然後把這些框子間用箭頭連起來，以示其程序。這種俱有藝術感的圖案，我們叫它做「流程圖」flow Chart 當然，因爲要求迅速與確實，所以流程圖通常是要經過 n 次之修改始能令人滿意。流程圖之製作乃是程式計劃中最重要的一環，也是最麻煩的一部分。流程圖一作好，那麼程式計劃之工作便可算是完成了五分之二（製卡1，除錯佔2／5）

B、流程圖作好了之後，接着便是要把流程圖中文每一個步驟製成指令卡片（Instructions）以便輸入電腦。製卡之方法是由程式設計人將流程圖依所使用電腦所適合之程式語言（每類電腦有其特殊之轉譯程式Processor 把人所懂得的語言——組數字及文字的碼號Codes 自動翻譯成電腦機器本身所懂得的語言一機器語言。這種人所懂得的語言稱爲程式語言。如用 IBM1620 型電腦，便可用FORTRANⅡ 程式語言）中之規則，把步驟一一改寫成指令（即一細數字及文字和符號之組合）而依次記於特定之紙上（如FORTRAN Coding Form ）。然後由打孔員（Key punched operator ）把它製成一疊卡片。卡片製好了之後，可由人工或電腦來查驗看看是否有漏寫？是否有與程式語言中之規則相違背？是否有筆誤？這一部工作是最麻煩的，因爲多一個小數點或是錯了一個英文字母都是不行的。這部工作有特別之名稱叫做除錯或抓臭蟲（Debugging ）

C、待除錯這過程做好之後，便由機器操作員Operator將製好之一疊卡片以及與實際要處理之問題的資料非常近似的一組已知資料卡，按一定秩序置於電腦之輸入部門Input。如是電腦便以驚人的速度執行程式中之指令——運算與處理。這樣我們在短時間內便可在輸出部門Outpur得到用打字機打出的結果與答案（或用印刷機印出）。

D、根據已知之結果與上面由電腦操作所得的結果對照看看，是否正確？如果錯了，那便要再細心地觀察結果，看看可能錯在那裡？是不是有些特殊情形（諸如在求平均值的時候，是否以«〇»作除數？）沒考慮到？待毛病查出來以後，再行訂正。訂正好了，再如同前面的方法做一次。如是法行之。直至完全正確爲止。最後再由操作員把實際要處理問題之已知資料卡輸送入電腦，以求得該問題之解答。當然，實值上一個問題的電腦處理，要比上面所講述的複雜的多。因爲各步驟中均有其特殊

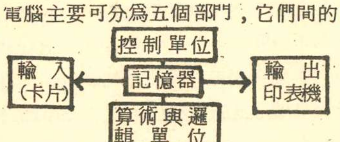
的技術與方法，但這些只要各位再進一步的探究，是不難登此「大雅之堂」的。

以上所介紹的便是從作流程圖到解決問題的大概過程。在整個過程中，以製作流程圖最爲重要。所以我們在此想以深入淺出的筆法，從某些實際問題中，一一解說詳盡，讓各位知道繪製流程圖的方法與技巧。由於篇幅所限，我們只能舉出三個平凡中的特殊題目，讓各位品賞品賞。

（註1）電腦和你（范光陵著）電子計算機原理（蕭慕岳撰）電腦初步（成玉山編）電腦的基本智識（蘇震撰）

（註2）FORTRANⅣ弗傳程式語言（台大電機系出版）
A FORTRAN Ⅳ PRIMER by E, I, ORGANICK （歐亞）
Numerical Method and Computers by Kuo （歐亞）
Basic Programming Concepts and the IBM1620(歐亞)
Digital Computer Programming by STARK

在未正式介紹流程圖（flow chart）前，先要電腦內部之結構，組織情形建立初步之概念；電腦主要可分爲五個部門，它們間的互相關係如下：



各位都知道，各種自然現象、事物，大體都能以數學式子表之，這些式子，不外微分方程，積分方程，加上不同的condition而成，在經幾個數值分析（Numerical analysis）處理後，又大都成了下列數問題之一，或是數個的組合。

①解線性常微方程式（Linear Ordinary Differential. Eq）

② 解矩陣潛根及潛矢（Eigen system of mmetric or non-symmetric Square Matrix

③ 解聯立方程式（Simultaneous Eq）

④ 解方程式根（Roots of Eq）

⑤ 求反矩陣（Inversion of a Matrix）

⑥ 求近似值（Approximation）

我們就最簡單的第四項來討論一下：

（例1）如解 $AX^2+BX+C=0$ …………(1)

經過分析一下，知此方程式之解爲一至二個實根或虛根，完全依據 A，B，C 而定，現可大致分爲下列三種情形。

A，Linear condition：

假使A爲零，則方程或(1)成爲

$$BX+C=0$$

其根爲 $X=\dfrac{-C}{B}$

B，Complex condition：

如判別式 $D=B^2-4AC$ 爲負 則有二種複數根第一個根的實數部份爲 $\dfrac{-B}{2A}$

虛數部份爲 $\dfrac{+\sqrt{-D}}{2A}$

第二個根的實數部分爲 $\dfrac{-B}{2A}$

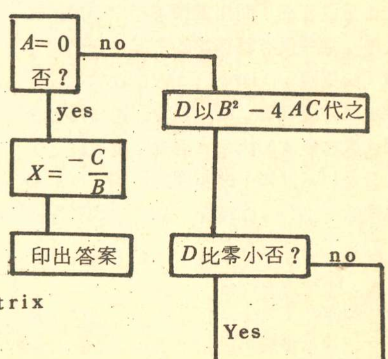
虛數部分爲 $\dfrac{-\sqrt{-D}}{2A}$

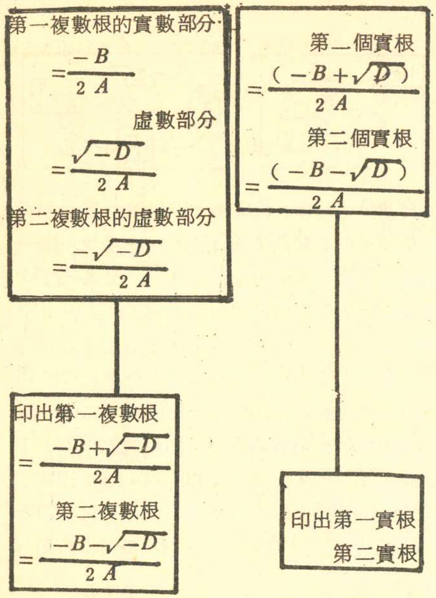
C，Real condition

如判別式 D 不小於零，則有二實根

$$\frac{-B+\sqrt{D}}{2A},\quad \frac{-B-\sqrt{D}}{2A}$$

我們就能說一個簡單的邏輯圖來完成以上諸步驟





（例２）最近考試院有一項重大的決定，就是以電腦來評閱試卷，究竟其方法，步驟爲何，我們試以下例來研究。

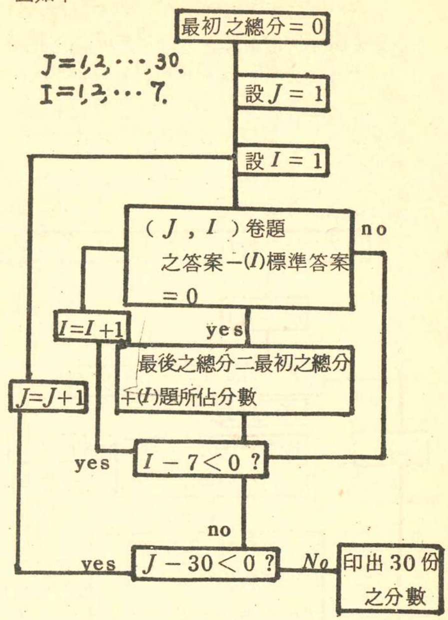
現有三十份試劵，每份計有選擇七題，每題所佔分數比例不一，要求出每份之總分。

首先讀進每一小題之標準答案，及每小題所佔分數，卷題上之每小題之答案。以表之

讀進第工題之標準答案，所佔分數比例及卷題上第１題之答案。I＝1，2，3…

且又設最初之總分爲零。

以$J=1,2\cdots30$ 表試卷之份數，則（２，３）表第二份試卷上的第三題。今以第J份試卷之第１題之答案與標準答案正確，接着把第１題之分數加入最初之總分；再用（$1-7$）來試驗是否改至第七題（即第J份之最後一題），果眞，再驗是否爲30份試卷以（$J-30$）來行之。如否，又折回記憶單位中取出下一組之試題以$J=J+1$表之。如並非第J份之第七題，同樣折回取出第J份之下一題。又差不爲零，則該題之分數不計入最初之總分，而直接以$I-7$來看是否達最後一題也。其流程圖如下：



我們以實例來解析之。

表第J份試題

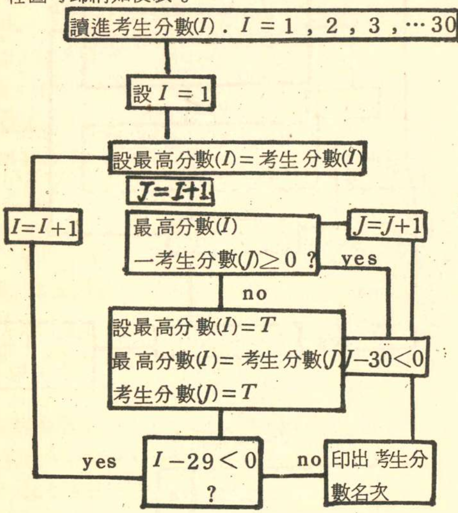
（J，1）之答案	2
（J，2）之答案	1
（J，3）之答案	3
（J，4）之答案	2
（J，5）之答案	1
（J，6）之答案	1
（J，7）之答案	3

(1)	標準答案	1
(2)	標準答案	1
(3)	標準答案	3
(4)	標準答案	3
(5)	標準答案	1
(6)	標準答案	2
(7)	標準答案	3

(1)	題所佔分數	10％
(2)	題所佔分數	15％
(3)	題所佔分數	17％
(4)	題所佔分數	18％
(5)	題所佔分數	20％
(6)	題所佔分數	10％
(7)	題所佔分數	10％

上例中第三題爲答對之情形，因（J，3）之答案與(3)之標準答之差爲零之故，隨即該題所佔之分數爲十七分可計入，反之則十七分不計入，以零分計之。但$J=1$，2…30。

再進一步，既已求得三十份之分數，依其分數之高低之序排列之——即算出名次。其流程圖可歸納如後表。



首先把三十份考生之分數讀進電腦之記憶位中。

接着$I=1$，表從第一位考生之分數開始比較。

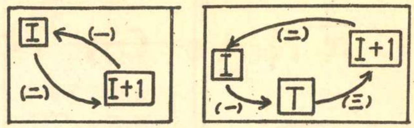
最高分數(I)，爲第1個高分，當$I=1$時，當然是最最高分；此一步驟，乃設第1位考生之分數恰爲第1高分。

因排出之分數形式於后：

最高分(I)　最高　　假設者

最高分(I)	最高分(2)	……	最高分(1)	第$J=1+$
第$J=1+1$個分數	……			

現，因前面$I=1$個已排好；輪着排出第1個高分，因我們已事先假設第1位考生之分數恰爲第1高分，此假設是否成立，尙須鑑定，從它來減去其後位之分數（即$I+1$位者之分數），如較$I+1$位小，則假設不眞；則I位與$I+1$位，須對調所在之位置；其方法如下：



如相減後，其差大於零者；則假設爲眞，不須換位，馬上查驗此$I+1$位，若最後一位一即第三十位考生一如是則，其三十份名次可得；反之再分工十己位比較，而以$J=J+1$控制之。

如此，遇上須換位者，以上圖之正確步驟行之。後再檢驗，此I，是不倒數第二位一即第二十九位一其答爲否定，則再假設第$I+1$位爲最高分（$I+1$），以$I=I+1$控制；反之，如確爲二十九位者，且又經換位，即表三十位考生之分數，已按高底分排竣，名次則可垂手得之。

以上我們介紹了幾個問題的解法。我們自以爲已盡了最大努力把它解說得最淸楚。或許各位仍有不明白的地方，那請各位可以隨時來函“台北市郵政信箱12549號”作者收，這樣我們可以共同討論有關之問題，更可携手合作，去遊歷那充滿希望與奧妙的電腦國度。

各位在了解上面問題之流程圖作法之後，一定想自己躬自來試試。在此我們也給各位學幾個以供練習。在做完之後，如君之興趣已被引發，那我們仍要提供幾本書給各位作進修之參考：Numerical Calculations and Algorithms（by Beckett 歐亞）和A guide to Algol Programming（by D.D.Mc Cracken）

（練習1）做一個流程圖，以求$\Sigma_{i=1}^{n} a_i$

（練習2）用流程圖以求e^x Taylor−series 展開式前n項之和即求

（練習3）做一個流程圖以資計算某兩正整數間之質數個數與總和及平均值等。並以所做之流程圖來測試20與21間，3與60間看看是否正確？（這一題難在如何用辦法來檢定一個整數是否是質數。請同學們多多細心推敲。

A Note On The Ordinal Space

數四　林鴻賢

在基本拓樸學裏，我們定義一個新的拓樸空間，或者一個拓樸名詞時，爲了建立概念，或擴展其概念的需要，我們經常的運用到 1. A set X with the indiscrete topology 2. A set X with the discrete topology 3. E′ with the Enclidean topology 4. E′ with the upper limit topology 5. $[0,\rho]$ with the topology generated by all sets of form $\{x \mid x>2\}$ and $\{x \mid x\leq\beta\}$, that is the ordinal space $[0,\rho]$，本文所要討論之 ordinal space，以及所研討之資料主要來源於 Dugundji 所著之 Topology，而討論本文之主要動機：(i) 對於在 Dugundji 所著之 Topology 一書裏所定義的 ordinal space 的 hasis 之疑義 (ii) 由於 ordinal space 在此書所佔的重要性 (iii) 提出一些自己的看法與各位同學研討。

在 P. 66 Ex 5 Dugundji 所著的 Topology 裏（第一版，第二版），其對於 ordinal space 定義如下：let ρ be any ordinal number and in $[0,\rho]$ use the topology generated by all sets of form $\{x \mid x>\alpha\}$ and $\{x \mid x\leq\beta\}$, We call this topological space the ordinal space $[0,\rho]$。Observe that the set $[\alpha,\beta]=\{x \mid x>\alpha\}\cap\{x \mid x<\beta+1\}$ are a basis for the topology。

I A 首先證明 the set of the form $]\alpha,\beta]$ or $\{0\}$ is a basis for the topology 而不是 the set of the form $]\alpha,\beta]$ is a basis for the topology。

Df：爲什麼要考慮 $\{0\}$ 呢？即 $\{0\}$ 必也在 basis 裏呢？

$\because \{x \mid x\leq 0\}=\{0\}$ is open by def

$\therefore$ if $x\in\{0\}$ 而 $A\in X$ which is a basis for the topology $\exists\, x\in A\subset\{0\}$

$\therefore A=\{0\}$ ∴要在 basis 裏有 $\{0\}$ 才行。

又 $\{x \mid x>\alpha\}$，$\{x \mid x\leq\beta\}$ 可看爲：

① $\{x \mid x>\alpha\}=\{x \mid x>\alpha\}\cap\{x \mid x\leq\rho\}=]x,\rho]$

② $\{x \mid x\leq\beta\}=[0,\beta]$

$=\{0\}\cup]0,\beta]$

③除①，②外所有在 basis 裏的元素，都爲 $]\alpha,\beta]$ 之形式，∵從 $\{x \mid x>\alpha\}$ 和 $\{x \mid x\leq\beta\}$ 中可知其交集有 $]\alpha,\beta]$ 形式。∴從①，②，③中可知：

open ses 確可從 $]\alpha\,\beta]\cup\{0\}$ 產生出。

$\therefore$ the set of the form $]\alpha,\beta]$ or $\{0\}$ is a basis for the topology of the ordinal space。

B. We want to prone that $[\alpha,\beta[$ is open iff $\alpha=0$ or α has an immediate predecessor。

Pf：

$\Rightarrow)\ \because [\alpha,\beta[$ is open $\Rightarrow \begin{matrix}\alpha=0\\ \alpha\neq 0\end{matrix}$

If $\alpha=0$, it is proved

If $\alpha\neq0$ $[\alpha,\alpha+1[$ is open

By def $\exists\,\delta,\gamma$ 而

$]\delta,\gamma[\subset[\alpha,\alpha+1[=\{\alpha\}$

but $]\delta,\gamma]=[\delta+1,\gamma]$

$\therefore[\delta+1,\gamma]=\{\alpha\}$　$\therefore\delta+1=\gamma=\alpha$

but $\delta+1$ has an imme. predcessor δ

$\therefore\alpha$ has an imme pre δ

$\therefore$ It is proved。

$\Rightarrow)$ If $\alpha=0$, then $[0,\beta[=\{x \mid x<\beta\}$ is open

$\because [0, \beta[= \{0\} \cup [1, \beta[$
$= \{0\} \cup]0', \beta[$

而 $]0, \beta[$ is open

$\because$ If $x \in]0, \beta[$

$\exists]0, x]$ 而 $x \in]0, x] \subset]0, \beta[$

If α has an imme pred α'

$[\alpha, \beta[=]\alpha', \beta[$, $\because]\alpha', \beta[$ is open $\therefore [\alpha, \beta[$ is open。

所以從A，B中，可知對於 ordinal space $[0, \rho]$，我們有一個 basis the set of the form $]\alpha, \beta]$ or $\{0\}$ 而不是 the set of the form $]\alpha, \beta]$ 這一點把握住後，則各位同學在看Dugundji所著的Topology一書，將會減少很多的困難，且得到更精美的心得。

Ⅱ Vickery 證明了一個定理，其內容如下：let Ω be the first uncountable ordinal number, and let $[0, \Omega[$ be the suhspace of the ordinal space $[0, \Omega]$ each continuous ϕ: $[0, \Omega[\to E'$ must be constant on a tail $[\beta, \Omega[$，而在極限的問題裏，我們有這樣的一個題目：$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$，由於這個題目，我覺得有兩件事情值得一提的是：

(i) Vickery 證明上面那個定理的動機，可能由於像 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ 這種題目的觸發，假如是的話，我想我們可以從 ordinal space 和 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ 類似這種問題的極限，找出彼此間更多的關係和結果，當然這只是一個想法，我希望各位老師，各位同學不吝加以指教！

(ii) 當我們討論 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ 時，我覺得 $n \to \infty$ 有加以說明的必要，因為以 ordinal number之立場觀之，$n \in [0, \Omega[$ where Ω be the first uncountable ordinal space，而這個「∞」符號的意義也應有 Ω 的意義，這一點，我也熱切的希望各位老師，各位同學多多指教！

"The Free Structure" 一文後語

在此時，孤燈下，靜寂時，顫抖的手，激動動地停下了筆，而完成了本文。在此時，眼裏含著幾許的淚，不知是喜？是憂？還是感慨？在此時，透過那不清的視界，望著那高高的月，長長的，深深的，細細的，追索著，撫摸著，那曾⋯那曾走過的路。

記得⋯⋯，在那條路上，我曾發狂似的奔跑，追求那些片羽的靈感，但過一會兒，我驚覺到自己的能力不够，而必須加緊的充實自己，但！嘿！旁邊的行人在笑著說：「你這麼蠢！該走的路不走，專走不該走的路！」這時，我放慢了脚步，不得不反覆的問著自己：「難道我走錯了路嗎？」不！不！我是年青人！值得一試的事情，就該幹下去！就這樣，我抱著滿腔的熱血，小心地，堅忍著，慢慢的走去；就這樣，我也在這條路上找到了自己的樂園，自己的天地，也流下了幾滴快樂的淚；就這樣，我覺得自己長大了些，懂多了些；就這樣，使我覺得做個「適度的人」對自己或別人是最重要的。

母親又在叫我睡覺了，我帶著那未完的同憶，在夢境中，彷彿見著在這條路遠遠的那一端⋯⋯呈現著⋯⋯那⋯⋯那無窮的困難與挑戰待我去克服。

在分析與應用數學園地中的工作者，往往由於個人的興趣而忽略抽象化統一化的重要。我們確信數學的整個統一正是方興未艾，它是近代數學的特徵。N. Bourbaki的成就即爲最明顯的證據。因而今天作爲一個念數學的人如果要想獲得更深更滿意的結果，必須在抽象化普遍化這兩方面走得相當遠才行。但是反過來我們也要注意，不能誤會抽象化普遍化對於數學的眞正價值與地位以致於爲抽象化而抽象化，爲普遍化而普遍化。所以我們不僅要看看 Bourbaki 的傑作，也要同時看看這個團體中個人另外所寫的書，文章，Weil, Chevally, Schwartz, Serre 等。～M. H. Stone～

談幾何公設

數三　林玉斌

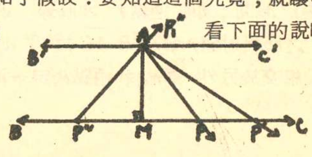
羅波切夫斯基（Lobachevsky）和巴禮愛（Bolyai）首揭“過線外一點至少能作兩條平行線，和此一直線平行。”之公設；公然對一直被“確信為眞”的單一平行線的公設挑戰，而創立另一派的幾何學，打破二千年數學領域的死寂，使數學的發展，尤其是幾何方面的發展，如積洪之一瀉千里，不可遏止。諸如黎曼幾何學，射影幾何，代數幾何等等相繼出現，其繁多富美直不可勝收。其他方面如Hamition和Cayley對代數乘法的可交換性挑戰，使代數發展的領域更加廣濶，不受傳統的拘束，以另一種嶄新的面目出現。Lukasiewicz 和Post對亞里斯多德的排中律挑戰，使人對傳統邏輯及其發展，有更新一層的看法和搜尋。

由數學史的發展過程，我們很容易發現：“對公設挑戰”，是一種使數學，向前拓展最普遍的方式；換句話說，若能够不為以前的某些公設所束縛，另創出一些公設，就是數學向前拓展的一個起點。Cantor有一句名言“數學的本質是在於其自由”。誰能够在這自由的領域裡，得到一些更好更新的東西，誰就是受尊崇的一家之師。任何人，想對各派數學有所瞭解，最根本的方法，是對他們的基本概念、基本公設的定法，和對他們的發展有一全盤的認識；想在數學上有所斬獲的人，更常比較各種學派的理論和發展，隨時想找尋另一美好完整的理論，以取而代之。

因此，我們想來談談，一些以前人的公設和派別，並用一種回顧的眼光，來考察他們。一般說來，幾何學的發展最早，尤其是歐幾里得的幾何學，在常人的心中最為具體，也是最為眞實不能懷疑。十七八世紀時，很多數學家在研究歐氏幾何時，都以為歐氏的平行線公設（以Playfair的說法，過一直線外一點，恰能作一條直線，平行於此直線。）是可證，並企圖證明這個公設，但都失敗了。他們的證明雖然失敗，但卻提供了許多思考的新途徑，在一些有名的假設下，他們得到很多重大的成果，暗示着平行公設，不可由歐幾里得的其他公設來導出。直至後來羅波切夫斯基和巴禮愛，提出另一派幾何理論，在這個新理論裡，他們假設過一點能作兩條以上的平行線，依據其他公設，還能繼續完整的發展下去。在這派幾何學裡，任意三角形三內角和，小於 2π，並且隨三角形面積有所改變。此後不久，黎曼（Riemann）也指出另一種幾何，謂平行線永遠不存在，平面上任二條直線必要相交，在此種幾何內，任意三角形三內角和，必然大於 2π，並且隨三角形面積有所改變。

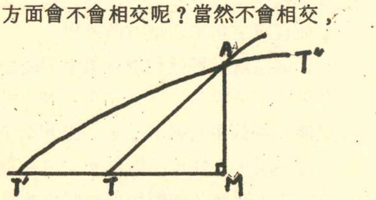
這三派初等幾何學，最重要的相異點，是在於平行公設的不同，一謂“過直線外一點，祇能作一條平行線”。“一謂”至少可作兩條”，另一謂“一條也不能作”。這三種情形都有成立的可能麼？他們何以敢認為其為可能，而遽然給予假設？要知道這個究竟，就讓我們來看下面的說明：

圖1



（如圖一）設有一直線BC，由BC外面一點A，作AM垂直於BC在BC上任取一點P，連結AP，於是AP與BC相交於一點P。現在若令P點，沿着BC，向MB或$\overrightarrow{MC}$方向移動，則所有如此所有AP直線，必然和BC有些關係。

(1)P點向$\overrightarrow{BM}$或$\overrightarrow{MC}$方向移動，最後必然要同來，或者永遠不同來。若P點向着$\overrightarrow{MC}$，移動至任何遠的距離，永遠不能同到原來的位置；迨P點移到無窮遠處，PA就要移到一個極限的位置；這個極限位置，不難說明其存在。若定$S=\{\overrightarrow{AP} \mid P\in\overrightarrow{MC}\}\subset\{\overrightarrow{AK} \mid K$在此平行線上$\}$，並定一個關係$R$，如此$\overrightarrow{AP}\,R\,\overrightarrow{AP'}$意爲$AP$在角$\angle MAP'$內，就以$MA$所分之半面來看，因有一點$P''$使$M$在$PP''$中，則$\overrightarrow{AP''}$之反射線$\overrightarrow{AP_1''}$必在$MAP$之半平面上，因關係$R$在$\{\overrightarrow{AK} \mid \overrightarrow{AK}$在半平面上$\}$成一 Partial order，且$S$爲其部分集合，$\overrightarrow{AP}\,R\,\overrightarrow{AP_1''}$，$\forall\,\overrightarrow{AP}\in S$，並且$\overrightarrow{AP_1''}$，不在$S$上。所以$S$有一個極限存在。如圖稱其爲$\overrightarrow{AC}$線因此$\overrightarrow{AC'}$在$\overrightarrow{MC}$上永遠不相交，（若其可相交於一點$K$，則必可找到一點$K'$在$MK$之外，因$\overrightarrow{AK}$爲一極限位置，所以$AK'$必在$\angle MAK$內，即$AK'$必要交於線段$AK$上一點$K''$，$K'$，$K''$爲在$BC$直線上不同的兩點，顯然和其他公設衝突。）且任一在此半面上的直線，對AC'有R關係必然要與BC相交。爲了方便起見，我們稱$\overrightarrow{AC'}$與$\overrightarrow{MC}$相交於無窮遠點。以同樣的作法，我們也不難得到一$\overrightarrow{AB'}$與$\overrightarrow{MB}$相交於無窮遠點。前面我略述了$\overrightarrow{AC'}$在$\overrightarrow{MC}$方面永不相交，但在$\overrightarrow{MB}$方面會不會相交呢？當然不會相交，



（若其相交於一點T，則必可存在一點T'使T在$T'M$間，如此連結$T'A$直線，則$\overrightarrow{AT''}$爲AT'之反相射線$\therefore \overrightarrow{AT''}\,R\,\overrightarrow{AC}$故$T'A$必又與$\overrightarrow{MC}$相交於另外一點，和兩點決定一直線衝突）

所以現在可得到AC'，AB'直線皆不與BC直線相交，依據平行線的定義“兩條直線同在一平面上，若各向兩端無窮延伸，也不相遇，則此兩直線稱爲平行線”。我們可稱AC'，AB'皆平行於直線BC。這兩直線也許同在一直線上，也許不同在一直線上。要是不同在一直線上，那麼過A點至少可作兩平行線了。

(2)要是AB'和AC'兩直線很巧合的，同在一直線上；即AB'和AC'爲同一直線，就是“通過A點僅能作一條直線和已知直線平行”。的歐幾里得的平行公設。

(3)以上爲P點移動，永不再同來。若是P點向着$\overrightarrow{MB}$或$\overrightarrow{MC}$方向移動，移動若干距離以後，P點仍要同到原來的位置，而且任何通過A點之直線，都要與$\overrightarrow{MC}$相交，這就是“通過A點，不能作平行線”的公設了。

以上討論的三種情況，我們簡直不能斷定，那一種是不可能，我們祇覺得他們各有其成立的道理。

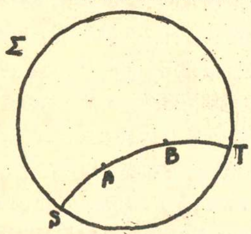
我們至今祇討論了各學派成立的可能性，但還未給一嚴格的斷言，在“其他公設”下（再整理的歐氏公設系統，除平行公設等外），各學派的平行公設是否都能各自存在；換句話說，我們尙未能知道此三平行公設，和其他公設發展下，是否會產生矛盾，所以我們必須證明，各種平行公設是（否）和“其他公設”一致而且獨立。（若“其他公設”能導出某一平行公設；則另外的平行公設，顯然不與“其他公設”一致。即是某派幾何學的發展，遲早會發生矛盾。）倘使我們要由其發展中，直到某一形式幾何發生問題，才斷斷定此公設是否獨立，那將不知要費時多少，費力多少。且若由此途徑發展下去，一直未發生矛盾，誰能保證以後的發展中，是否會發生問題呢？那就是說要是這個公設是獨立的話，我們就永遠不能知道這個公設是獨立的。

於是，我們不得不另外去尋求別的方法，來證明這個公設是爲獨立；一般說來，要是能够找到一個模式，這個模式能够適合其他公設，但不須適合某個固定平行公設，則可證得此

平行公設和其他公設獨立。（若某平行公設，可由其他之公設導出，則出模式必然有此平行性質，即必祇適合某一固定平行公設。）以後我們將循此路徑，來看看平行公設的究竟。

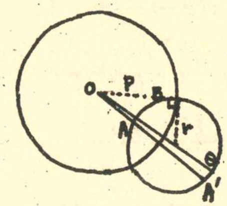
在常用的初等幾何學裡，所討論的材料和和範圍，都祇限於歐氏（Evclid）的幾何學。一般人對於歐氏幾何學的公設，發展常確信其為眞，而認為他們發展下去永沒有問題。至於其他幾何學常抱着懷疑的態度。（即在一般人的心目中，歐幾里得的所有公設，都是一致而且唯一的。但在他們的心目中，對於平行公設是否可由其他公設導出，卻缺少一個確定的概念。）所以我們想再來證明，一非歐派幾何的羅波切夫斯基幾何（羅氏的平行公設是過線外一點至少可作兩平行線。）也是一致的，不會因發展產生矛盾的。並且以此可說明出，歐氏幾何學的平行公設是獨立的，不可由其他公設導出的。

為了達成我們目的，現在就假設歐幾里得的幾何學，所有的公設都是一致的；而從歐氏幾何學裡，找出一個模式，這個模式不盡符合歐氏所有的公設，使其無須適應單一平行線的公設。Poinca're（1854—1912）在這方面，很早就提出一個模式，就是著名的Poinca're Model（這個幾何模式就是羅氏幾何的形式。）由一組歐氏幾何學的公設裡，能找出一個，非歐幾里得學的模式，是令人多麼的驚訝！是多麼不可思議！就讓我們來看看Poinca're 如何找出這個模式吧。



在一平面上，畫出一固定圓Σ。稱其為基本圓（見圖三）圓內的點就是我們新模式裡的點，暫稱為模點，在圓內且和基本圓成正交的直線，就是新模式的直線，暫稱為模線。如此，模點在一模線上，一模點介於二模點之間，可比照一點在一直線上，一點介於二點間，解釋之。並定兩模點A，B（見圖）在模式中線段的度量；稱為模長$\overline{AB} = \log(AB, TS)$；$(AB, TS)$表$(AT/BT)(BS/AS)$，此處$AT$等為$A$，$T$點在歐式幾何的線段度量。定兩模線的交角的度量稱模角如同在歐氏幾何中兩圓交角的度量，即過交點作兩切線之交角。若模點A，B的模長和模點C，D的模長相等，稱為$\overline{AB}$，$\overline{CD}$兩線段對等。若兩模角度量相等，則稱此模角對等。

以上新模式的點，線（即模點，模線）及一些基本度量等都有了，我們進一步要證明，新模式有其他公設的性質，而過一點至少可作兩條平行線。



首先，證明“過兩點恰能決定一直線。”的公設，就是過模式中二模點恰等決定一模線，因此我們祇要證明過圓內二點恰等決定一圓弧和基本圓成正交，令O為圓Σ之圓心，l為Σ的半徑，Σ為基本圓，（如圖四），A，B為Σ內兩點作A'使$OA \cdot OA' = l^2$則過ABA'可決定一圓π今證π和Σ正交，令C為π之圓心，連結OC交於圓π於Q，Q'，r為π之半徑。

$$
\begin{aligned}
\text{因 } l^2 &= OA \cdot OA' = OQ \cdot OQ' \\
&= (OC - r)(OC + r) \\
&= OC^2 - r^2
\end{aligned}
$$

$\therefore r^2 + l^2 = OC^2 \qquad \therefore \pi$，$\Sigma$正正交

故過A，B至少可決定一模線。若令任一圓π和Σ成正交（如上圖）且過A，B兩點，則因

$$r^2 + l^2 = OC^2$$

$$\therefore l^2 = OC^2 - r^2 = (OC-r)(OC+r) = OQ \cdot OQ' = OA \cdot OA'$$

此圓必過A'點此A'點滿足$l^2 = OA \cdot OA'$即此圓必然要通過ABA'即可得此圓π爲唯一的。如此，“兩點恰等於決定一直線”得證類似的，讀者不難證明，一橫線至少有二模點，且有一模點不在此模線上。”及各種模點次序的公設都能滿足，（證明這些你可利用各種歐式幾何的定理。）

再來我們再來證明對等公設是否能滿足，C介於A，B之間，C'介於A'，B'之間，A，C和A'，C'對等，C，B和C'，B'對等，則A，B和A'，B'亦是對等

因$\overline{AB} = \log(AB \cdot TS)$

$$= \log\left[\left(\frac{AT}{BT}\right)\left(\frac{BS}{AS}\right)\right]$$

$$= \log\left[\left(\frac{AT}{CT}\right)\left(\frac{CS}{AS}\right)\left(\frac{CT}{BT}\right)\left(\frac{BS}{CS}\right)\right]$$

$$= \log\left[\left(\frac{AT}{CT}\right)\left(\frac{CS}{AS}\right)\right] + \log\left[\left(\frac{CT}{BT}\right)\left(\frac{BS}{CS}\right)\right]$$

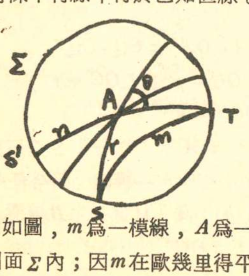
$$= \log(AC, TS) + \log(CB, TS) = \overline{AC} + \overline{CB}$$

同理，$\overline{A'B'} = \overline{A'C'} + \overline{C'B'}$；因

因$\overline{AC} = \overline{A'C'}$，$\overline{CB} = \overline{C'B'}$（若$A$，$C$，和$A'$，$C'$，$C$，$B$和$C'$，$B'$對等）

$\therefore \overline{A'B'} = \overline{AB}$由定義$A'B'$和$AB$對等得證

其他對等公設亦不難證得，連續公設也可滿足，在此我們省略不證了。我們當前的事，是要來證明，在這個模式裡過線外一點至少可作兩條平行線平行於已知直線。



如圖，m爲一模線，A爲一模點，皆在基本圓面Σ內；因m在歐幾里得平面上爲一和圓Σ正交的圓弧，故m和Σ必相交於兩點S，T，今過A，T及A，S各可作二圓弧和圓Σ正交，稱之爲n，r；n，r爲過A點的橫線。讀者可甚易證出，在新模式中，模線n，r皆平行於橫線m。因由模長的定義，AB爲二模點$\overline{AB} = \log(AB, TS')$；這裡，

$$(AB, TS') = \left(\frac{AT}{BT}\right)\left(\frac{BS'}{AS'}\right)。$$

可知模點B在模線n上滑動，無論經過多少模長，永遠不能達到T。即n永遠不能和m相交（爲什麼？）所以n必然要和m平行。同理，r也要和m平行。讀者亦可甚易證得，r和n爲二不同的模線。此即證“過線外一點，至少可作二平行線和已知直線平行。”（讀者在此模式可甚易發覺三角形三內角和，小於2π。）

上面所說的這個模式爲Poinca're 找尋出來，這個模式的幾何學，也就是羅波切夫斯基幾何學。在這Poinca're model中，羅波切夫斯基幾何是歐氏幾何的一個定理，換句話說，即是歐氏幾何能够一致的話，羅氏幾何自然是一致，不會產生任何的矛盾和問題。歐氏幾何的平行公設是過一點，僅能作一條平行線；但羅氏幾何的平行公設中，是至少可作兩條。我們因此可知平行公設應該是獨立於歐氏幾何的其他公設，並且其他公設一致的話，羅氏幾何也是很合理的。（這此讀者乍看會攪不淸，但弄懂了，就沒有甚麼奇怪。）

討論了半天，我們都是假設了，歐氏幾何其他公設，是一致的，（即本身不會導致矛盾。）但事實是否如此？我們沒有證明以前，跟本不能隨便加以確定。但所幸，這些證明很簡單，一般讀過解析幾何的人都應該會證；因我們可利用一些函數及代數等來定義出，初等幾何中的基本概念，諸如點，線，在（on），介於（between），對等（congruent）等。然後利用這此定義，我們可導出歐氏幾何的其他公設。（對此有興趣的讀者，可由他以前所讀的解析幾何，發現這些定義定法，和其他公設的導法。）

邏輯系統簡介

數三　王頑玉

邏輯，依它的學院意義來說，可分爲傳統邏輯（也就是本系三年級必修的理則學）與現代邏輯，後者我稱數理邏輯或符號邏輯，兩者方法有顯著的不同，而數理邏輯，其威力與精巧程度，實遠勝於傳統邏輯（寫到這裏，眼見台灣各大學把前者列爲必修科，而後者，卻沒有幾個數學系開這門課，感到不勝唏噓！）一傳統邏輯始於亞里斯多德，數理邏輯則始於1847，布爾與德摩根著作中的邏輯代數，其實他們所處理的是類代數（algebra of class）及關係代數（alqebra of relations）眞正的命題演算則出現在Huqh Mae Coll 的著作中（1877），其後經Peirce，Schröder，Frege，Peanso Whithead，Rassell以及其後的繼承者一如Tarski，Quine 等人的努力才建立起來的。

數理邏輯系統就是一個符號化的語言系統，建立這個系統首先我們列出一些單一符號，作爲初基符號（primitive symbols），一個有限系列的初基符號叫做語式，在這些語式中，提出一些規律指示某些爲完構語式（well－formed formulas），然後，在這些完構語式中有一些被指定爲公設，最後提出推論規律，使得某些（稱爲結論語式的）完構語式可直接從（稱爲前提的）完構語式推出。於是，一有限系列的完構語式稱爲證明，其中每一完構語式，或爲一公設，或是從系列中前提依推論規律推得的結論，一個經過證明的完構語式稱做定理，好了，這些初基符號，形成視律、推論規律及公設，便構成一個邏輯系統的基底。（primitive bsis）（註一）

建立好了一個邏輯系統，我們還要尋找一個“解釋”（interpretation），依語意規律（semantical rules）決定此邏輯系統裏每一完構語式的指謂值（denotation）。一到此我們才算建構好一個形式化（formalized）的語言系統。（註二）

數理邏輯兩個主要的部分是命題邏輯與述辭邏輯（prositioal predicate），現在我們就一個命題邏輯系統（p_1）來欣賞其結構：（註三）

I　系統基底

(1) 初基符號：三個 improper symbols
〔，⊃，〕

(2) 形成規律：一個常項 f
一無限列變項 $p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, q_2, \cdots$

(2) 形成規律：1.初基常項 f 單獨出現爲一wff（well formed formula）
2.任何變項單獨出現爲一wff
3.若 γ 與△爲wff，則〔γ⊃△〔γ⊃△〕爲wff

任何語式由此形成規律得來爲一完構語式。

(3) 推論規律：R1．從（$A \supset B$）與 A 可得 B（Rule of inodus pones）
R2．從 A，若 b 爲一變項，可

推得 $S^{b}_{B} A|$ (Rule of substitution)

所裏“ $S^{b}_{B} A|$ 中，“ $S|$ ” 代表“替換運算”，“ $S^{b}_{B} A|$ ” 就是把 A 中所有 b 的位置換爲 B 所得的語式。

(4) 公設：A 1. $[p\supset[q\supset p]]$

A 2. $[[s\supset[p\supset q]]$

$\supset[[s\supset p]\supset[s\supset q]]]$

A 3. $[[[p\supset f]\supset f]\supset p]$

在普通命辭演算中，公設一就是所謂的「後果肯定律」，公設二就是「實質蘊涵的自分配律」，公設三則爲「雙重否定律」。

(5) 定義：爲了方便起見，我們將簡縮一些符號，首先，一個完構語式的最外層括號可略去，其次 $[[[p\supset f]\supset f]\supset p]$ 可簡化爲 $p\supset f\supset f\supset p$，亦即當括號被略去時，其次左連結。另外用粗寫的點“ • ”省略位於右方的第一個括號，例如 $p\supset . q\supset p$ 代表 $p\supset[q\supset p]$。

除了此種括號的省略外，我們要介紹另一種縮寫：那就是“定義”，定義就是用一個新符號去代替某個較爲冗長的完構語式：

D 1. $t = f\supset f$

D 2. $\sim A = A\supset f$

D 3. $[A\subset B] = \sim . B\supset A$

D 4. $[A\ B] = A\supset B\supset B$

D 5. $[AB] = A\not\subset B\not\subset B$

D 6. $[A\equiv B] = [A\supset B][B\supset A]$

D 7. $[A\not\equiv B] =_{Df} [A\not\subset B]\vee[B\not\subset A]$

D 8. $[A\subset B] =_{Df} [A\subset B$

D 9. $[A\supset B] =_{Df} B\not\subset A$

D 10. $[A\vee B] =_{Df} \sim A\sim B$

D 11. $[A\mid B] =_{Df} \sim A\vee\sim B$

事實上，自D2. 以後，每一式均包含無限多個定義，因 A，B 均爲變項，故 D 1. 的 t 則爲常項。還有 D2.－11. 跟普通書上的命題連詞的意義是相同的，本來，我們構作這些定義動機是源於此等原就具有意義的符號，只不過用新符號簡化它而已。

II 定 理

T 1. $p\supset p$ 實質蘊涵反射律

證明：$s\supset[p\supset q]\supset . s\supset p\supset . s\supset q$ A 2.

$s\supset[r\supset q]\supset . s\supset r\supset . s\supset q$ R 2.

$s\supset[r\supset p]\supset . s\supset r\supset . s\supset p$ R 2.

$p\supset[r\supset p]\supset . p\supset r\supset . p\supset p$ R 2.

$p\supset[q\supset p]\supset . p\supset q\supset . p\supset p$ (1) R 2.

$p\supset . q\supset p$ (2) A 1.

$p\supset q\supset . p\supset p$ R 1. by (1), (2)

$p\supset[q\supset p]\supset . p\supset p$ (3) R 2.

$p\supset p$ R 1. by (1), (3)

底下還有一些定理，提出 T 1.的證明只是對前面提過的“證明”作例子解明。在這裏不想再列出一堆定理和證明，我們將很簡短的說明這個系統的一致性，完備性，作爲本文的結束：

一致性：(a)一個邏輯系統稱爲對某一變換爲一致的，假如命題樣型 A 轉換爲 A' 時，不存在命題或命題樣型 A 使得 A 和 A' 均爲定理。

(b)一個邏輯系統爲絕對一致的，假若不是每個命題樣型均爲定理。

依照這兩個定義，P_1 爲絕對一致，且對變換 A 成 $A\supset f$，亦爲一致的。

完備性：(a)一個系統對某個轉換爲完備的，假如如對某個轉換 A 到 A'，使任一命題樣型 B，B 爲一定理或當 B 列爲公設時，原系統對該轉換不爲一致的。

(b)一個系統稱爲絕對完備，假如對任何樣型 B，B 爲一定理或把 B 公設時，原系統不爲絕對一致。

按照這兩個意義，P_1 對 A 轉換爲 $A\supset f$ 爲相對完備，P_1 亦爲絕對完備的。

除了 p_1 以外，還有許多其他命題邏輯系統，在某種意義來說，他們都是對等的，即，只要改變某些wff的符號，他們的定理是一一對應的。

註一：一個形式化語言系統的基底，除了邏輯系統基底外，還要加上語意規律。

(下接42頁)

0與1之間

・數二　郭學人・

§. 空集合與邏輯

邏輯所推論的範圍，簡單地說可以分成三個層次。一是ϕ，二是有限集合，三是無限集合，又ϕ的邏輯推論被判定無效，無限集合的邏輯推論"可能"是在兩值（眞，假）以上，換句話說，ϕ的排中律（Pv～P）不是$a=b$，便是$a\neq b$，是毫無意義，無限集合的排中律不切實用。所以，眞正在使用邏輯推理，我們應該注意到它的範圍。

為什麼ϕ的邏輯推理是如此無價？

（例一）根據涵蘊眞值表：

P	Q	$P\rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(1)　對於每一個$x\in R$且

$x^2<0\rightarrow 1+1=2$

$\Longleftrightarrow (x)(x\in R\ \&\ x^2<0)\rightarrow 1+1=2$　T

(2)　對於每一個$x\in R$且

$x^2<0\rightarrow 1+1\neq 2$

$(x)(x\in R\ \&\ x^2<0)\rightarrow 1+1\neq 2$　T

(1)　式從$\phi\rightarrow 1+1=2$為眞

(2)　式從$\phi\rightarrow 1+1\neq 2$為眞

若我們肯定前項，後項究竟是$1+1=2$，還是$1+1\neq 2$。

（例二）根據排中律（Pv～P）和選言律

$$-P\ \&\ (P\cup Q)\rightarrow Q$$

$$\phi\cup\sim\phi$$

$$\underline{-\phi\qquad\qquad}$$

$$\sim\phi=A$$

某集合是空集合，如果它不是空集合，則它應該是非空集合。現在假如$\sim\phi=A$，可是$\phi\subset A$，雖然我們否定空集合的存在，A還是包括空集合。

（例三）根據狄摩根（De Morgan）論證

"所有馬是動物，所有馬的頭是動物的頭"

$\Longleftrightarrow (x)[(\exists y)(Py\ \&Hxy)\rightarrow (\exists y)(Ag\ \&Hxy)$

$A\leftrightarrow$動物　$H\leftrightarrow$是……的頭　$P\leftrightarrow$馬

（證明參考Introduction to logic by *Suppes*）

"所有自然數所成的集合包含空集合，所有這些集合的每個元素減去1，則包含空集合的元素減去1"。如果我們承認空集合有邏輯存在的意義，我們就得承認這命題是對的，可是空集合的元素減去1是什麼東西，究竟它和空集合本身又有何關係，是否也是所有自然數所成的集合的子集。

集合的證明，有如對應於邏輯的證明，那麼對於$x\in\phi$，所推出來的東西，是否荒謬。例如證明$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$，我們可以寫成$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)\rightarrow p\wedge(q\vee r)$，利用眞值表或是套套邏輯（tautology）關係求得。可是，$(A\cap B)$

$\cup(A\cap C)=\phi$的情形，我們不得不感棘手。所以，借助於空集合是任意集合的子集。究竟我們所借助的東西把它看成定義好或是定理好？若是看成定義必須具備有若且唯若的性質，若是看成定理則其證明方法不應該牽涉到邏輯的推論。例如“空集合是凸集合”它本身沒有若且唯若的性質，因此不能算是定義，但是，要證明其爲定理，若利用否命題“不爲凸集合的集合，不是空集合”，以所謂不是凸集合是能找到兩點P，Q在A中，使$\overline{PQ}$不屬於A，因而說既然有P和Q的存在，就不算是空集合。則此種證明方式已失去了證明的意義。我們可以發現到書本上證明空集合是開集合（openset）或是閉集合（closedset），常用無聊（trivial）字眼表示它的簡單，可是，若其證明方法不出邏輯的形式，其證明方法應該說屬於無聊（trivial）的方法。

§. 空集合與0

邏輯早在亞里斯多德時代就極盛一時，而0的使用一直要到第九世紀才開始，這是一件難以思維的事情。空集合的概念是十九世紀文明的產物。1907年皮亞諾（Giuseppe Peano）發現自然數本身可以從別的系統獲得，這個發現，告訴人們說自然數已不像Kronecler所說的：「自然數是神造的，其它的都是人爲的。」而且皮亞諾公設（Peano axioms）被認爲是一切數學知識的主要基礎，皮亞諾的描述使ϕ和0是二而合爲一，使得自然數有限的四則運算，等於序數（ordinal）有限的四則運算。

自然數最重要的性質是對於每一個元素有而且只有一個“後繼元素”，了解這個性質我們可以應用集合的概念定義出自然數。

對於任何集合A，A的後繼元素以A'表示，我們定義

$A'=A\cup\{A\}$

對於任何集合A，$A\subset A'$和$A\in A'$都成立。

由定義可以導出：

$\phi'=\phi\cup\{\phi\}=\{\phi\}$

$\{\phi\}'=\{\phi\}\cup\{\{\phi\}\}=\{\phi,\{\phi\}\}$

$\{\phi\ \{\phi\}\}=\{\phi\ \{\phi\}\}\cup\{\{\phi\ \{\phi\}\}\}$

$=\{\phi\ \{\phi\}\ \ \{\phi\ \{\phi\}\}\}$……………

若我們現在以0取代中，以1取代ϕ，以2表示ϕ的後繼元素

$0=\phi$

$1=0'=\{0\}$

$2=1'=\{0,1\}$

$3=2'=\{0,1,2\}$………

從直覺上，0是集合中沒有任何元素，1是集合中有一個元素，以此類推，自然數可以被推出來，而且還保有“後繼元素”的性質。

§. 0與1

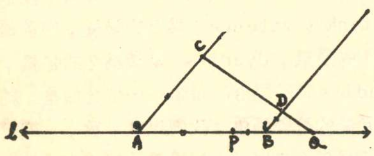
空集合和0彼此之間有類似的地方，可是，我們似乎有厚彼（空集合）薄此（0）的觀念。我們沒有排斥空集合於集合之外，但是，我們一直沒有使0進入自然數的範疇。我們說，1是自然數最小元素，而不說1是0的後繼元素，0才是眞正自然數的最小元素。“Foundation of Real Number. By Burrill”，這本書是以0爲自然數的最小元素，他所主張爲什麼如此，完全是根據上述“0和ϕ”關係來說的，就是自然數的加法和乘法消去律和集合亦有對應關係，因此，書中所用的數學歸納法，是以$S\subset N$，(1)$O\in S$；(2)$n\in s$推出$n+1\in s$，則$S=N$，其實，0是否應列入自然數範圍內，在理論上我們應該如此說，但是，定義自然數從1開始亦不妨害大體，而且對於初學算數操作上有很大的方便，不必顧慮到分母爲0，即使他們對於整數的運算已有相當的熟悉。由0到1，我們可以導出自然數，整數，有理數，再經Rechard Dedekind的Dedekind cut 和George cantor 的cantor approach 定義實數的意義。Dedekind cut 是切開數線分成兩組，下組有最大元素，和上組有最小元素，或是下組沒有最大元素，而上組有最小元素，cantor approach是以歌西數列（cauchy sequence）$|Pm-Pn|<\in$，在有理數不

一定收斂，在實數中一定收斂的觀念中推展出來的。

§. 0與1之間的放大即是實數整體

整個實數R的範圍可以說是從$-\infty$到$+\infty$，若是以一數線表示，即是沒有 起點和終點的直線，在這兒，我們利用射影幾何的Harmonic Set，定義一個函數使得ϕ：［0，1］→［$-\infty$，0］∪［1，∞］成立（暫時假設$-\infty$和∞是一點），證明其為一一對應和映成關係存在，那麼根據同構的概念，只要我們能够在［0，1］找到任 何性質，實數R同樣也有這種性質。

(一)函數存在



在直線l上取兩點A，B代表0，B代表1，向上任作二平行直線，予0，1之間，取任意點P，作$AC=AP$，$BD=BP$，連結CD交l線於Q。

設$AP=x$，$BP=1-x$，$AQ=y$，

$BQ=y-1$

$$\frac{x}{1-x}=\frac{y}{y-1}$$

$\therefore 2xy-x-y=0$

(2) $y=\dfrac{x}{2x-1}$，當$x=\dfrac{1}{2}$，$\overleftrightarrow{CD}\mathbin{/\!/}l$

$$f:[0,1]-\{\frac{1}{2}\}\rightarrow$$

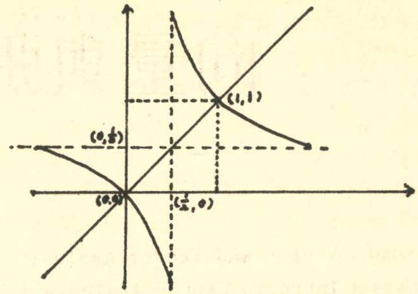
$$[-\infty,0]\cup[1,\infty]$$

(二)函數的幾何圖形

$2xy-x-y=0$

經過旋軸坐標軸

等於$(x')^2-(y')^2-\sqrt{2}x'=0$



(三)函數是1－1和映成（略）

$$f(x)=\frac{x}{2x-1}$$

$$f:[0,1]-\{\frac{1}{2}\}\rightarrow$$

$$[-\infty,0]\cup[1,\infty]$$

這個函數是許多從［0，1］放大到R中，形式上比較特殊的一種。

上接25頁

certain relatioships . e.g. (D , $>$)

參考：1. Introduction to metamathematics ; Kleene

2. Mathematical logic ; Kleene

3. Set Theory for the mathematician Rubin

4. Princia Mathemtica Vol. 1 : Whitehead : Russell.

5. Theory of Set : Bourbak

數學的對象是什麼呢？它的對象是數和圖形，大致說來，數學可分成三個部份，對象是數同時不包括「無窮」概念的屬於代數。包括「無窮」概念的，研究極限，無窮大，無窮小的，叫做分析。至於圖形的研究，這是幾何。當然一個優秀的數學家，應當對三方面都有相當的了解。 ～陳省身～

向量與張量

數二　段台生

Brand : Vector and Tensor Analysis
Davis : Intro. to Vector Analysis
Lass : Vector and Tensor Analysis
Spiegel : Vector Analysis and an intro duction to Tensor Analysis

什麼叫做向量？

依定義，向量是一群等值（大小相等，方向相同）的有向限段的集合，今以大寫英文字母（A，B，C，X，Y，Z）表向量，(為方便起見，不加箭頭符號），而普通的純量（scalar），則以小寫英文字母（a，b，c……x，y，z）表之，在三度空間中任一向量A，均可表為$A=xi+yj+zk$，或$A=(x,y,z)$，即（ordered triple）其中i，j，k各表X，Y，Z三軸單位向量而x，y，z則為原向量在各軸上之分量。

張量是一種抽象物體，它在我們考慮範圍內的任一坐標系中，有一組特定的分量，而在坐標轉換時這些分量仍保有某些特殊性質的。（James Math Dictionary）接了當的說，純量，向量均是張量中的特別情形。早先Gibbs和Heaviside的向量分析，Ricci的張量分析均是力學，熱力學，電力學中的有力工具，後來發展成為純數學中的一部分（尤其是微分幾何）。

張量的理論在相對論，物理數學及工程技藝中有穩固的地位，以至英國的分析學者E.T. Whittaker 認為是十九世末二十五年中數學中三大成就部門之一。向量與張量分析中精彩的理論很多，而一般有關此入門的書中，由向量擴大至張量時，忽略一些初學者該知道的：到底向量張量有什麼真正差別，由向量擴充到張量時有沒有增加些減少些什麼性質？筆者擬就此部份加以說明。

什麼叫做張量？

張量包括純量，向量，並列積（dyadics），triadics，tetradics 等等。其中純量叫階 rank（valence）為0的張量，向量是階為1的張量，dyadics 是階為2的張量，triadics是階為3的張量……依此類推。純量，向量的符號照舊，我們以ϕ，ψ， 等符號表階為2（或以上）的張量，如ϕ表dyadic則$\phi=\Sigma AiBi$（$AiBi$是dyads）如ψ表triadic則$\psi=\Sigma AiBiCi$（$AiBiCi$是triads）此處Ai，Bi，Ci 可〞看成〞張量之階為1之向量，兩個n階的張量是否相等，要看$n-1$階的張量是否相等。通常在張量中定義一個n階的張量和1階的張量（即向量）的內積為〝$n-1$〞階的張量。（我們也可視一個n階的張量是一種〝operator〞，它將一向量（1階）轉化成（converts into）一個$n-1$階的張量）。

如上：
$$\begin{aligned}\psi\cdot R&=\Sigma AiBiCi\cdot R\\&=\Sigma AiBi(Ci\cdot R)\\&\quad(Ci\cdot R\text{是一純量})\\R\cdot\psi&=\Sigma R\cdot AiBiCi\\&=\Sigma(R\cdot Ai)BiCi\\&\quad(R\cdot Ai\text{是一純量})\end{aligned}$$

ψ是階為3之張量；而$\psi\cdot R$，$R\cdot\psi$則是階為2的張量了。

設ϕ，ψ為兩個triadics若$\phi\cdot R=\psi\cdot R$（或$S\cdot\phi=S\cdot\psi$）對所有的R，S（

向量）成立，則我們說$\phi=\psi$。（若ϕ，ψ爲兩個dyadic，亦仿此）

若$\phi=\Sigma AiBi$爲一dyadic（以下我們以ϕ，ψdyadics）$AiBi$叫做dyads，Ai叫作antecedents，Bi叫做consequents。當$\phi\cdot R=0$或$S\cdot\phi=0$（vector）對所有R，S向量成立時，我們說ϕ是"zero y-adic"。關於dyadic的加法，我們定義（$\phi+\psi$）$\cdot R=\phi\cdot R+\psi\cdot R$（對所有向量$R$均成立）。

我們在上面所說的$\nabla F=(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k)(f_1i+f_2j+f_3k)$就是一個dyadic最好的例子。（在物理中stress就是2階張量量的一種）在∇F中的ii，ij，ik，……等都是"unit dyads"，由上面的乘法，因爲$i\cdot\nabla G=i\cdot(\frac{\partial g}{\partial x}ii+\frac{\partial g_2}{\partial x}ij+\frac{\partial g_3}{\partial x}ik+\frac{\partial g_1}{\partial y}ji+\frac{\partial g_2}{\partial y}jj+\frac{\partial g_3}{\partial y}jk+\frac{\partial g_1}{\partial z}ki+\frac{\partial g_2}{\partial z}kj+\frac{\partial g_3}{\partial z}kk)=\frac{\partial g_1}{\partial x}(i\cdot i)i+\frac{\partial g_2}{\partial x}(i\cdot i)j+\cdots\cdots+\frac{\partial g_3}{\partial z}(i\cdot k)k$
$=\frac{\partial g_1}{\partial x}i+\frac{\partial g_2}{\partial x}j+\frac{\partial g_3}{\partial x}k=\frac{\partial G}{\partial x}$（式中$i\cdot i=1$，$i\cdot j=i\cdot k=0$）同理$j\cdot\nabla G=\frac{\partial G}{\partial y}$，$K\cdot\nabla G=\frac{\partial G}{\partial z}$，所以我們很快可以得到公式①之右邊的一式[（$F\cdot\nabla$）$G=F\cdot\nabla G=F_1\cdot\frac{\partial G}{\partial x}+F\ \frac{\partial G}{\partial y}+F_3\frac{\partial G}{\partial z}$] 以此，我們也可很快地得到公式⑫ $\nabla\cdot(\nabla F)=\nabla^2F$（其餘的公式讀者自證）關於兩個dyadic$\psi$，$\phi$之乘積，若$\phi=\sum_{i=1}^{n}AiBi$，$\psi=\sum_{j=1}^{m}CjDj$則我們把$\phi\cdot\psi$ expand成mn個dyads：$\phi\cdot\psi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(Bi\cdot Cj)AiDj$ ϕ，ψ仍是個dyadic。

關於$\phi\times R$，若$\phi=\Sigma AiBi$，我們定義$\phi\times R=\Sigma AiBi\times R=\Sigma Ai(Bi\times R)$
$R\times\phi=\Sigma R\times AiBi=\Sigma(R\times Ai)Bi$，因$Bi\times R$，$R\times Ai$均是向量，所以$\phi\times R$，$R\times\phi$仍是dyadic。（若$\phi$爲$n$階張量，則$\phi\times R$，$R\times\phi$，均仍爲$n$階張量）

Remarks

在前面我們曾將向量"一般化"（generalized）成爲張量，那是否到此就算完了呢？它是否如我們前面所說的許多概念，爲了要能符合更多的事實，要使它更有用，更能解釋較深，較廣泛的問題，都需要把它們更進一步"一般化"，打個比方說，前面說"一個一階的張量就是向量"，這句話是否恰當？如果有更深一點的basis（基底）的概念，我們就知道較正確的說法應該是"一個一階的張量可以視同爲（identified with）一個向量"，前面說"兩向量的外積可看成一個向量"，事實上因使用左手系與右手系的結果差了一個"負號"，所以"兩向量的外積只可看成一僞向量（pseudovector）"，如curls就是pseudovectors（更精確點說，是pseudovector fields）又我們前面定義gradient，divergence，curl時都曾用到座標系和方向分量，然而今日的純數學有一新趨勢，那就是：儘量用coordinate-free style的型式來寫invariant equation（不變量方程式）這不僅爲了數學型式的優美（elegance），且實際上有助於數學理論的了解。

如[ABC]（boxproduct）$=\pm\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$

是在三維歐氏空間的表示法，[ABC]$=\pm V$，V代表A，B，C三向量的三線段所構成的平形六面體的體積，在左手系採"－"號，右手系採"＋"號。

(1)這種Reduce因繁複往往使證明過程不能清晰自然，如Chain Rule的證明。而Chain Rule本是很簡單的一回事：合成函數的近似是近似函數的合成。不應該越證越複雜。(2)這種方式只適用於有限維Normed空間我們是無法用有限個偏導數代表Differential，因而以Apostol書上的方式面臨無限維空間上函數時就只有一籌莫展了。

用偏導數Fomula來證明以上的定理，或其它微分理論中的定理都是不必要的。由觀察定義可知最自然的著手方式是研究各種趨近"於0的函數之超近"速度"

※定義：V，W為二Normed向量空間。A為$O\in V$的鄰集。

若f：$A\to W$連續於O且$f(o)=0$則稱f為Infinitesimal。

所有從V到W的Infinitesimal的集合以$I(V,W)$表之。

若f：$A\to W$在O滿足Lipsditize condition 且$f(o)=0$，則稱f為大Oh。

所有從V到W的大Oh的預合以$OB(V,W)$表之。

若f：$A\to W$滿足$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\|f(t)\|}{\|t\|}=0$且$f(o)=0$，則$f$為小$Oh$

所有從V到W的小Oh集合以$Ol(V,W)$表之。

最簡單一組能顯示$f(V,W)$ $OB(V,W)$ $Ol(V,W)$差別的函數是：

V，W均為R $f(x)=|x|^{\frac{1}{2}}$，$g(x)=x$，$h(x)=x^2$。

$f\in I(V,W)$但$f\notin OB(V,W)$

$g\in I(V,W)$，$g\in OB(V,W)$但$g\notin Ol(V,W)$，$h\in I(V,W)$，$h\in OB(V,W)$，且$h\in Ol(V,W)$顯然，$Ol(V,W)\subset OB(V,W)\subset I(V,W)$，三類函數均各自封於閉相加及被W的Scalars乘的運算。（以上請同學自證）除此之外，要證明定理一，二我們還須知道的是三類函數之間的運算結果是怎樣的，以及Hom（V，W）和它們有什麼關係，等單純事實。

※預備定理（Oh Rules）

(1)$f\in OB(V,W)$ $g\in OB(W,X)$
　$g\circ f\in OB(V,X)$

(2)$f\in Ol(V,W)$，$g\in OB(W,X)$或
　$g\in Ol(W,X)$，$f\in OB(V,W)$
　$g\circ f\in Ol(V,X)$

(3)$*$：$W_1\times W_2\to U$是連續Bilinear
　$f\in OB(V,W_1)$ $g\in F(V,W_2)$或

(4)$f\in Ol(V,W_1)$ g Bounded於0之某鄰集或f Bounded 於0之某鄰集$g\in Ol(V,W_1)$　$f*g\in Ol(V,U)$
　其中$*$同上$f:V\to W_1$，$g:V\to W_2$。

(5) Hom$(V,W)\subset OB(V,W)$

(6) Hom$(V,W)\cap Ol(V,W)=\{0\}$

要證明此定理只要想V，W，U都是R的特殊情形，然後把絕對值換成Norm，把數解釋成抽象Normed空間之元就成了。

連續Bilinear的$*$是實數乘法的推積，包括熟知的向量innerproduct及Cross product 為特殊情形它們的基本性質之一是$\|X*Y\|\le\|X\|\|Y\|$。

(1) pf：若$\|f(t)\|\le a\|t\|\le r_1$而$\|g(t')\|\le b\|t'\|\le r_2$，則當$\|t\|\le r_1$且$\|f(t)\|\le r_2$時$\|g\circ f(t)\|\le ab\|t\|$。所以$\|g\circ f(t)\|\le ab\|t\|$成立於$\|t\|\le r=\min\{r_1,\dfrac{r_2}{a}\}$

(2) pf：若$f\in Ol(V,W)$則可對ε，取$a=\dfrac{\varepsilon}{b}$而由(1)知存在r使$\|t\|\le r$，時$\|g\circ f(t)\|ab\|t\|=\dfrac{\varepsilon}{b}b\|t\|=\varepsilon\|t\|$，因$\varepsilon$任意，故$g\circ f\in Ol(V,W)$。

同樣的方式可證明f，g條件對調結論亦然。

(3) pf：若$\|f(t)\|\le C\|t\|$成立於$N(o,r)$。對任一ε，選δ使$\|g(t)\|\le\dfrac{\varepsilon}{c}$成立於$N(O,\delta)$我們就可得到$\|f*g(t)\|=\|f(t)*g(t)\|\le\|\delta(t)\|g(t)\|\le\varepsilon\|t\|$

當 $\|t\|\le\min\{\delta,r\}$ 因而 $f*g\in Ol(V,W)$。同樣的方式可證明 f，g 條件對調結論亦然。

(4) pf：若 $\|g(t)\|\le B$ 成立於 $N(o,r)$，對任一 ε 選 δ 使 $\|f(t)\|\le\frac{\varepsilon}{B}\|t\|$ 成立於 $N(o,\delta)$ 則 $\|f*g(t)\|\le\|f(t)\|\,\|g(t)\|\le\varepsilon\|t\|$ 成立於 $|t|\le\min\{\delta,r\}$。因而 $f*g\in Ul(V,W)$。同樣的方式可可證明 f，g 條件對調結論亦然。

(5) pf：取 δ 使 $\|f(t)\|\le 1$ 成立於 $N(o,\delta)$，$t\in V$，$t\neq 0$，則 $\frac{\|\delta t\|}{2\|t\|}<\delta$，因而 $\left\|f\left(\frac{\delta t}{2\|t\|}\right)\right\|\le 1$，故 $\|f(t)\|\le\frac{2\|t\|}{\delta}$ 對任 t 均成立，$f\in OB(V,W)$

(7) pf：設 $f\in \mathrm{Hom}(V,W)\cap Ol(V,W)$，$\alpha\neq 0$。對任一 ε，取 r 使 $\|f(t)\|\le\varepsilon\|t\|$ 成立於 $N(o,r)$。再設 $x=\frac{2}{r}\|\alpha\|$，$t=\frac{\alpha}{\|\alpha\|}\frac{r}{2}$，則 $\alpha=xt$。因而 $\|f(\alpha)\|=\|f(xt)\|=|x|\,\varepsilon\|\alpha\|$，$\varepsilon$ 任意故 $f(\alpha)=0$，因 α 也是任意故 $f=0$。

我們現在證明定理一，二。

我們的基本定義可重新寫成：

$F\in D_\alpha(V,W)\Longleftrightarrow \exists T\in\mathrm{Hom}(V,W)$ 且 $\exists Ol\in Ol(V,B)$，$\triangle F_\alpha=T+Ol$。

在證定理一(3)，(4)，定理(2)時我們要用三個簡單的等式：

$\triangle(F+G)=\triangle F_\alpha+\triangle G_\alpha$，$\triangle(F*G)_\alpha=(\triangle F_\alpha*G(\alpha))+(F(\alpha)*\triangle G_\alpha)+(\triangle F_\alpha*\triangle G_\alpha)$。

$\triangle(G\circ F)_\alpha=\triangle G_{F(\alpha)}\circ\triangle F_\alpha$，請同學自己證明。

定理一的證明：

(1)若 $\triangle F_\alpha=T+Ol$ 且 $\triangle F_\alpha=T'+Ol'$ 則 $T-T'=Ol'-Ol\in Ol(V,W)$。

由而由預備定理(6) $T-T'=0$，（以下用 dF_α 代表 T）。

(2)由預傳定理(5) $dF_\alpha\in OB(V,W)$ 因而 $\triangle F_\alpha=dF_\alpha+Ol\in OB(V,W)$，故 F 在 α 滿足Lipschitze condition。

(3) $\triangle(F+G)_\alpha=(dF_\alpha+dG_\alpha)+Ol+Ol'$，故 $F+G\in D_\alpha(V,W)$ 而 $d(F+G)_\alpha=dF_\alpha+dG_\alpha$。

(4) $\triangle(F*G)_\alpha=(\triangle F*G(\alpha))+(F(\alpha)*\triangle G\alpha)+(\triangle F_\alpha*\triangle G_\alpha)$

因而 $\triangle(F*G)_\alpha=(dF_\alpha+Ol)*G(\alpha)+F(\alpha)*(dG_\alpha+Ol')+Ol*Ol'$
$=dF\alpha*G(\alpha)$ 的 $F(\alpha)*dG\alpha+[Ol*G(\alpha)+F(\alpha)*Ol'+Ol*Ol']$。

由預備定理(3)(4)，$Ol*G(\alpha)+F(\alpha)*Ol'+Ol*Ol'\in Ol(V,W)$

故 $F*G\in D_\alpha(V,X)$ 而 $d(F*G)_\alpha=F(\alpha)*dG_\alpha+dF_\alpha*G(\alpha)$

(5) F 爲定値，則 $\triangle F_\alpha=O+O$，故 $F\in D_\alpha$

(6) $\triangle F_\alpha(t)=F(\alpha+t)-F(\alpha)=F(t)+O$ 因而 $F\in D_\alpha(V,W)$，$dF_\alpha=F$

定理二的證明：$\triangle(G\circ F)_\alpha=\triangle G_{F(\alpha)}\circ\triangle F_\alpha$。

$$\begin{aligned}\text{因而}\triangle(G\circ F)_\alpha&=\triangle G_{F(\alpha)}\circ\triangle F_\alpha+Ol\circ\triangle F_\alpha\\&=dG_{F\alpha}\circ dF_\alpha+(dG_{F(\alpha)}\circ Ol'+Ol\circ\triangle F_\alpha)。\end{aligned}$$

由預備定理(5)(2)，本定理(1) $dG_{F(\alpha)}\circ Ol+Ol\circ\triangle F_\alpha\in Ol(V,X)$

故 $G\circ F\in D_\alpha(V,X)$

而 $d(F\circ G)_\alpha=dG_{F(\alpha)}\circ dF_\alpha$

現在我們討論Directiond Derivative，Portial Differential 以及Higher Differential。

在一般normed空間 V 中過 α 在 U 方向上的直綫也可用參數方程式表示：$Y=\alpha+tu$，$t\in R$，α，$u\in V$。因而 $F:A\to W$ 在 α 的 u Directioal Derivative 也可定義爲

$D_uF(\alpha)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(\alpha+tu)-F(\alpha)}{t}$ 是 W 中之

元素。若$F\in D_\alpha(V,W)$，我們可以證明$D_u F(\alpha)$必然存在而且，$D_u F(\alpha)=dF_\alpha(u)$。請同學自證。

所謂Partial differential 亦爲一自然的概念，指$F: A\to W$在V之某子空間V'所具備的局部綫性近似。

※定義：$F: A\to W$，A爲α鄰集，V'爲V之子空間，$I_{V'}$是 identity 函數在V'的Restrirtion，若存在$T\subset$Hom(V',W)，$Ol\in Ol(V'\ W)$使$\triangle F_\alpha\circ I_{V'}=T+Ol$成立。則我們稱$F$在$\alpha$爲對$V'$部份可微分，$T$爲其在$\alpha$的Partial Differential。

T顯然是唯一的，因而用$dF_\alpha^{V'}$表之。

若$F\in D_\alpha(V,W)$由$\triangle F_\alpha\circ I_{V'}=(dF_\alpha+Ol)\circ I_{V'}=dF_\alpha\circ I_{V'}+Ol\circ I_{V'}$我們知道$F$在$\alpha$必對$V'$部份可微分，且其在$\alpha$的Partial Differential 是Differential 在V'的Restriction i.e $dF_\alpha^{V'}=dF_\alpha\circ I_{V'}$。

假設我們把V分解成了有限個子空間Vi $V=\prod_{i=1}^{n} V_i$。函數$A\xrightarrow{F}V$可微分於α，$A\subset U$，函數$A\xrightarrow{G}W$可微分於$F(\alpha)$，而$F(A)\subset A'\subset V$，由China Rule 可知$G\circ F$當然可微分於α，但値得注意的是此時F可視爲n元函數組$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$，$f_i: A\to V_i$。因而我們自然想運用Partial Differential $dG_F^i(\alpha)$及$df_{i\alpha}$來表示$d(G\circ F)_\alpha$這樣就得到General Rule：$d(G\circ F)_\alpha$

$$\sum_{i=1}^{n} dG_F^i(\alpha)\circ df_{i\alpha}$$

$F=\sum_{i=0} I_i\circ f_i$，$I_i$是 Identity 函數 Restrict到$V_i$，

因而$dF_\alpha=\sum_{i=1}^{n} d(I_i)_\alpha=\sum_{i=1}^{n} I_i\circ df_{i\alpha}$。

但$dG_F(\alpha)=\sum_{i=1}^{n} dG_F^i(\alpha)$

所以$d(G\circ F)=dG_F(\alpha)\circ dF_\alpha$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} dG_F^i(\alpha)\right)\circ\left(\sum_{i=1}^{n} I_i\circ df_{i\alpha}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} dG_F^i(\alpha)\circ df_{i\alpha}$$

如果F在$A\subset V$上每點均可微分，我們自然把αF看作從A到Hom(V,W)的函數$\alpha\to dF_\alpha$。但Hom(V,W)也自然的構成Normed 空間〔?由預備定理一(5)）可知，$F\in$Hom(V,W)則F Lipschitze 連續於0，且存在M使$\|F(t)\|\le M\|t\|$對任一$t\in V$均成立。若對F取滿足上不等式的M的最大下界作爲$\|F\|$，Norm的話，Hom(V,W)就成爲Normed 空間了（詳細證明請同學們自己做）因而我們可以討論dF在α的微分，其Differential $d(dF)_\alpha$，如果存在的話就叫做F的二次Diffe reotial 以d^2F_α表之。同樣dF在α的二次Differential $d(d^2F)_\alpha$如存在就叫三次Differential，以次類推，d^2F_α是Hom$(V$, Hom$(V,W))$之元，而d^3F_α就是Hom$(V$, Hom$(V$, Hom$(V,W)))$之元了，由基本的multilinear algelra 可知Hom$(V,(V,W))\cong$Hom$(V,V;W)$，所有從$V\times V$到W的連續 Bilinear 函數之集合，（$\cong$表示二空間有自然的一一對應同構）因而二次Differential 可視爲$V\times V$到W的連續Bilinear 函數，而n次Differential 可視爲從$V\times V\times\cdots V$到W的$n-$linear 連續函數。

雖然高次微分使我們從最初的空間爬到“很高”的函數空間去，但Higher Differential 仍是Differential 的特殊情形 均特殊情形，所以我們可以容易寫出一些對應定理一，二的性質，如$d^p(F+G)_\alpha=d^pF_\alpha+d^pG\alpha$。

最後我們Specialige general thery 同到R^n。

若$f\in D_x(R^n, R^m)$，$f=(f_1, f_2, \cdots f_m)$，則$f_i=f\circ\pi_i$，$\pi_i:(x_1, x_2, x_i, x_m)\to x_i$。

因而$f_i\in D_x(R^n, R)$，f_i在x的n個偏導數$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$必存在，因爲它們就是$f_i$在$x$過$\{\delta_j\}_{j=1}^{n}$各方向的Directioall Derivative，亦即$df_{ix}(\delta_i)$。但$\{\delta_j\}_{j=1}^{n}$

正是 R^n 的最簡單基底，其它 k^n 的元素均是它們的綫性結合，於是我們得到

$$df_{ix}(t)=df_{ix}\left(\sum_{j=1}^{n} t_i\delta_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}t_j$$

再有鑑於 $df_x=\sum_{i=1}^{n} I_i\circ df_{ix}$，因

$F=\sum_{i=1}^{n} I_i\circ f_i$，我們就得到以下的結論：

※命題一Jacobian矩陣Representation

若 $f\in D_x(R^n, R^m)$，則 $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ $i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots n$ 均存在。

$$df_x(t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}t_j$$

$$=\left[\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots\ \vdots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1\\ \vdots\\ t_0\end{pmatrix}\right]^T$$

結合上命題以及定理二Chain Rule 可得 Classical Chain Rule：

※系：若 $f\in D_x(R^n,R^n)$，$g\in D_{\delta(x)}(R^m, R^h)$，$x, y, z$ 分表示 R^n, R^m, R^h 上的變元。

則 $g\circ f\in D_x(R^n, R^h)$，而且

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial z_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial x_j},\quad k=1, h$$

$j=1,\cdots n$。

若 $f\in D_\alpha(R^n$ 仁 Hom$(R^n, R))$則 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$，$j$，$j=1\cdots n$ 均存在，因爲它們實在是一 $D_x(R^n, R^n)$ 中函數的 n^2 個偏導數：定義 $I_0:\pi_i\to\delta_i$，則：

$I_0\circ df\in D_x(R^n, R^n)$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)=\left[\pi_i\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\delta_k\right)\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\pi_i\circ I_0\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\pi_k\right)\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_j}(\pi\circ I_0(df_x))=\frac{\partial(I_0\circ df)_i}{\partial x_j}$$

更進一步由Hom$(R^n, R)\overset{I_0}{\cong}R^n$ 所示我們的基本“Duality”以及上命題的矩陣Repes-entation 我們可以得到：

※命題Ⅱ Hessian 矩陣Representation

若 $f\in D_x(R^n$ Hom$(R^n, R))$ 則所有 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ 均存在

而且 $d^2f_x(t,\cdots t_n')=$

$$\left[(t,\cdots t_n)\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1\\ \vdots\\ t_n\end{bmatrix}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}t_i t$$

上接66頁

〔0，1〕，在每一有理數點其值爲1，其餘各點之值均爲0。

3. 此判準請參看Michael Spivak 的 Calculus on Manifolds 第五十三頁。
4. 設 $f_1,\cdots,f_n,\cdots$，爲一個函數序列，若 $f_1(x)\le f_2(x)\le\cdots\le f_n(x)\le\cdots$ 則稱此序列爲非減少序列；仿之可定義非增加序列。
5. 亦即在它們的共同定義域上，函數值不相等的點成一零測度集。
6. 要注意，這裏函數序列的極限是對模方而言，與前面所講的那種幾乎到處收斂的意義並不相同

數學推論上的一個評價

(A Critigue of Matnematical Reasoning)

數二 Onhearting

本文可以說是摘譯，也是以說申論；更可以說“抄”來的。但是，無論如何，我抱了一個宗旨；用自己的意思，自己對它的看法，“誠實”地寫出來；希望各位讀者能分享一點內容的旨趣。如果內容令你（妳）滿意，不妨反覆再看一次，會有所得的。萬一裏面出現了“謬論”，希望你們也能引以爲戒，因爲至少就有這麼一個人誤解它。

～後設數學 Metamathematics～

後設數學的目的在於建立古典數學的一致性（Consistency），乍看之下，這是一個令人不解的問題；因爲我們知道：一致性的討論是發生於構作一個公設系統時，公設和公設之間所存在的“重要”關係；在下面我們會詳細討論。如今我們卻把數學理論（mathematical theories）（包括符號系統）本身看作學習數學的內容，這是可能的嗎？數學理論中含有一個系統的數學對象（objects），如今我們把對象變成它自己；也許我們會以爲這是一種計劃，不能建構的空中樓閣……。但是它卻擁有美侖美奐的憧景，是嗎？

本文大致參考：Kleene 所作的後設數學導論而寫的，如果讀者肯下加夫去看的話，獲益必然不少。現在就以其中的一個重要部份（主題）作爲我們討論的開始吧！

～詭論（Paradox）～

我記得在上一期的系刊曾有過一段述及詭論的文章，但是那只是提醒各位法意它的開始。因爲，事實上，詭論的發生對集合論的影響至鉅，而集合論又是形成今日數學的主題。可是一直到今天爲止仍舊沒有人，也沒有理論；在這方面做適切的，完整的闡明，當然這些解釋須要得到一般數學家、哲學家，甚則語意學者的同意。（很抱歉我並沒有把你（妳）們列入在同意與否的行列中。）所以在此我想更深入點把一些相當令人“回味”的詭論在下面說明它：當然只有這些詭論被說明爲“明確的”（validity），則集合論也就比以前來得更堅固，更令人滿足。

(a) 康德的詭論（Cantor）

首先我們知道 $M \subseteq N \rightarrow \overline{\overline{M}} \leq \overline{\overline{N}}$，$M$，$N$ 爲集合。

令 M 爲所有集合所成的集合，或者我們稱 M 爲一類（class），而 $p(M)$ 代表所有部份集合所成的集合（power set）；則 $p(M) \ni M$，$\overline{\overline{p(M)}} \leq \overline{\overline{M}}$ i.e $\overline{\overline{p(M)}} \not> \overline{\overline{M}}$ 現在我們將證明 $\overline{\overline{p(M)}} > \overline{\overline{M}}$，這就是康德的定理。在此我們省略它的證明，各位可參考：（數學家的集合導論（Rubin）p. 68，後設數學導論 p. 14），在此我們顯然地得到 $\overline{\overline{p(M)}} > \overline{\overline{M}}$ 且 $\overline{\overline{p(M)}} \not> \overline{\overline{M}}$，可能嗎？深思之餘；各位就會發覺，它們之所以會導至麻煩的原因就是集合與集合所成的集合之間的限制不夠嚴密，如此則類似的詭論可能更多，如 Burali

Forti 有關無窮序數（transfinite ordinal） 也是相類似，甚至於羅素的詭論也如此，當然補救之途“很多”，“只是還不能完美地說明罷了”。

(b) 羅素的詭論（Russell）

一個集合T是不是它本身的一個元素？由歸謬法（reduction and absurdum）我們很容易可推得$T \varepsilon T$，而且$T \notin T$ 這也構成一個詭論。這個詭論是可由康德的詭論推演出來的，各位不妨試試（Hint：$p(M)=M$）。

(1) 理髮師的詭論：一個鄉村的理髮師，他將替所有而且只有那些不能替自己理髮的人理髮；那麼他自己由誰來理髮呢？這也能形成一個詭論，除非我們假設沒有這種人。

(2) 自治市的詭論（municipality）：在荷蘭的每一個自治市必定有一個市長，而且只有一個市長。而這市長可能不是該市的居民，那麼假如我們允許他住在一個特別的區域S，對於所有不是市民的市長都令他們住在S，現在假如S也構成一個自治市，那麼S的市長住在那裏呢？

(3) 目錄的詭論（Biblography）：假設有一本書目把所有在圖書館中的書都列出來，那麼那本目錄要列在那裏呢？

羅素也曾設法用邏輯的方式來表詭論，而不用集合論的名詞。於是他假設凡是能够使用自身來說明的性質稱之爲“可謂的”（predicable），反之則“不可謂的”（impredicable），例如抽象就是抽象（Abstract），所以它是可謂的；但抽象（concrete）也是（abstract），所以它是不可謂的；那麼我們就會想到究竟“impredicable”是：predicable 還是 impredicable。

(c) 理查的詭論（Richard，1905，Dixon 1906）

它的內容主要是涉及“有限的”可定義性的。這個詭論的主要旨趣是在述及它在語言（英語）上的使用，加上它與康德所證明的數論函數（numbertheoric frontion $f_n(n)+1$ $n \varepsilon N$）爲不可數，很相近，所以，理查就根據實數的不可數性質來定這類詭論的形式。現在就以英語上的一個詭論爲例：

令 26 個字母，逗點和字與字間的空格（Blankspace）合爲 28 個新字母，則所有語言中的表示法（expression），都可用這 28 個字母以有限序列的情況表示出來，而這序列不以“字與字間的空格”作爲首位。現在讓我們考慮下面的表示法：“the least natural number not nameable in fewer than twenty－two syllables.” 但這個表示法顯然只有 21 個音節，可是由上面我們可知，這一個自然數不能用比 22 個音節還少的表示法，在此卽構成一個詭論，明白嗎？

(d) 說謊者詭論（the liar；Epimenides

這個和上述發生近代的詭論略有不同；上述所論爲涉及集合論上本身集合或者無限集合的問題，而此乃邏輯上推演的衝突所產生的。Epimenides 爲克里特人，他說：「所有克里特人永遠在撒謊。」各位同學，只要你們留心敍述的內容及敍述的本身，是不難發現這個也足以成爲一個詭論；下面我們再擧兩個例子：

(1) 假慈悲者的雙關體：（dilemma of the crocodile）

一個假慈悲的人，他偷走了一個孩子；他允許歸還那個孩子；假如孩子的父親猜中：「他是否要歸還這孩子給他？」現在如果那孩子的父親猜測；那個假慈悲者將不會歸還那個孩子。則……？

(2) 旅行者：一個旅行的人，誤入食人族的地方；他們給他一個機會來敍述一件事；假如他的敍述正確，就將它“烹”了。如果錯誤，就將他“烤”了。那麼他如何敍述呢？這無疑也是一種雙關體的形式，如果那個人是你（妳），你怎麼說？

提出了這麼多詭論，可是由這一連串的問號和不定論，我們立刻能得到的啓示是什麼呢？

～由詭論所得的推論～

各位讀者也許曾花費了很多時間來解決這些有關詭論問題。但是，……束手無策。自從詭論發生以來，以至於今天，不知多少人默默地從事這方面的工作，但是，無論如何，並沒有受到廣大地接受。而且，最簡單的答案，只是一個特殊的誤謬而已，並沒有任何的“事實”可以被改變。

我們也許會以爲(a)，(b)詭論的錯誤是發生在所用的“集合太大”了；集合的集合，基數的集合…… etc. ，或則更容許一個集合是本身的一個元素。當然這也是討論到集合所成的集合的形式。但是，我們知道這些在某一個程序而言並沒有“錯”，可是也不如此地簡單。由於這些詭論的出現，使得我們須重新建立一種經過改變基礎（ basis ）的集合論。譬如：假如，我們禁止使用“集合所成的集合”，我們就會發現這個和康特對集合的定義產生衝突，爲了建立完整的集合論，我們必須涉及所有集合的定理，而所有集合再建構一個集合。假如我們不這麼建構，無疑地我們必須對集合另下定義，或者，當滿足康德所下定義的一個集合的元素將建構成一個集合時，用更廣的標準來補充它，決定它。（ Skolen 1929 ）

〔註〕Cantor's definition : By a “set” we understand any collection of definite well－“distinguish” objects m of our perception or our thought (which are called the “elemens” of M) into a whole.

(a) 公設化的集合論（ Axiomatic set theory ）

我們現在來考慮究竟詭論的存在會給公設系統帶來什麼麻煩。如果一個公設系統滿足一致性（ Consistency ），那麼它將不會導出任何(矛盾)；也就是同時承認命題的眞與僞。反之，則稱它是不一致的。因此如果我們承認羅素詭論中敘述，那麼集合論中的系統就會不一致，如此我們就不須，而且也不能拿它來作爲建立數學的基礎，這也很顯然地告訴我們爲何我們所知道的數學是建立在康德直覺的集合論上，因爲我們沒有發現“任何”的詭論。是嗎？所以只要我們能够排除所謂“太大的集合”的限制，和阻止已知的誖論（ Antinomies)，如此就能够重建集合論。在這時，數學家和邏輯學者就設法再從根本的公設上重新給予評價。其中最具有影響力的一支就是羅素（ Russell)和懷德海（ Whitehead ），他們合著了數學原理（ principia mathematica ），爲了避免詭論，就提出了所謂的類型論（ Theory of types ）。它裏面定義出無窮的“不同集合變元”的類型。於是他們以爲，“ u 是 v 的一個元素”（元素公式）若且唯若 v 的類型剛好比 u 大“ 1 ”。更廣泛地說，一個公式（ formula ）是有意義的，假如他的元素公式（ Atomic formulae ）是有意義的話。這看起來是很簡而易見，但事實上則不然，各位有耐心的話，不妨參考他們的經典作品（一般人以爲）。再來的一支是Quine 在1931年提出的：他是在詞意（ Semantical ）的法則，當然“ x is not a member of x ”是不可能使它分層的。目的仍就在避免詭論的發生是吧！但是，無論他的系統是如何地，方便（對類型論而言），他卻難免背負著一個悲慘的裂縫：選擇公設在他的系統中是不一致的（ Specker ）

〔註1〕。在近代被數學家拿來使用的兩支主要的公設系統是由 E. Zermelo 和A. A. Fraenkel所提出的ＺＦ理論，及由von. Neumann ，Bernays 和Godel 所發展的ＮＢＧ理論。當然我們知道上述的公設系統都具有很完善的推論及理由；在此，我想不怨其繁地說，他們也是爲了避免“明顯”的詭論之產生（不允許任何詭論的存在），他們考慮，敘述如何才能構成一個集合。在此我得說，目的已達到；一個詭論的影響是多麼地深遠啊！至於ＺＦ和ＮＢＧ所提出的內容，經過，旨趣

，將留給同學做一個“有趣”的題目。（參考：Rubin，Set Theory for the Mathematician. Sec. 1.1. page 5）。

(b) 基礎上的廣泛問題：（The broader problem of Foundations）

假設公設化的集合論已避免了詭論的產生，而這所得到的保證；卻是一直到今天還未被遭遇的否定形式：它是否能提出一個解決“包含詭論的問題”的完整解答呢？我們知道，自從非歐氏幾何學的發現以後，數學家們已承認多種空間的可能性（別於歐氏空間）。公設系統被用來顯示出一種或他種的空間，甚則舉出數種空間的共同特色，以利於幾何學家的學習。而在形式上公設的理論只能表出一種已經被主張的“不可承認之特色的組合”（an unrealizable combination of features）。但是在算術和分析中，理論卻以集合論爲發展的極點。在這地方似乎是愈來愈使人迷糊了。不但沒有涉及所謂的基礎問題，甚且仍在主題外面繞圈子。因此，我想直截了當的說：「那些站在時代前端的數學家們，他們處理那些存在的物的系統（systems of objects）〔註2〕，再藉此而建立系統。」至於所提及的定理，實在是針對著“物的系統”（假如有），根據假設來使用命題以滿足公設。但是，在這時候，除非是在邏輯受了打擊，或者在結構上及數學內容中推理有了錯誤，系統是不會產生任何的誤謬的，是吧！至今，我們究竟能相信什麼呢？

現在我們說，這些主題是被建立於一個公設的基礎上而不是本身來安排所給予的問題。在公設化之後，我們多多少少仍然有所謂的眞（truth）和僞（falsity），假如公設系統並不是形式上的，那麼公設本身必定是眞的。萬一公設系統是形式上的，至少我們也得承認定理是跟在公設後面而得來的；而且假如數學家的努力不至於導至無意義，則在這些結果之間仍然具有“些微”的關係及公設化的集合論存在有一些努力的結果。在形式上被公設化的數學命題，並不能建構整個的數學；在另一方面還有所謂“直覺地”被了解的數學。假如我們必須放棄先前包含算術，分析和集合論的信仰（公設化上的問題），我們是不可能得到滿足的；除非我們知道在某些地方，我們所學習得到的信仰是錯的，而且就在這時劃上一條分割線。在這時候，問題發生了；消去詭論的直接問題也就加入了所謂在數學和邏輯上廣泛的基礎問題。讀者們，到這裏你們是否發現，詭論的影響，實際上是延續不斷的……。現在我想提出幾個問題：1.數學的眞，其本性是甚麼呢？2.數學命題本身有何意義？3.它們所留下的證明（evidence）是什麼？

以上所提出廣泛，複合的問題存在於哲學上，而與已經發生在數學分析中的詭論的情況不同。但是這種情況在歷史上曾導至一種强烈的在數學家這方面的研討，當然它要比其它的任何方面來得出色，不否認？因此詭論顯然地參與在解決這種廣泛問題裏面。

談到這裏我想該可以結束我想說的前一段，後面接著來的是“在數學基礎的三大派”。在這裏我得申明，我沒權利，而且也沒能力來分辨究竟那一派比較“適合”於我們，但自己似乎對邏輯主義派較推崇，因此優先介紹它：

～邏輯主義～Logicism

“邏輯主義者的主張是：數學只是邏輯上的一個分枝而已”。而數學中的觀念（notion），定理也可以由邏輯的觀念來定義，邏輯的方法來證明。

萊伯尼茲（Leibniz，1666）是最早體認到，這個問題，雖然到今日，他的願望還未能實現；但是在當時即有這樣的遠見，並非易事。後來Dedekind（1888）和Frege（1903）以邏輯的觀念來定義數學上的觀念，而畢安諾（Peano 1908）以邏輯的符號表示（象徵主義）（symbolism），來表示數學上的定理。

下面是一個用邏輯的觀念來定義數學中的例子。首先我們根據Frege 和羅素對於基數（Cardinal）的定義，定出o，n，$n+1$

（有n個元素的集合與基數爲n的集合是等價的。）如此我們即可知道一個有限的基數能以具有性質p的方法表示之：

(1)o有p的性質。

(2)假如n有p的性質，則$n+1$有性質p簡而言之，一個自然數在歸納法存在的情況下，可以基數的方法來定義，這個和我們預先假定一個直覺的自然數列，有顯然的不同；而且從原理我們也可明白：當任一個自然數具有特別性質p(1)，(2)滿足，則所給予的自然數必定具有此特別的性質p。在此，我們不預先假設，定義自然數的存在，而是以邏輯上基數存在的性質來說明。於是這種定義，基於羅素所賦予的特性，是不可謂的（impredicate）。因爲，由這樣定義出來的定義，該屬於預先給予基數的性質，明白嗎？

再來，又遇到了一個困惱的問題，就邏輯主義而言，我們如何來解決發生詭論的問題？也許各位該還記得上面曾提及的“impredicate”是足以形成一個詭論的，因此，爲了適合邏輯主義在數學的建構，羅素提出了所謂“分枝的類型論”（ramified theory of Types 1908～1910），這是一個很妙的方法；他定“最基本的東西（ object ）或個體（ individual ）”，形成一個類型，以“O”類型表之。“個體的性質”以“1”類型表之，再來“個體的性質的性質”表爲“2”類型以下類推。那麼所有的性質將會以類型（0，1，2，…）的姿態出現。如此就能够對“可謂的”和“不可謂的”這兩個性質有了交待。更仔細地推引，我們可知像關係（relation）和類（classes），也可以用允許的類型來表示。然後，爲了排除不可謂的定義；比0大的類型就把它們分開爲不同的“秩”（order），如此，類型1的，就可不必提出類型爲0的所有性質，而對某一“秩”定義的性質，將屬於緊接而來較高一個秩的類型中，如今，邏輯主義對於自然數的定義成爲“可謂的”，當p在某一個“秩”的類型中，則該自然數是在比這類型剛剛大1的類型中。這個看起來是如何地巧妙，令人滿意。但是，這種分開爲各種不同秩的方法，使得那些包含不可謂的定義的“分析建構”變成不可能。爲了脫離這種不幸的結果，羅素就採用設準（postulated）的方法提出所謂“可還原性的公設”（axiom of reducibility），它主要的是來處理比所給予“秩”較小的性質，當然它有一個共同可以擴張的性質，對於秩爲0的性質而言。這也就告訴我們，假如只承認那些可以定義的性質之存在，那麼公設所表示的是：對於每一個在給予類型中不可謂的性質，就有一個等價的可謂的性質與之對應；像這樣的結構可以說相當完善了；而且對於所可能產生的問題，一一加以解決，可是我想各位不知有否考慮到，他提出此公設，是否具有獨立性？一致性？甚且完全性呢？……。在下面我們得考慮到在怎樣的條件下，才相信可還原性的公設。

用邏輯符號的表示，來處理數學上演繹，推論的問題，對近代符號邏輯的發展影響很大。而由邏輯中數學的演繹（deduction）被承認爲一種直覺的公設系統，而這公設是被相信的，至少它也會如包含該領域的正確假設來被接受。但是它的困難在於我們怎麼會相信這個公設；上述的可還原性公設，假如，性質能被建構起來，那麼它的內容是產生於建構的基礎中，而不是由這一個公設來的。這個公設有一個專斷的，也許是實用的理由，他可導至當前所要解決的問題，得到預期的結果，（到目前爲止沒有其它的結果）但是它並非我們所能滿足的，是嗎？由於此我很懷疑它會日趨動搖，終於倒下來；當然也許它不會如此，除非………。

Ramsey（1926）他發現所有所希望得到的結果，除了具有簡單類型論的秩的譜係（hierarchy of orders）外，都沒有辦法獲得。於是他就把已經發現的諺論（Antinomies），分成兩類：

(1)邏輯的—（Burali－Forti，Cantor，Russell）

(2)詞意的—（Richard，Epimenides）

而且他也發現邏輯上的謬論將因為類型譜系而排除，至於詞義上的，則由於符號表示的語言來防止，更以相同的語言表示來說明所須要的意義。但是對於在類型中斷定不可謂的定義，並非要用就可用，由上面的說明，這是很顯然地。於是 Ramsey 他把這些不可謂的定義，當與可建構性（Constructibility)及可定義性（definability）獨立地存在時，限定出一種謂詞全然性（totality of predicat-es）的概念。這曾經被稱為是神學的（Theoloyical）。由上面我們可以知道無論是懷德海，羅素或者 Ramsey，他們都不能够對於邏輯主義的主題，目的作一成功的建構。這似乎給我們對於所謂邏輯主義一個「絕望」的打擊，但是，唯有如此，才帶來更多的機會去解決"更"深入的問題，那就要看各位的努力了。也許它的可能性使我們懷疑？是的，在 1946，Weyl 就以為在數學原理一書中的系統已在動搖，他說：「數學不再建立於邏輯上，而是在一個邏輯主義者的憧景中……。」而且他也發現如果一個人他（她）想相信這個所謂的"超越世界"（transcendental world），他（她）也要接受公設化集合論（ZF，NBG）的系統，而這些對於數學的演繹，推推論而言可收"較簡單結構"的好處。

邏輯主義以對於實際世界的假設（無窮公設），來處理自然數的級數之存在性。而且直覺主義者或形式主義者則不同，從這些主義的觀點，自然數序列是要比基數來得更基本。當然這是針對邏輯主義所提出的特性而言。在這方面的介紹也差不多了，但我得再補充幾句話：雖然，邏輯主義者沒有確實地解決，實現他們所提出來的目標，可是它所締造下來的系統是十分完密的，所以對這方面仍有極光明的發展前途。

近代在邏輯上的工作 Quine（1940）是相當有成就的一人，對於邏輯主義的批評、討論主要是由 Gödel（1944）所提出，而最基礎的介紹，是由羅素和布雷克（Bleck 1933）等人所建立的。

～直覺主義 Intutitionism～

直覺對於每個人來說並不陌生；它在某一尺度在足以令人步入誤謬的陷阱；也許又因為在另外的一種狀況下給我們相當滿足的回答，所以至今它仍然擁有極"崇高"的地位。

西元 1880 年，當 Weierstrass，Cantor，Dedekind 的方法正在盛行時，克羅尼克（Kronecker）卻極力地主張：他們基本的定義完全是空談；因為，他們並不能使人在一般狀況下決定一種所給予的內容是否滿足定義。而波因卡（Poincare'），他也在維護"數學歸納法是一種數學直覺地推論的有力工具"的方面下過很大的功夫，此二人可以說是早期的直覺主義者。

西元 1908 年，布勞瓦（Brouwer）在他的一篇論文"邏輯的原理是不值得信任的"中，向對古典邏輯中規則的信仰者挑戰；這些主要的是指自亞里斯多德以來，一般和主題的內容相獨立，而具有"絕對"的眞確者。接著威爾（Weyl）在 1946 年也提出了邏輯對於無窮集合是無法處理的論調，事實上如此嗎？各位不妨考慮一下。

下面就舉兩個例子來說明：部份小於全部在無窮集合來說不一定成立：我們可由所有自然數和偶數的關係，發現之。$f: n \rightarrow 2n$，$n \varepsilon N$，再來，是自然數有最大元素，這對無窮集合而言，是找不到的。

再來布勞瓦更在排中律的解釋上，有了很充分的闡明：他以為這個古典邏輯的原理在有限集合是明確的。但是，於無窮集合時則不然。

排中律（excluded middle）$V\, V \sim \forall$：V，－ or，～－ negation 設 A 這命題為：在 D 集合中有一個元素，具有性質 P：以符號表之則為 $\exists\, x \varepsilon D$，$\ni$，$p(x)$，在此因為特性公設（axiom of specification）的設立，使得上面的假設的可能性得到保證。那麼 A 命題的否定即 $\sim A$，由量化符號的否定可知：$\sim \forall$ 即 $\forall x \varepsilon D$，$\sim p(x)$，即任意 D 中的元素，不具 p 的性質。

如此則排中律應爲下面的形式：AV～A即 $\exists x \varepsilon D, \ni p(x)$，$V$，$\forall x \varepsilon D \ni \sim p(x)$，明確點我們能够決定（對於$D$中的任何元素）它是否具有性質$p$。

現在如果D是有限集合，那麽由一個一個的核對，是不難決定的；萬一這集合變大了，可能一百萬個，或則一千萬個元素，如此一來，工作就困難了；但是，在原理上這種方法是眞確的，沒有疑問的。當然布勞瓦也承認這種推論是明確無誤。可是，當D爲一無窮集合，就不容易解決了……。而且我們更不可能一一核對。

我們可以發現在①無窮集合D中有一元素滿足p，我們也可以由數學推論導至：②任意一個D中的元素皆不滿足性質p；（由假設存在有一個元素滿足p，而導出謬論。）譬如在②中，設$D = \{(m, n) | m, n \varepsilon Z^+\}$，$Z^+$ 一正整數，而p爲 $2m^2 = n^2$，如此就很顯然了。但是，我們沒有任何的基礎來決定發現它們①，②，的可能性，無論我們如何「幸運」，總是不可靠的。就以費馬的最後定理（Fermat）來說：

費馬定理：$\forall n > 2$，$\exists x, y, z \varepsilon Z^+$，$\ni$，$x^n + y^n = z^n$，

在此，我們可假設$D = \{(x, y, z, n) | x, y, z, \varepsilon Z^+, n > 2\}$，而且$p$的性質爲：$x^n + y^n = z^n$；一直到今天（自1637年）世界上還沒有人能證明它，或者證明它爲不存在。雖然如今已有人算出：在4000以下的正整數都不能滿足，可是又有誰敢保證；它一定不存在呢？也許有一天，當然是在我們找出一個有系統的方法時，我們可以簡單的解決掉。

布勞瓦對無窮集合中排中律的不可接受，並不表示數學家們在這方面所作的耕耘已經成爲泡影；而在其它數學部門的發展，針對著這類問題，這種反駁，他們找到了一個很適合的方法來加以解決，而且他們也要設法防止以後這類的問題；我們又如何來解決這問題呢？在這方面各位可參考後設數學導論。

這些在布勞瓦（1908）的評價和不承認之前所發展的數學（方法與邏輯），我們稱之爲古典的（classical），而在布氏和他同派所允許之下的方法及邏輯稱爲“直覺主義的”，反之則爲“非直覺主義的”（non－intuitionistic），康德，Weierstrass，Dedekind 就是後者。他們之間的衝突，就是在無窮集合上。前者以爲無窮是實際的（actual），完全的（completed），外延的（extended）和存在性（existential）。一個無窮的集合就認爲是存在的完全整體，雖然它能自我們的看法將它分割開來，但它的存在比人類的發展和建構來得更早，甚且與他們是獨立的。後者則以爲無窮是可能的（potential），形成的（becoming），和建構的（comstructive）。早在1831年，高斯（Gauss）曾對兩者的不同加以說明：他以爲把無窮量度看成一個整體來看，在數學上是不允許的。由此，我們似乎可猜出高斯是那一派的了（對這方面而言）。

我相信各位都很熟悉歸納法（mathematical induction），而它就是直覺主義中用來證明那些推廣性的命題的方法（在自然數中）。我們證明$\forall n$，$p(n)$；而所用到的只是0到n間的關係；這可能就使各位明白直覺主義者，如何來說明，證明這種無限的特殊集合。

而對一個存在性命題的敍述－$\exists n, \ni$，$p(n)$，它在直覺主義上的意義是一此命題的部份抽象性（Communication abstract）。所以對$\exists n, \ni p(n)$這命題的直覺上證明是建構的；我們須找到一個特例n滿足p，至少我們也得給他一個方法來找出須給予的例子，是嗎？可是在古典的數學上，還有所謂的；非建構的（non－constructive）或間接的存在性證明。而這些當然爲直覺主義所拒絕。例如：要證明（$\exists n$）$\ni p(n)$，古典數學者“可能”是先令$\forall n \ni \sim p(n)$再導出一個矛盾，可是古典上和直覺主義的邏輯則採用歸謬法（reductio ad absurdum），於是他們就找出$\sim \forall n \ni \sim p(n)$。而在古典邏輯這方面，

他們允許$\sim \forall n \rightarrow \sim p(n)$即$\exists n \ni p(n)$，可是就一般而言，直覺主義者並不允許。這個在古典上存在性的證明：假如，我們預先提出剛才所給例子$\exists n$，$\ni$，$p(n)$，則很容易明白，各位有興趣在這方面作進一步的思考嗎？究竟它們的不同何在？

讓我們再看看黑丁（Heyting）對直覺主義的看法：他於1934年提出了下面的一些評論。他以為根據布勞瓦提出的，數學和我們的思考是相等的……。除了哲學和邏輯外，沒有任何的科學可預言數學的內容。我們可以用哲學或邏輯上的原理來證明，因為數學上的很多觀念是建立在這些原理上。在數學上除了直覺之外再也沒有其它的根源可使用，而這些（直覺）可帶來很清楚的推論結果。這種直覺，也可說是一種想法：在一種特別的觀念或者推論上所具有的。對於直覺主義上的數學，我們不能藉著一種已經決定的常模（norms）來得到推論，這些常模可以形成一個邏輯；但是，每一個推論在數學上都有它自己的證明（evidence）。而且，在新定理與定理之間具有一種直覺，而明確的推論規則。這些就是構成數學邏輯的基礎。這也可說是數學上的一個分枝，至於其它數學以外的東西，就感覺上而言是很少用到的，事實是否如此就留給各位自己來核對吧！

如今我們又得面對一個問題：非直覺主義的方法在古典數學上究竟佔著怎樣的地位，事實上我們知道非直覺主義上的方法在古典的數論上是居很重要的地位，它們（這些方法）對於基礎上的尋求，可說是最適用的。縱然我們知道它在數論上並沒佔最大部份，可是它仍值得我們去處理這大問題。而很多在非直覺主義上存在性的證明可以用建構的方法來代替。在另一方面，尤其是分析上（也許更多其它超越數學上的分枝），非直覺主義的方法（在定義和定理上）已經透過整個的方法學。（methodology）

最後，我們要以一個問題的解決作為交代。「什麼種類的數學能够建立在直覺主義的限制上？」假如存在的古典數學，不須要在任何結果上作更多、更大的要求，而能够重建於直覺主義的限制上，則在基礎上的問題，就容易解決了。而且我們也知道直覺主義者已經建構了一種包含連續性（Continum）和集合論的數學，而這種數學更包含了古典數學所不具有的觀念，當然對這內容來說是相當吸引人的。如果我們把它看成是古典數學的一種替身的話，那麼它的發展將是更複雜、更不具力量了。為何如此呢？無論怎樣古典數學的重新在直覺主義所作的建構將會導至一個不同，卻令人滿意的結果。

～形式主義Formalism～

它的形成和前面所提的兩個學派一樣具有深遠的背景及更光明的發展前進，而它所涉及的內容也很廣泛，在此由於篇幅的關係我不作介紹。

～後　記～

趕了幾天，終於把它寫完了，也許說是告一段落；內容的組織，結構不太完密是本文最大的缺點，可是我以這是無法避免的，除非我寫一本書來說明，希望各位能諒解。再來文中有很多人名不加翻譯，主要是我想不出適切的譯名，在此特加申明。雖然如此，內容的啓發仍舊是很重要的，我祈望它會帶給你（妳）們相當的滿意。最後僅以一句話作為本文的結語

昨日的事實，可能是今天的疑問。

而今天的眞理，更可能是明日的謬論。

脫稿於1970，4，11日

〔註1〕：此結果由Specker所提出，1949

〔註2〕：By a " systems of objects " we mean a (non-empty) set or class or domain D (or possibly several such sets,) of objects among which are established

下接28頁

數論裏的幾個問題

"Mathematics is the queen of the sciences, but number theory is the queen of Mathematics"

Carl Friedrich Gauss

(1777—1855)

數二　段台生

數論跟平面幾何有好些類似的地方。當你有了某些概念，知道了某些基本定理，你會發現它們並不是很難的，再進一步研究下去的話，你會愈研究愈覺得有"味道"的。一旦你發現某些數之間或某些幾何圖形的點線之間有某種關係，（甚至是旁人所未曾發表的），那你心中的快樂眞不可用筆墨來形容。

（例）：

1. 正多面體一共有幾種？一共有四、六、八、十二、二十面體5種，你能證明嗎？（Courant：What is Math？P.240；Hilbert：geometry and Imagination P.292）
2. 有1，2，3……，$n-1$，n，n 個數任意排列，當 n 趨向 ∞（無窮大）時，至少有一"數"（digit）在其正當位置（Moper place 即2在第二位，3在第三位……）的或然率是多少？（Courant：What is Math.？P.115—116）
3. 對任一正整數 $Z=a_n10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\cdots\cdots+10\cdot a_1+a_0$，我們能不直接作除法，而且其他方法知道它是否能被3，5，9，11等整除，但對7，13，17，19……等數，你能想出一個簡便方法嗎？（例對7而言：如果 $a_0+3a_1+2a_2-a_3-3a_4-2a_5+a_6+3a_7+2a_8-a_9\cdots\cdots$ 能被7整除，則 Z 就能被7整除）（Long：Intrs to Number theory Ex 4，3—（2）；Courant：What is Math？P.35）

除了上面三個有趣的例子外，還有許多數論上的問題到目前爲止尙沒有結果的。

如①Fermat's last Th："$n\geq3\in N$，則 $x^n+y^n=z^n$ 無整數解"此頗令人懷疑，Fermat 未留下他的證明，有人曾證明 $n\leq4001$ 時成立，德國科學院提出懸賞十萬馬克在西元2007前解決此問題者可得之。

②Goldbach's conjecture：對任一大於2的偶數均可表爲兩個質數 prime number（即除1和本身以外沒有其他因數（factor）的數，1既非質數亦非合數（compositenumber）之和；任一大於9的奇數可表爲三個質數之和。但1937年俄國數學家Vinogrador證明了任何充分大的奇數皆可表爲三質數之和，而"偶數部分"則至今沒有人證明其成立與否。（Hardy and Wright：An Introduction to the Theory of Nos P.19；P.22）

③Fermat 早先認爲 $2^{2^n}+1$（$n\in N$）這樣的數是質數，但1732年Euler 發現當 $n=5$ 時 $2^{2^5}+1=641\times6700417$ 竟是個合數，此定理自不成立。

④在任兩相鄰國所着之顏色爲相異的條件下我們已知不超過36國的地圖可用四種顏色著色，在任何地圖上着色，五種顏色一定够。在torus上可用七種顏色著色，而六種顏色則嫌不够，但我們至今仍不知是否任一地圖均可用四種顏色著色（Courant : What is Math.? P.264－267)

⑤ e , π 是超越數 (transcendental number) 是我們早知的, $2^{\sqrt{2}}$, e^{π} , $e\pi$,是超越數,你能證明嗎?(註: Harry Pollard : the theory of algebraic numbers , P.45－46 ; Hardy&Wright : An intro. to the theory of numbers , P.39 ; P.176) 至於 π^{e} , $\pi^{\sqrt{2}}$, 2^{e} 等,則至今尚不知其是否是超越數。

諸如此類的問題,有待"知音"去解決,這些問題說明了數論並不是枯燥無味的,數論最主要的幾個觀念是質數,可除盡最小公倍數,最大公因數;互質有餘(congruence),在質數問題中有

①Euclid證明的定理:質數的個數無窮多,(在自然數中)事實上我們不會一個一個去數它,Euclid用反證法:"若質數個數不無窮多則生矛盾"證明它。

②我們以 $\pi(n)$ 表所有不大於 n 的質數的個數,如 $\pi(100)=25$, $\pi(1000)=168$ … 則當 $n\to\infty$, $\frac{\pi(n)\cdot l_n n}{n}\to 1$ (l_n 表自然對數)。

③Sieve of Eratosthenes (276－194 B.C.) 埃拉托色尼的篩法以求質數。(人人文庫初等算學史 P.33－34 ; Long : Elementary Introduction to No. Theory P.41)。

④Dirichelet 證明了:若 a , d 互質(即 a , d 沒有公因數)以(a , d) $=1$ 表之且 $a>0$, $d>0$,則有無限多個 $a+kd$ 這種形式的質數($K\geq 1$)例如 $4K+3$, $4K+1$, $10K+1$, $10K+3$, $10K+7$, $10K+9$ 等等, Long : Elenetary Introduction to No Theory P.43。

⑤如2,3;5,7;11,13;…… 這樣的連著的一對對質數,叫做孿生質數(twin primes) Brun 證明了若 q 表示所有這樣的孿生質數所集合中之任一元素,則 $\Sigma\frac{1}{q}$ 是收斂級數;相反地,若 q 表任一質數,則 $\Sigma\frac{1}{q}$ 是發散級數(Long : P.43－44)

⑥若 $N=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots\cdots p_n^{\alpha_n}=\prod_{i=1}^{n}p_i^{\alpha_i}$

(Π 表連乘積), $\sigma(N)$ 表所有 N 的因數所成的集合, $v(N)$ 表所有 N 的因數的個數, $\phi(N)$ 表所有小於 N 而和 N 互質的自然數的個數 $\sigma(N)=\prod_{n=1}^{n}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$

$v(N)=\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i+1)$,

$\phi(N)=\prod_{i=1}^{n}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=N\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$; $\prod_{i=1}$ (若 N 為質數,則 $\phi(N)=N-1$)。

⑦Perfect number (完全數)對任一自然數 N 若 $\sigma(N)=2N$,則 N 是一完全數,因 $\sigma(6)=1+2+3+6=12$, $\sigma(28)=56$, $\sigma(496)=992$, $\sigma(8128)=16256$,所以6,28,496,8128等均是完全數。L.E. Dickson (1911) 在Amer., Math., Mothly Vol. 18 P.109證明了。"若且唯若 m 是偶完全數,則 $m=2^{n-1}(2^n-1)$,式中 2^n-1 是質數"。(Harry N. Wright : Frist course in Theory of numbers P.10 ; Long : Elementary Intro. to No. Theory P.105 ; Dickson : Intro. to theory of numbers , P.4 , Ex. 7 ; P.5 ; Ex. 8)

⑧如何求得 $ax+by=c$ 之整數解(x , y)其中 a , b , $c\in I$?此方程式有整數解之條件為 a , b 之最大公因式 d (或以(a , b)表之)必為 c 所整除(以 $d\mid c$ 或(a , b) $\mid c$ 表之)由定理可知 $\forall a$, $b\in I$, $\exists x_0, y_0\in I\ni ax_0+by_0=d$ ($=(a,b)$)設 $c=kd$ 則

$a(Kx_\circ)+b(Ky_\circ)=Kd=c$

$(Kx_\circ, Ky_\circ)$ 即爲所求（當然可能不只一解），（又Long Ele Intro. to No. Theory P. 66有另一法解此 « Diophantine equation $ax+by=c$ »）

⑨我們知道任何有理數皆可以（十進位）之小數表之（有限小數或循環小數）但無理數則只能以無限小數表之，現在我們要說明有些無理數可以 continued fraction （連分法）表之，使之有循環節出現（Horry N. Wright CH. II）。

如 $\frac{67}{24}$（有理數）$=2+\frac{19}{24}=2+\cfrac{1}{\frac{24}{19}}$

$=2+\cfrac{1}{1+\frac{5}{19}}=2+\frac{1}{1}\,+\,\frac{1}{3}\,+\,\frac{1}{1}\,+\,\frac{1}{4}$

$=(2, 1, 3, 1, 4)$

$\sqrt{7}$（無理數）$=2+(\sqrt{7}-2)$

$=2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{7}-2}}=2+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{7}+2}{3}}$

$=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{7}-1}{3}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{7}+1}{2}}}$

$=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{7}-1}{2}}}=2+\frac{1}{1}\,+\,\frac{1}{1}\,+$

$\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{7}-2}{3}}=2+\frac{1}{1}\,+\,\frac{1}{1}\,+\,\frac{1}{1}\,+\,\frac{1}{4+(\sqrt{7}-2)}$

$=\cdots\cdots\cdots=(2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \cdots\cdots\cdots)$

射影幾何中的齊次坐標

數一　葉樹華

在射影平面上引進坐標，就好像在歐氏平面上建立坐標系一樣，目的都是爲了要利用代數的知識來研究幾何。本文便是要討論，如何在射影平面上建立坐標。

我們要先構作一個射影平面；另外再用齊次坐標來定義一個射影平面；最後，我們要證明這兩個射影平面爲同構。現在，我們就按照這個順序，分定義、定理逐步條陳之。

定義：所謂射影平面，是指一個集合 S（其元素稱作點），及其某些子集（稱作線）所成的集合族，而滿足下列條件者：

P 1.過相異兩點，恰有一線包含之。

P 2.任意兩線至少交於一點。

P 3.存在　有三個不共線的點。

P 4.一線至少包含三個相異點。

定義：設 l 爲歐幾里德平面 E 上之一線，令 $[\,l\,]$ 表示所有與 l 平行的直線所成的集合族，則 $P^*=[\,l\,]$ 稱爲 l 方向之理想點，或稱無窮遠點。

雖然這定義看來很奇怪，但是我們將看到，這無窮遠點具有點的某些性質，例如，它是兩條（平行）線的交點。

定義：由所有的理想點組成的集合，稱爲無窮遠線。

定義：設 l 爲歐氏平面上之一線，則 $l \cup \{[l]\}$ 稱爲 l 之擴充。

茲定義完全歐氏平面 S 如下：

S 中的點爲所有的歐氏平面點再加上所有的無窮遠點；S 中的線爲所有歐氏平面中直線的擴充，加上無窮遠線。

命題：如上所定的完全歐氏平面 S 爲一射影平面。

證明：我們要證明 S 滿足 P 1.—P 4.：

P 1.令 P，$Q \in S$。1) 若 P，Q 均爲歐氏平面上的點，則過 P，Q 僅有一條 E 中的直線，又 P，Q 不在無窮遠線上，故 S 中過 P，Q 之線僅有一條。2) 若 P 爲尋常點，而 $Q=[l]$ 爲一理想點，則過 P 恰有一直線 m 平行 l，亦即 $m \in [l]$；而 Q 是在 m 之擴充上。故 m 的擴充爲過 P，Q 的一條線。顯然，過 P，Q 的線僅此一條。3) 若 P，Q 皆爲理想點，則只有一條無窮遠線包含它們。

P 2.令 l，m 表 S 中之二線。1) 若 l，m 皆爲尋常線且 $l \nparallel m$，則 l，m 交於一尋常點。若 $l \parallel m$，則理想點 $P^* = [l] = [m]$ 爲其交點。2) 若 l 爲尋常線而 m 爲無窮遠線，則 $P^* = [l]$ 爲其交點。

P 3.因在 E 中已存在有三個不共線的點，只要證明無窮遠線不包含它們就行。此爲顯然。

P 4.若直線 l 可爲空集，則過 E 中任何一點的直線均與之平行。設 P，Q，R 爲三個不共共線的點，則此三點所形成的三線皆與 l 平行，此爲不可能，因過 P 點僅有一線與 l 平行。若直線 l 僅包含一點 P_1，則我們可找到不在 l 上的一點 P_2，令 m 爲過 P_1，P_2 之直線，則必存在一點 P_3 不在 m 上，令 n_1 爲 P_2，P_3 之連線，n_2 爲過 P_3 平行 m 之直線，則 n_1，n_2 爲過 P_3 而平行於 l 的二相異直線，此爲不可能。故知 E 中的直線至少包含兩點。若再加上無窮遠點，故 S 中的一線至少包含三點。無窮遠線也至少包含三點。（讀者自證）

q.e.d.

像這樣由歐氏平面完全化而得的 S，我們稱之爲實數射影平面（Real projective plane）。

接著，我們要用齊次坐標來構作一個射影平面。首先，我們在 R^3 中定義一個關係 T 爲：$XTY \Leftrightarrow \exists \lambda \in R / \{0\}$ 使 $X = \lambda Y$，這種關係 T 可很容易證明爲一等價關係。（equivalence relation）有了這種等價關係（equivalence relation）我們就可以在 R^3 中定義等價集：（equivalence class）

定義：$P_T X = \{Y \mid Y \in R^3$ 且 $YTX\}$。

我們稱 $P_T X$ 爲一T等價集。（equivalence class）

現在，我們把所有的T等價集組成一個集合，以 S' 表之，並把每一個T等價集叫做“點”。再由這些點，我們來定義一個叫做“線”的東西：

定義：設 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$（a_1, a_2, a_3 不均爲 0）爲一三元一次齊次方程式，則稱集合

$$l = \{P_T X \mid X \text{爲 } a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \text{ 之一解}\}$$

爲一線。

對於這樣的 S'，我們可以用很簡單的方程式知識證得它是一個射影平面。現在，我們證明它滿足 P 2，P 3，其餘留待讀者自證。

P 2.證明：設 l_1，l_2 爲兩線，決定此兩線的齊次方程式分別爲

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \qquad (1)$$

$$a_1'x_1+a_2'x_2+a_3'x_3=0 \qquad (2)$$

方程式(1)與(2)必存在有一異於（0，0，0）的公共解，設此公共解爲（x_1, x_2, x_3），則由定義 $P_T(x_1, x_2, x_3) \in l_1$，且 $P_T(x_1, x_2, x_3) \in l_2$，故 $P_T(x_1, x_2, x_3) \in l_1 \cap l_2$。

P 3.證明：設 l 爲一線，決定此線之方程式爲 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$

我們要證明並非所有的三元有序組皆滿足此方程式，顯然，（a_1, a_2, a_3）就不滿足它。故知 $P_T(a_1, a_2, a_3) \notin l$。

q.e.d.

以上，我們從 R^3 中得到了一個射影平面 S'

。若我們能建立S'與完全歐氏平面S之間的一個同構，（isomophism）我們在S上建立坐標的工作也就完成了。不過，我們的坐標並不只是一個三元有序組而已；我們是用一個class來表示一點。

定義：設S與S'爲兩個射影平面，若存在有一從S到S'的一對一且映成函數H，使共線點之映像亦爲共線，則稱S與S'同構。（isomophism）

命題：如上構作的兩個射影平面爲同構。（isomosphism）

證明：因歐氏平面與R^2是同物，故一完全歐氏平面S可看作是由R^2完全化之後所得。因此，S包含所有的二元有序對及每一方向上的無窮遠點。（在R^2平面上，方向可用斜率m表示）。今欲在S'與S間尋找一對應，使S'與S同構。令$P=p_{\top}(x_1,x_2,x_3)$爲S'中之一點。茲定$H(P)\in S$如下：

1）若$x_3\neq 0$，則定$H(P)=(x_1/x_3,x_2/x_3)$。此爲完善定義，因爲若把(x_1,x_2,x_3)以$(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$代之，則$H(P)$仍爲$(x_1/x_3,x_2/x_3)$。反過來說，$R^2$中的每一點$(x,y)$皆爲$S'$中某一點之像，因

$H[p_{\top}(x,y,1)]=(x,y)$。

2）若$x_3=0$，則定義$H(P)$爲斜率$m=x_2/x_1$上之無窮遠點，此定義亦爲唯一，因爲m不隨$(\lambda x_1,\lambda x_2,0)$中$\lambda$之值而變。反過來說，對每一無窮遠點（亦即對每一斜率m），亦可找到S'中之一點與之對應，因爲：當$m\neq\infty$時，$H[p_{\top}(1,m,0)]=$在m方向上之無窮遠點；當$m=\infty$時，$H[p_{\top}(0,1,0)]=$在y軸上的無窮遠點。

顯然，這種對應是一對一的。因此，我們找到了從S'到S的一個一一且映成函數H。接下來要證明H可把共線點映至共線點。

令$l=\{p_{\top}X \mid X$爲$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$之一解$\}$表S'中之一線。設$P=p_{\top}(x_1,x_2,x_3)\in l$，1）設$a_1,a_2$不均爲0。若$x_3\neq 0$，則$H(P)$在直線$a_1x+a_2y+a_3=0$上；若$x_3=0$，則$(x_1,x_2,x_3)\top(\lambda a_2,-\lambda a_1,0)$，而$H(P)=H[p_{\top}(x_1,x_2,x_3)]=H[p_{\top}(\lambda a_2,-\lambda a_1,0)]$爲斜率$m=-a_1/a_2$（亦即直線$a_1x+a_2y+a_3=0$）所決定的無窮遠點。故不論什麼情形，$H(P)$皆在直線$a_1x+a_2y+a_3=0$之擴充上。

2）若$a_1=a_2=0$。方程式變爲$x_3=0$。則S'中所有的點$P=p_{\top}(x_1,x_2,0)$皆對應到S中之無窮遠點，因此皆在無窮遠線上。

q.e.d.

既然S與S'同構，那就可以把它們視爲同一物。而S中每一點的坐標可經由上述證明中的函數H予以定義。

（上接18頁）

註二：邏輯系統與公設化數學系統的不同處在於前者的初基符號爲underlying logic，後者則爲某一支數學的無定義名詞，前者的公設在指出某些wff，後者則爲約束無定義名詞的隱定義（implicit definition）

註三：p_1的構作依Church：Introduetion to Mathematical Logic Vol.1 第一章的邏輯系統p_1

參考書方面：本文的寫作假定讀者對邏輯基本術語有較嚴格意義的了解，對此請參考Tarski's Intro to Math Logic and deduction method.本文的題材主要參考Church's Intro Math Logic其他這方面的書誠如期刊二的Review所提，Kleene的Math. Logic 及Quine的Math. Logic均有精采的見地。尤其Quine 是一個頗富原創性的邏輯學家及哲學家著作很可讀。

天干地支配法簡介

數二　陳登源

也許有些人認爲我們又非研究中國文學，學這些東西幹什麼！其實這是一些常識，在日常生活環境中常會碰到的，如新廈落成的年代日月載法中，多是以干支來記年代的，因此我想將一些基本的干支配法及其應用於年代介紹給我們非文學院的理學生，願這短短幾字，能使同學有所助益。

干支：十干十二支也。甲乙丙丁戊己庚辛壬癸爲十干。子丑寅卯辰巳午未申酉戌亥爲十二支。。取義於木之幹枝。相傳天皇氏所創。黃帝時大撓氏始以天干配地支。以作甲子。如甲子乙丑甲戌乙亥之類。俗謂之六十花甲子。凡紀年月日時皆用之，然古人但以甲子紀國。其用以紀年者。別立歲陽歲陰諸名。如歲在甲子則曰閼逢困敦之類。惟爾雅史記二書。所載有異同。茲列表如下。

歲　陽　表

	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸
爾雅	閼逢	旃蒙	柔兆	强圉	著雍	屠維	上章	重光	玄默	昭陽
史記	焉逢	端蒙	游兆	彊梧	徒維	祝犂	商橫	昭陽	橫艾	尙章

歲　陰　表

	子	丑	寅	卯	辰	巳	午	未	申	酉	戌	亥
爾	困敦	赤奮若	攝提格	單閼	執徐	大荒落	敦	協洽	涒灘	作噩	閹茂	大淵獻
史	同	同	同	同	同	同	同	同	同	同	淹茂	同

以上見辭源干支條。

以上是辭源對干支之解釋。平常在一些較具有中國文化性質的場所，幾乎是都可見到甲子…之類的名詞，如在中國佛廟中的運籤，乃是以干支之六十次序而排的，又如在古老式的中國房子內之賀匾上均刻有××年，亦均以此記的，我們若能了解其間的關係，則將不爲其所惑了。現將其列表加以說明如下：

甲乙丙丁戊己庚辛壬癸甲乙丙丁戊己庚辛壬癸甲……
↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓
子丑寅卯辰巳午未申酉戌亥子丑寅卯辰巳午未申酉戌

依此次序循環排列下去，將可得到六十個不重複的配法，因支比干多二，而干爲十，故可得到六個週期爲十的配法，即共有六十種。其間奇位必配奇位，偶位必定配到偶位，因每次支之循環均往後退偶數個（二個）。若無此排列之次序，則依組合之總數該有C（10，12）種不同之排法，但因其排列除了奇對奇，偶對偶外，還要干排前支隨後，故只有六十種。現將其表如週期表之形式如下：

爲方便起見，我們以一二三四…分別代表甲乙丙丁…，而以1 2 3 4…分別代表子丑寅卯…

	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸
	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
	子	丑	寅	卯	辰	巳	午	未	申	酉
→	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
→	戌	亥	甲	乙…						
→	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
→	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
→	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
→	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
→	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

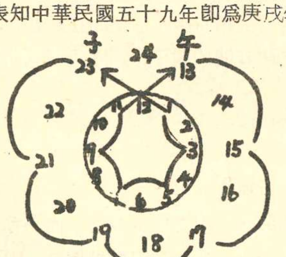
上表之配法爲甲子、乙丑、丙寅、……等，其次序爲由左而右循環排列共得六十。若有第六十一則其與第一之甲子相同。〔註：凡奇偶相配必不出現，如甲丑，乙寅之類。〕

現附以民國年數與此對照如下表：

民國：	元	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
干支：	壬	癸	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛
	子	丑	寅	卯	辰	巳	午	未	申	酉	戌	亥	子	丑	寅	卯	辰	巳	午	未

民國：	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
干支：	壬	癸	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛
	申	酉	戌	亥	子	丑	寅	卯	辰	巳
民國：	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
干支：	壬	癸	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛
	午	未	申	酉	戌	亥	子	丑	寅	卯
民國：	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
干支：	壬	癸	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛
	辰	巳	午	未	申	酉	戌	亥	子	丑
民國：	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
干支：	壬	癸	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛
	寅	卯	辰	巳	午	未	申	酉	戌	亥

由上表知中華民國五十九年卽爲庚戌年。以下是十二支的時間表示法：



說明：子時：23點到1點

丑時：1點到3點

⋮

午時：11點到13點

⋮

地理學上所謂之「子午線」乃取名於此二字。

若同學能對此有所了解，則可見下之一趣味故事：

古有一皇帝，苦於天旱久不雨，乃召天下之氣象學者而問之何日將雨，有一氣象學家默而不語，提筆書一「醋」字，隨卽離去。帝惑然。問之臣曰：「何意？」有臣答曰：「本月二十一日酉時將雨也。」帝豁然。是日果雨。

國

同倫的概念

數二　陳柏

～緒　論～

§1.概念起源

分類(Classifcation)問題在數學上極爲重要。F.Klein (1849—1925)以變換群將不同幾何系統整合並加區分:一幾何系統是研究在某種變換下"保持不變的性質"之學問。歐氏幾何研究圖形在剛體 rigid 變換(平移旋轉等)下不變的性質(長度,角度,面積,體積等)射影幾何中之變換是射影變換(Projectircty)。而拓撲學則是探討在同胚((homeomorphism)變換下不變的性質。前列各變換成群且爲同胚變換群之子群,因此拓撲是最廣泛基礎的幾何。

拓撲學曾被解釋爲橡皮幾何學,拓撲物元視爲由橡皮製成。同胚變換爲任何不破壞鄰近性(neighborhood)的變換,例如將橡皮體扭曲,拉扯或壓縮而不發生新斷裂與黏合的過程。此變換後,剛體不變性,射影不變性(如共線,共點)均已改變,但,如連通性(connectedness)分離性(separation)仍爲不變(密接者仍密接,相離者仍相離)可相互同胚地變換的空間稱同胚空間,而稱它們爲"拓撲相等"。(如三角形,平行四邊形,圓(形),橢圓等,爲拓撲相等,方體表面,球面,橢圓面等亦拓撲相等)分類問題相當於"決定何時兩空間同胚"。不變性是區別不同空間的工具,若兩空間某不變性不同,必不同胚。但不同胚空間常同有某種不變性(圓盤與圓環皆連通),能否搜尋較多不變性致可完全地區別不同空間?什麼不變性使圓與線段,圓盤與圓環,球面與輪胎面等,任何無"洞"的與有"洞"的連通空間不同胚?同倫概念由彭加端 Henri Poincari (1854—1912)提出,源自流型(manifold,曲線,曲面的一般結構,局部與歐氏空間同胚)的分類努力,適足解此類問題。

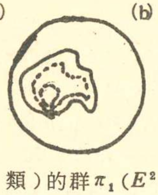
§2.H.Poincare與K.F.Gauss

彭加瑞繼高斯之後,成爲數學史上橫掃千軍,超越一切,不可一世的泰斗。彼此的思想方式卻有本質的差異。高斯是計算名家,酷愛數字,畢生輾轉於冗長的計算中,意外地發現了衆多數據微妙的吻合,因而創立數論與分析新紀元,彭加瑞對計算無能爲力,不從事計算,因而未埋沒於"數海"中,被譽爲"有健全判斷力的直覺主義者",特別擅長處理拓撲性問題。點集拓撲(Point set topolyy)爲 F.Hansdorff 等人建立於1900年至1910年間,拓撲空間(爲目前習見的Hansdorff空間)抽象地被建築在集合論的基礎上,成爲滿足某種公設的集合,元素的本性開始脫離幾何而有了更廣泛的意義。在此以前,彭加瑞大部份依類幾何直覺,孕育出許多偉大的拓撲概念。除"同倫"外"同調"概念仍爲今天代數拓

$$\begin{tikzcd} \pi_1(E^2) \arrow[r, "f_*"] & \pi_1(S^1) \\ & \pi_1(S^1) \arrow[ul, "i_*"] \arrow[u, "h_*"'] \end{tikzcd}$$

是否存在 f_* 使得 $f_* o i_* = h_*$

(b)



(b) 由於在 E^2 裏所有的封閉曲線與常數路徑同倫，因此 E^2 的基本群爲僅含一元素（包含常數曲線的同倫類）的群 $\pi_1(E^2)=0$ （見圖3）

(c) $\pi_1(S^1)\cong z$ （整數加法群）

∵ (i) 每一封閉曲線恰好對應一圈數 γ（γ 爲整數）

$\gamma=0$ 時爲常數曲線

$\gamma<0$，$\gamma>0$ 分別爲順時針和反時針方向。

(ii) 圖上，兩封閉兩曲線同倫，若且僅若它們有相同的圈數。

(iii) 若 α，β 二封閉曲線的圈數分別爲 r，s（r，s 皆爲整數）顯而易見曲線 $\alpha\beta$ 亦封閉且其圈數爲 $r+s$。如果函數 $f:\pi_1(s^1)\to z$ 定義 $f(\alpha)$ 爲封閉曲線 α 的圈數，則 $f(\alpha\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$，這函數 f 是 $\pi(s^1)$ 與 z 間的同構函數（isomorphism），所以 $\pi_1(s')\cong z$。

(d) 不可能有 f_* 存在使 $f_* o i_* = h_* =$ 恒等函數。

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r, "f_*"] & Z \\ & Z \arrow[ul, "i_*"] \arrow[u, "h_*"'] \end{tikzcd}$$

$$\because f_* o i_*(Z)=f_*[i_*(Z)]$$
$$=f_*(0)=0\neq Z$$

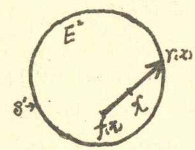
因此，也沒有上述的函數 f 存在。

所以圓 S^1 不能爲圓形區域 E^2 的縮回。

應用上述定理，我們可以證明著名的 Brouwer 氏固定點定理（The Brouwer Fixed-point Theorem）這定理是說任何一個連續函數 $f:E^2\to E^2$ 必存在一點 $x\in E^2$，而 $f(x)=x$。

直觀說明是：一薄而柔軟的橡皮圓盤，不論如何扭曲，拉扯，總有一點是固定不動的。

證明：假如 f 設有固定點，圓 S^1 將可爲圓形區域 E^2 的縮回，對於任意 $x\in E^2$，有向線 $f(x)$．x 的與圓相交於異於 $f(x)$ 之點，設此點爲 $r(x)$ 圖4，則 $\gamma:E^2\to S^1$，當 $x\in S^1$ 時 $\gamma(x)=x$ ∴圓可爲圓形區域之縮回。



（圖4）

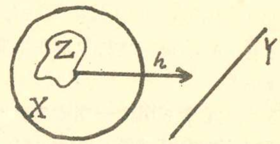
例 2.擴張（extension）問題：對於已知函數 f，h 圖是否存在 g 使 $gof=h$？若 g 存在，則稱 g 是 h 的擴張，或者 h 可擴張爲 g。

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "g"] \\ Z \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

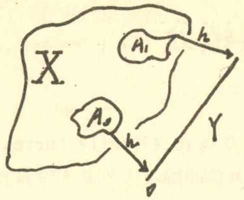
若 Z 爲 $\overline{X}$ 之子集（$Z\subset\overline{X}$）且 f 爲恒等函數，（精確地說應爲 inclusion function）即爲縮回問題：已知一定義於 $\overline{X}$ 的子集 Ｚ 的一函數，可否將它擴張爲定義於整空間 $\overline{X}$ 的函數？

點集拓撲獲得許多著名擴張問題的解答。

(i) Tietze 擴張定理是其一：當 Z 爲 $\overline{X}$ 之閉集，h 爲 Z 至實數集 Y 之連續函數時，此定理保證當 X 爲 normal 時，h 可擴張。如圖5

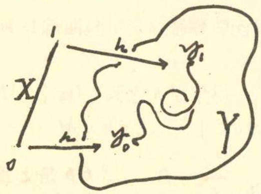


(ii) Urysohn Lemma 另另一例：兩相離閉子空間 A_0，A_1 之聯集 $Z=A_0\cup A_1$，Y 爲閉區間〔0，1〕，$h:Z\to Y$ 且 $h(A_0)=0$ $h(A_1)=1$，則此 Lemma 保證當 $\overline{X}$ 爲 normal 時，可擴張 h 至 $\overline{X}$。如圖6



(iii)曲線可連通亦可設描述爲一種擴張問題。

$\overline{X}$爲閉區間〔0,1〕, $Z=\{0,1\}$。空間Y爲曲線可連通，若對位二點y_0，$y_1\in y$ $h: Z\to Y$，$h(o)=y_0$，$h(1)=y_1$ 可擴充爲f：$Z\to X$。（見圖7）



對應於一幾何擴張問題，可獲得一同倫群之擴張問題：

$$\begin{tikzcd} \pi_1(Z) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "h_*"'] & \pi_1(\overline{X}) \arrow[d, "g_*"] \\ & \pi_1(Y) \end{tikzcd}$$

是否存在g_*?

若g爲幾何擴張問題之解答，則g_*必爲對應群問題之解答。因此，假若藉群之性質（如例1）知g_*不存在，則g亦將不存在。這種方法是代數拓撲表許多定理證明的重要工具。雖然它似乎僅能消極的證明擴張不存在，而無法積極地證明出存在定理。但如同例一“圓不能爲圓盤之縮同”，它卻是偉大（見後）布氏固定點定理的證明基礎，消極的否定常常是積極敘述的前奏。

§3. 高度情形的簡短透視

二曲線$\alpha,\beta: I, \to X$間的同倫關係$\alpha\sim\beta$ rel $\{0,1\}$可推廣爲任二連續函數f，g：$Y\to X$間者$f\sim g$ rel A。其中以任意空間Y代替I，Y的子空間A代替$\{0,1\}\subset I$，而在子空間A上f，g爲相等函數（即$f|A=g|A$）

定義：$f\sim g$ rel$A$ 若且唯若

存在一連續函數$F: Y\times I\to X$而滿足下列性質：

(i) $F(y,o)=f(y)$ $\quad y\in Y$

(ii) $F(y,1)=g(y)$

(iii) $F(y,t)=f(y)=g(y)$ $\quad t\in A$

特殊化上列定義，使$Y=I_n=\{(u_1\cdots,u_n)\mid 0\le u_i\le 1\}$（$n$維立方體）

$A=J_n=\{(u_1,\cdots,u_2)\ 1\in i\ u\neq 0或1\}$

（n維立方體邊界）

可獲得n維同倫群。連續函數f：$I_n\to X$稱爲“鏈”（Chain）$n=2$時爲“曲面”間同倫。前節定理照樣過渡。空間X自身的變換f：$X\to\overline{X}$是否能有固定點即：是否存在$x\in\overline{X}$使$f(x)=x$，許多有趣的特例如：

① 代數基本定理：設$F(z)$爲複係數多項式，則定義$f(z)=z+F(z)$，固定點即爲根（$F(z)=0$），證明固定點存在也就證明了代數基本定理。

②解微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$，即求$g(x)$

$$使\ \frac{dg(x)}{dx}=f(x,gx)\ 且\ g(x)=y_0$$

若$g(x)$爲解，則$g(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t)g(t)dt$

因此定義$h(\phi x)=z_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\phi t)dt$

h的固定點$g(x)$即爲微方解。

最早出現純拓撲的固定點定理爲Brouwer定理：任意n維球體（$E^n=\{x \mid |x|\le 1\}$）自身的連續變換，必存在一固定點。它同時適用於E^n之同胚空間，包括正方體，幾何單體等。

S.Lefschetz將之推廣至（n維）多面體，涵蓋大部份固定點定理如射影空間，同心環（annular ring），球面，球體等。如前例，固定點定理爲解決存在問題的有力工具。

§ 3　迴數winding Number

迴數爲閉曲線對點的旋轉周數。對不在曲線γ上之點a，假想某一有向線段，其一固定端點爲a，另一端點延閉曲線運動，若重回起初位置，則此有向線段繞a作整數圖的旋轉，此整數(可能爲0如未繞足一圈)稱爲閉曲線γ對點a的迴數記爲$n(\gamma, a)$。反時鐘方向之旋轉，其迴數爲正，順時鐘方向時則爲負。複平面上迴數$n(\gamma, a)$被定義爲線積分

$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$，圓對內部任一點迴數爲1，若方向爲逆時鐘。迴數爲$-1$，若方向爲順時鐘。因此可知$\int_{Cp}\frac{dz}{z-a}=\pm 2\pi i$（正負視$Cp$方向而定）若$a$於$Cp$之內部。圓對外部任一點$a$之迴數爲0，因此$\int_{Cp}\frac{dz}{z-a}=0$若$a$在$Cp$之外部。

Theorem 4：γ爲複平面之簡單閉曲線，若a爲其內部之點，則迴數$n(\gamma, a)=\pm 1$若a爲其外部之點，則$n(\gamma, a)=0$

證明：簡單曲線與內部某一圓同倫Cp，因此線積分$\int_\gamma\frac{dz}{z-a}$與$\int_{Cp}\frac{dz}{z-a}$相同。故迴數$n(\gamma, a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-a}=n(Cp, a)$

我們可相反地得到一些同倫曲線的性質：

推論4.1　γ爲簡單封閉曲線，則γ與$-\gamma$不同倫。(∵若同倫，則其迴數相同。)

推論：　a在簡單曲線γ內部，則γ無法於除去a之後平面內與一常數曲線

同倫(否則$\gamma\sim 0$　$n(\gamma, a)=n(0, a)$
$=0$

將閉曲線分解爲簡單曲線，藉定理4可用以計算任何閉曲線之迴數。

§ 4　柯西積分式

柯西積分式定理是十分令人震驚的敘述，顯示出解析函數值間非常强烈的內在關係，求內部點的值被化簡爲求邊界點的值。邊界值相等的解析函數必爲同一。

Theorem 5　f之解析域爲單連通區域A，γ爲A內之閉曲線，a於γ內部，

$$n(\gamma, a)\cdot f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)dz}{z-a}$$

(證明：見注1.)

推論5.1　γ爲簡單閉曲線

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z\ a}dz$$

推論5.2　若兩解析函數f，g於簡單閉曲線上同值，則其內部各點亦同值。(內部點需於解析域內)

柯西積分式供應以積分表示導函數之方法

Theorm 6　若$F(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-a}dz$

（a作爲變數）

則$F'(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$

(證明見注2)

上述定理可以歸納法推廣爲n階導函數

$$F^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

定理7 Liouville 定理：解析於全複平面之有界函數必爲常數函數。

證明：$|f(y)|\le M$
$|f'(a)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz\right|$

$\le\frac{1}{2\pi}\times\frac{M}{r^2}\times 2\pi r=\frac{M}{\gamma}$（$|z-a|=r$，及性質3）線積分值與半徑大小無關，因此$\gamma$可趨近無限大，即$|f'(a)|$可小於任意小之正數，故$f'(a)=0$

Theorem 8代數基本定理：若$p(z)$爲次數大於0之複係數多項式，則必存在一z使$p(z)=0$(即任意複係數n次多項式($n>0$)皆可解。

證明：若假設$p(z)$無解，對所有z $p(z)\neq 0$

則$\frac{1}{p(z)}$爲有界（∵$z\to\infty$　$p(z)\to\infty$ ∴$\frac{1}{p(z)}\to 0$）

且其解析域爲全複平面。

故 $\frac{1}{p(z)}$ 爲常數函數（因Liouville's theorem）但此爲矛盾。

§ 5　鍵積分與流型積分

黎曼積分 n 維的推廣爲 n 重積分，將線段〔a，b〕擴充爲 n 維長方體。（$n=2$ 時，爲長方形，$n=3$ 時爲長方體。）積分方法仍相同，乃將此長方體分解爲一小塊，一小塊的長方體而求其極限和。可否使平面上之長方形"起伏"起來？使 n 維長方體扭曲起來？面積分與鍵積分將二重積分與 n 重積分的範圍推廣爲曲面，n 維鍵。若兩 n 維鍵同倫，其鍵積分是否相同？前節理論，有精彩的過渡。

曲線，曲面，n 維鍵可積分之特性起因於"局部與歐氏空間近似"。如曲線可由線段近似，曲面可由片片長方形近似。n 維流型爲局部的 n 維歐氏空間（locally Euclidean space）。曲線爲1維流型，曲面爲2維流型。流型不同於鍵，它與座標系統無關。流型積分爲鍵積分本質的擴張，但其定義與結果均不依賴某特殊座標系統。柯西定理消逝了？或是更爲活躍？

註 1. 圓的函數表示法爲 $z=a+pe^{i\theta}$（或 $a+p(\cos\theta+i\sin\theta)$）$\int_r \frac{fz-fa}{z-a}dz$

$=i\int_{cp}(fz-fa)dz$

若 $|fz-fa|$ 之最大値爲 M，則

$$\left|\int_r \frac{fz-fa}{z-a}dz\right| \leq M\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi M$$

p 爲任意的小時，M 趨近於 0

$\therefore \int_r \frac{fg-fa}{g-a}dz = 0$ 即 $f(a)\int_r \frac{dz}{(z-a)}$

$$=\int \frac{a(z)}{z-a}dz$$

又 $2\pi i \cdot n(\gamma, a) \cdot f(a) = \int \frac{dz}{z-a}$

∴得證。

註 2. $F'(a) = \lim_{\triangle a\to 0} \frac{F(a+\triangle a)-F(a)}{\triangle a}$

$$=\lim_{\triangle a\to 0}\frac{1}{\triangle a}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{f(z)dz}{z-(a+\triangle a)} - \int_r \frac{f(z)dz}{z-a}\right)$$

$$=\lim_{\triangle a\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{cp}\left(\frac{f(z)dz}{(z-a-\triangle a)(z-a)}\right)$$

f 連續∴$\triangle a \to 0$

$$\therefore F'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{f(z)dz}{(z-a)^2}$$

～結　語～

同倫概念是個很好的例子，告訴我們：任何數學概念都是簡單的，妙用無窮的；它是件利器，能爽快而直接地刺中問題的核心；它有多方面的意義，幫助數學家探索新奇的領域。概念滋潤了數學裏乾涸的園地，壯大了數學的"體格"，付予了數學堅定持久的生命。沒有它們，肥沃的田野將成貧瘠的荒原，欣欣向榮的綠草將立即枯萎。概念是數學的靈魂。數學的發展依賴它的創造與滋長。雖然在抽象化之後，它的本來面目似乎被"形式"粉飾掉，但"精神"卻始終相同。一般理論廣泛地拓展了適用的對象，"抽象化"將它磨得更像劍一樣的鋒利。

一個理論的"精彩"，並不因爲它極爲"困難"。相反地，眞正完美的理論應當是簡單，自然，易於瞭解的；"人們能很容易地洞徹其細微，毫不費力地把握其全體"，而心靈震顫於它强大的威力與意外的戰果之下。任何複雜冗長的推理與計算，都應有單純普遍的概念引導，否則它們將成爲落水驢背上的"鹽"，使求生的努力受牽制，使數學的生命逐漸衰老。我深信數學理論都應當被單純化，概念化而趨向完美。我願以此作爲努力的目標，並期望快樂地沈醉其中。……………………………完。

五月二十九日清晨於小屋

黎曼積分之推廣

H. Lebesgue積分

數一　葉樹華

本文是專爲學過一學期微積分，並對極限理論有良好基礎的同學而寫的。記得

記得 Johnson 的書上在講一個從〔a,b〕→R的有界函數f的積分時，是先將〔a，b〕分成數段。然後定義下界和、上界和、下積分、上積分。而一個函數有積分的條件是：上積分＝下積分。在這種積分定義下，所發生的第一個問題就是：到底有那些函數是可積分的？早在1821年，歌西便證出：所有定義於閉區間〔a，b〕上之連續函數皆可積分（註１）。但是，假如在定義域上有某些點不連續的話，是否仍可積分呢？在 Johnson 書上稱，f只在有限點上不連續，則可用分段積分的方法求其積分。若不連續點有無限多個，則未必能積分。例如Dirichlet 函數是在定義域內每一點都不連續的函數，其上積分≠下積分（註２）。函數爲可積分的充要條件是由黎曼、du Bois — Reymond 及Lebesgue等人所找出的。這個條件告訴我們：一個函數若要能積分，其不連續點就不能太多。這個條件也等於回答了我們的第一個問題。然而，在本文中，我們將不證明這個可積分判準（註３）。我們打算討論另一個問題，這個問題是因下列事實而產生：對黎曼積分而言，在〔a，b〕上，我們可找到滿足下列條件的函數序列f_n，而其極限函數卻無法積分。所滿足的條件爲：

$$\lim_{m\ n\to\infty}\int_a^b |f_m(x)-f_n(x)|\,dx=0$$

這件事實說明：由所有黎曼可積分的函數所成的集合缺乏“完全性”，這是一個相當嚴重的障礙，因爲完全性在近世分析的任何分枝中幾乎是不可或缺的。例如：在微分方程理論中的存在及唯一定理和隱函數定理。因此，我們要尋求一種包含更廣的積分意義，使所有在這種積分意義下可積分的函數集合具備完全性，而當應用這種積分在所有黎曼可積分的函數上時，結果與原先的黎曼積分一樣。基於這種要求，我們必得先在黎曼積分裏，尋找一些蛛絲馬跡，以作爲推廣的依據。

一、黎曼積分與階梯函數

在這裏，我們要闡釋階梯函數在黎曼積分理論中所佔的重要地位，並試圖去描述這些階梯函數的性質，等到進一步的積分理論開始時，我們將把這些性質當作公設，而僅在這些公設上，構作起一般的積分理論。

§１　黎曼積分的定義

此後，我們所要研討的函數的定義域，都是指〔a，b〕而言。對於分割P，函數f的下界和是用$L_p(f)$ 表示，而$U_p(f)$ 表示f對P的上界和。下積分 $\underline{\int_a^b} f$與上積分 $\overline{\int_a^b} f$皆照 Johnson 書上的定義。若$P_1,\cdots,P_q,\cdots$爲一序列〔a，b〕的分割，且 $\lim_{q\to\infty}\|P_q\|=0$．則可證得 $\lim_{q\to\infty}L_{P_q}(f)=\underline{\int_a^b} f(x)dx$，且 $\lim_{q\to\infty}U_{P_q}(f)=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$。因

此，函數f為黎曼可積分，若且僅若 $\lim_{q\to\infty} L_{P_q}(f)=\lim_{q\to\infty} U_{P_q}(f)$。若$P_q$ 與 P'_q 為兩列分割，$||P_q||$ 與 $||P'_q||$ 皆趨近於零，並且 $\lim_{q\to\infty} L_{P_q}(f)=\lim_{q\to\infty} U_{P'_q}(f)$，則$f$為黎曼可積分。以上這些結果，我們都不予證明，而在證明階梯函數的主要性質時，將應用到上述這些結果。

§2　階梯函數

定義：設$I_1\cup\cdots\cup I_p$ 為〔a，b〕之一分割，h_1，$h_2\cdots h_p$為P個實數，則函數$h(x)=h_q$，$\forall x\in I_q$（$q=1$，…，p）稱為階梯函數。

在上述定義中，每一I_q 之端點的函數值可為任意的有限值，甚或不予定義，因為，一會兒我們將知道，這些點的偏差並不影響整個階梯函數的性質。現在把有關階梯函數的幾個初步的性質列之如下，同學有興趣，可自己證明。

1. 令H表定義於〔a，b〕上之所有階梯函數所成的集合。則H對函數的加法及實數乘函數的乘法，成一向量空間。亦即：若h，$k\in H$，則$l=\alpha h+\beta k\in H$。
2. 若$h\in H$，則$|h|\in H$。（$|h|(x)$ 定義為$|h(x)|$）。
3. h，$k\in H$，則$h_1=max\{h,k\}$，$k_1=min\{h,k\}$均在H中。（$h_1(x)=max\{h(x),k(x)\}$，$k_1(x)=min\{h(x),k(x)\}$）。
4. 若$h\in H$，則$h^+(x)=max\{h(x),0\}$，$h^-(x)=max\{0,-h(x)\}$皆為階梯函數。

其次，對每一$h\in H$，皆給予一個"積分"：$Ih=\sum_{k=1} h_k s(I_k)$，$s(I_k)$ 表子區間I_k 的長度。則I具有下列二性質。

1. 若h，$k\in H$，α，β為任二實數，則$I(\alpha h+\beta k)=\alpha Ih+\beta Ik$。
2. 若h，$k\in H$，而$h(x)\leqslant k(x)\forall x\in$〔$a$，$b$〕，則$Ih\leqslant Ik$。

§3　零測度集

在考慮閉區間〔a，b〕中的某一性質時，常不能期望每一點均能滿足此性質。雖然如此，我們還可以作適度的容忍。如果那些不受約束的點的個數不超過某一限度的話，我們還能夠把這性質當作每點均能滿足一樣看待。這個限度就是本節中所講的零測度集概念。

定義：令$Z\subset$〔a，b〕，若對每一$\varepsilon>0$，皆存在有一蓋（covering）遮蓋住Z而滿足下列條件：蓋的元素個數是可數的，蓋的每一子區間的測度加起來小於ε，則稱Z是零測度集。空集合亦被視為零測度集。

由這個定義，同學可自證一下，若Z的元素個數是可數的，則Z為零測度集。（參閱 Spivak的Calculus on Manifoldsp. 50）因此，階梯函數的不連續點，也成一個零測度集。又若Z_1，…，Z_n，…為一序列零測度集，則可證明$\bigcup_{n=1} Z_n$亦為零測度集。

若在〔a，b〕上所有不滿足某一性質的點成一零測度集，則稱此性質在〔a，b〕上幾乎到處成立。

在上面的定義中，我們用到了〔a，b〕中測度的概念。在一般的積分理論中，我們也須要這種零測度集的概念，但是，在那裡，函數的定義域純粹是一個抽象的集合，沒有測度可供定義零測度集，不過，下面這個定理提供我們另外一個不須測度而等價的定義。

定理1：集合$Z\subset$〔a，b〕為零測度集，若且僅若，對任意之$\epsilon>0$，皆存在有一非減的階梯函數序列（註4），

$$h_1^{(\varepsilon)}(x)\leq\cdots\leq h_m^{(\varepsilon)}(x)\leq\cdots,\ h_m^{(\varepsilon)}(x)\geq 0 \quad (1)$$

$$\text{使得}\quad Ih_m^{(\varepsilon)}<\varepsilon\quad \forall m=1,2,\cdots \quad (2)$$

$$\text{且}\quad \sup_m h_m^{(\varepsilon)}(x)\geq\forall x\in Z \quad (3)$$

證明：若Z為一零測度集，則對任何$\varepsilon>0$，皆存在有一組閉區間I_1，…，I_m，…蓋住整個集合Z，而其長度之和小於ε。令$h_m^{(\varepsilon)}$表一階梯函數，其在I_1，…，I_m上之函數值為1

因而 $\overline{f}=\underline{f}$ ，幾乎到處成立。

反之，若 $\overline{f}(x)=\underline{f}(x)$ 幾乎到處成立，其意即

$\lim\limits_{q\to\infty}(\overline{h}_q-\underline{h}_q)(x)=0$ 幾乎到處成立。

由預備定理2， $\lim\limits_{q\to\infty}I(\overline{h}_q-\underline{h}_q)=0$

$$\text{因而 } \underline{\int}_a^b f(x)\,dx=\lim_{q\to\infty}I\,\underline{h}_q$$

$$=\lim_{q\to\infty}I\,\overline{h}_q=\overline{\int}_a^b f(x)\,dx,$$

亦即，f為黎曼 可積分。

由定義，我們知道，若$\underline{f}(x)=f(x)=\overline{f}(x)$ 幾乎到處成立，則f為黎曼可積分。

§ 5 推廣的要點

在上一節中，我們知道，若f為可黎曼積分，則可找到兩列階梯函數，從兩個方向分別趨近於f。其實，如果我們能找到一列非減少的階梯函數序列k_q 幾乎到處收斂至f，並找到另一列非增加的階梯數列序l_q 幾乎到處收斂至f，且對"所有的"x，$k_q(x)\leqslant f(x)\leqslant l_q(x)$，（$k_q$與$l_q$可不必像上節中那兩列階梯函數的形式），則$f$為可黎曼積分。這可證明如下：

令P_q表〔a，b〕之一分割，而在P_q 之每一子區中，$k_q(x)$ 等於某一常數，同時構作起對應的函數$\underline{h}_q(x)$，則

$$k_q(x_0)\leqslant\inf_{x\in I_q(x_0)}f(x)=\underline{h}_q(x_0)\leqslant f(x_0)$$

$I_q(x_0)$為P_q中包含x_0之一子區間。

因$k_q(x_0)\to f(x_0)$故$\underline{h}_q(x_0)$也幾乎到處收斂至$f(x_0)$，亦即$\underline{f}(x_0)=f(x_0)$幾乎到處成立。同理可證$\overline{f}(x_0)=f(x_0)$幾乎到處成立。故$f$為黎曼可積分。

在這裏，我們可依照§4中的證明，一樣可得 $\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{q\to\infty}I\,k_q=\lim\limits_{q\to\infty}I\,l_q$

上面這個式子，便是我們擴展積分意義的一條線索。我們一直試圖尋找一個包含黎曼積分的定義。若一函數f為一非減少階梯函數序列h_q之極限 i.e. $\underline{h}_q(x)\to f(x)$幾乎到處成立，且$I\,h_q$之值亦收斂至某一定數。若把此定數當作$I\,f$，至少是不違反黎曼積分的定義。因為當$f$為可黎曼積分時，這兩種定義是一樣的。只是，這樣的定義是否完善呢？（ well defiend ）$I\,f$會不會隨著$h_q(x)$之選擇而改變呢？答案是不會。也就是這種定義為唯一。在第二部份中，我們的積分即將如此定義。並且我們將看到，這種積分定義將包含黎曼積分的定義，而所有可這樣積分的函數，成一個 Complete normed vector space.

二、廣義積分理論

以下，我們所要討論的函數的定義域只是一個抽象的集合X。其中沒有運算關係，沒有測度概念。在這集合上，我們要作一些公設，這些公設本是描述黎曼積分中的階梯函數及其積分。

§ 1 基本函數與基本積分

在此，基本函數與基本積分是階梯函數與積分之類似物。令H表所有定義於X上所有界實值函數（此後將稱為基本函數）所成的集合，且"假設"H滿足下列公設：

(a) 對於函數之加法與實數乘函數之乘法，H為一向量空間。

(b) 若$h(x)\in H$，則$|h(x)|\in H$。

由這些公設，可立即獲得一些初步的結果，在以後的構作中，將會利用這些結果。

1. 若$h(x)\in H$，則$h^+\in H$，且$h^-\in H$。這是因為 $h^+(x)=\frac{1}{2}\{|h(x)|+h(x)\}$

   $h^-(x)=\frac{1}{2}\{|h(x)|-h(x)\}$

2. 若h，$k\in H$，則$\max\{h,k\}$，$\min\{h,k\}\in H$，這是因為

   $\max\{h,k\}=[h-k]^++k$

   $\min\{h,k\}=-\max\{-h,-k\}$

現在，假設每一$h\in H$均附有一實數$I\,h$（稱之為h之基本積分），而滿足下列公設：

① 若h，$k\in H$，α，$\beta\in R$，則

$I(\alpha h+\beta k)=\alpha Ih+\beta Ik$ 。

② 非負性公設，若 $h(x)\geq 0$，則 $Ih\geq 0$ 。

③ 連續性公設，設 $h_1,\cdots h_n,\cdots$ 爲一序列 H 中之基本函數 $h_n(x)\geq h_{n+1}(x)$，$n=1,2,\cdots$，且對所有的 $x\in X$，$h_n(x)\to 0$，則 $Ih_n\to 0$ 。

由①，②可得：若 $h(x)\leqslant k(x)$，則 $Ih\leqslant Ik$ 由此可推得 $|Ih|\leq I(|h|)$，

$\forall h\in H$ 。（讀者自證）

§ 2 零測度集

在上一部分中，我們先用定義中測度的概念來定義包含於定義域中之零測度集，然後又找出一個等價的敘述。在此敘述中，我們只看到階梯函數及其積分。在這裏，我們已有階梯函數的類似物——基本函數，我們現在便用這基本函數及其積分來定義零測度集。

定義：設 $Z\subset X$ 。若對任意之 $\epsilon>0$，總存在有一序列非減少且非負的 $h_q\in H$，$q=1,2,\cdots$，使 $Ih_q<\varepsilon$，且

$\sup_q h_q(x)>1 \quad \forall x\in Z$

則稱 Z 爲一零測度集。空集合亦被視爲零測度集。根據此定義，我們可以證明：若 $Z_1,\cdots,Z_n,\cdots$ 均爲零測度集，則

$\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ 亦爲零測度集。

證明：對任意之 $\varepsilon>0$ 及 n，存在有一 H 中之非減少序列，$h_p^{(n)}$（$p=1,2,\cdots$），使

$Ih_p^{(n)}<\varepsilon/2^n$ 且 $\sup_p h_p^{(n)}(x)\geq 1$

$\forall x\in Z_n$ 。令 $h_p=\max\{h_p^{(1)},\cdots,h_p^{(p)}\}$（$p=1,2,\cdots$），則序列 $\{h_p\}$ 成一非減少序列。且 $Ih_p\leqslant\sum_{k=1}^{p}Ih_p^{(k)}<\varepsilon$ 。同時，

$\sup_p h_p(x)>1 \quad \forall x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}Z_n$，因而

$\bigcup_{n=1}^{\infty}Z_n$ 爲一零測度集。

定義了零測度集之後，我們便可仿照前一部分的第三節，定義“幾乎到處成立”這個詞語。爲了要擴張 H，我們還要要下面這個預備定定理。

預備定理：設 $\{h_p\}$ 爲一序列非增加的非負的基本函數，$\{h_p(x)\}$ 幾乎到處收斂至 0，

則 $\lim_{p\to\infty}Ih_p=0$ 。

證明：令 $M_1=\sup_{x\in X}h_1(x)$，

$Z=\{x\mid h_p(x)\text{ 不收斂至 }0\}$

條件告訴我們，Z 爲一零測度集。因此，對任一 $\varepsilon>0$，存在有一序列非減少的非負函數 $k_p\in H$（$p=1,2,\cdots$）使得

$Ik_p<\varepsilon/M_1$，且 $\sup_p k_p(x)\geq 1 \quad \forall x\in Z$

（這是零測度集的定義）。因

$h_1(x)\geq h_2(x)\geq\cdots$，且因 $h_p(x)\geq 0$，

故 $\lim_{p\to\infty}Ih_p\geq 0$

又 $\lim_{p\to\infty}Ih_p\leqslant\varepsilon/M_1$

則 $(h_p-M_1k_p)(x)$ 成一減數列，且在“每”一點，其極限均不大於零。（這是因爲 $\{h_p(x)\}$ 成一減數列，$M_1=\sup_{x\in X}h_1(x)\geq\lim_{p\to\infty}h_p(x)$，故 $\lim h_p(x)-M_1\lim k_p(x)\leqslant 0$）因此，由公設 3，

$I(h_p-M_1k_p)\leq I(h_p-M_1k_p)\to 0$

故 $\lim_{p\to\infty}Ih_p-M_1\lim_{p\to\infty}Ik_p$

$=\lim_{p\to\infty}I(h_p-M_1k_p)\leqslant 0$

而 $0\leqslant\lim_{p\to\infty}Ih_p\leqslant M_1\lim_{p\to\infty}Ik_p\leqslant M_1\dfrac{\varepsilon}{M_1}$

$=\varepsilon$

因 ε 爲任予之正數，故 $\lim_{n\to\infty}Ih_p=0$ q.e.d

在上面這個預備定理的條件中，對每一 $x\in X$，$h_p(x)$ 均成一非增加數列（或稱減數列），只是並非這些數列都收斂到零，現在，我們先用這個結果來證明：若函數 h，$k\in H$ 僅在零測度集上之值不等（註 5）則 $Ih=Ik$

證明：這只要證明：“若 $h\in H$ 僅在零測度集上之值不爲零，則 $Ih=0$” 便可。對於 $|h|$ 而言，令 $\{|h_n|\}$ 表一序列，其中

$h_n = h$ ($n = 1, 2, \cdots$)，則 $|h_n|(x)$ 幾乎到處收斂到零，再應用上之預備定理，可得 $I(|h|) = 0$，因而

$|Ih| \leqslant I(|h|) = 0$，$Ih = 0$。

由這個結果，我們知道，若 $h_p(x)$ 僅對零測度集的點不成減數列的話，上述預備定理的結果依然成立。事實上，我們可將 h_2 換成 $h_2' = \min(h_1, h_2)$，h_3 換成 $h_3' = \min(h_2', h_3)$，等等，這樣做，我們僅更動了每一 h_n 在零測度集上之函數值，却形成一個對"每"一個 x 皆爲非增加的數列。然後再利用上之預備定理而可證證。

以後，符號↗將用在增加數列及在零測度集以外爲非減少的函數序列。例如，$h_n \nearrow f$ 是表示，除了零測度集以外，$h_n(x)$ 成一增數列，且收斂至 $f(x)$。符號↘也有類似的意義。

§ 3　擴充的第一步 L^+

在這一節裏，我們要引介一個函數集合 L^+，並定義其中每一函數的積分。

定義：$f \in L^+$ 若且僅若存在有一序列 H 中的函數 h_n ($n = 1, 2, \cdots$) 使 $h_n \nearrow f$，且 $Ih_n \leqslant c$ (常數)。　(1)

我們所以會這樣定義 L^+，其動機實由上一部分 § 5 中引起的。現在，我們要看一看，若 $f \in L^+$，則 f 具有什麼性質。

性質 1：若 $f \in L^+$，則除了零測度集外，f 之值均爲有限。

證明：令 $Z = \{x \mid f(x) = +\infty\}$，我們可假設 $h_n(x) \geq 0$ (註　)，且對每一 $x \in Z$，$h_n(x)$ 成一增數列 (如果必須的話，可剔除那些不如此規則的點) 而收斂到 $+\infty$。

對任予以之 $\varepsilon > 0$ 及任一 $x \in Z$，則從某一 n 起，不等式　$h_n(x) > c/\varepsilon$ 皆成立。

因而 Z 可被 $\{x : h_n(x) > \frac{c}{\varepsilon}\}$ ($n = 1, 2, \cdots$) 所含蓋。

亦卽，對每一 $x \in Z$，$\sup_n \frac{\varepsilon h_n(x)}{c} \geq 1$。

並且，由(1)　$I\left(\frac{\varepsilon h_n}{c}\right) = \frac{\varepsilon}{c} I h_n \leqslant \varepsilon$。

這就是表示，Z 爲一零測度集。　q.e.d.

L^+ 包含那些函數呢？由 L^+ 之定義，我們卽可獲知，若 $f \in L^+$，f_1 與 f 之値僅差在零測度集上，則 f_1 亦在 L^+ 中。顯然，任一 $h \in H$ 皆在 L^+ 中，因而任一 h_1 若與 h 幾乎到處相同，則 $h_1 \in L^+$。

其次，要來定義 If。因 $Ih_n \leqslant c$，且 Ih_n 成一增數列，故 $\lim_{n\to\infty} Ih_n$ 存在，因此，我們很自然地就想定義 If 爲這個極限。但是，這樣的定義是否會隨著序列 h_n 之選擇而改變呢？等我們把下面這個一般的事實證出後，便可看到，上面這種定義是唯一。

性質 2：若 h_m 及 k_m 爲 H 中之兩列函數，且 Ih_m 及 Ik_m 皆爲有界，若 $h_m \nearrow f$，$k_n \nearrow g$，$f \leq g$。則 $\lim_{m\to\infty} Ih_m \leq \lim_{m\to\infty} Ik_m$。

證明：先固定足碼 m。然後考慮 $h_m - h_n$ ($n = 1, 2, \cdots$)，此爲 H 中之非增加序列。此序列之極限爲

$$h_m - g \leqslant f - g \leqslant 0$$

因而 $(h_m - k_n)^+ \searrow 0$，再由公設 3，

$I(h_m - k_n)^+ \searrow 0$，

因　$I(h_m - k_n) \leqslant I(h_m - k_n)^+$

又　$I(h_m - k_n) \geq I(h_m - k_{n+1})$

故 $I(h_m - k_n)$ 成一減少數列，且其極限不大於零。亦卽，

$$\lim_{n\to\infty}(Ih_m - Ik_n) = Ih_m - \lim_{n\to\infty} Ik_n \leqslant 0$$

故　$Ih_m \leqslant \lim_{n\to\infty} Ik_n$

因上式對所有的 m 均成立，

故　$\lim_{m\to\infty} Ih_m \leqslant \lim_{n\to\infty} Ik_n$。　q.e.d.

在上性質中，若令 $f = g$，則可得證：不管我們取什麼樣的過程趨近一個 L^+ 中之函數 f，If 恒可有唯一的定義。

§ 4　L^+ 中積分的性質

在 § 3 中，我們利用 H 中元素之積分，及收斂至極限的方法，定義 L^+ 中之積分，因此，基本積分的某些性質，也可能在 L^+ 中成立

。今僅列下那些可以成立的性質：

(a) 若$f\in L^+$，$g\in L^+$，則$f+g\in L^+$，且 $I(f+g)=If+Ig$

(b) 若$f\in L^+$，則對任何$\alpha>0$，$\alpha f\in L^+$，且$I(\alpha f)=\alpha If$。

(c) 若$f\in L^+$，$g\in L^+$，則$\min(f,g)\in L^+$，$\max(f,g)\in L^+$

因而，$f^+=\max(f,0)\in L^+$

定理1：設$f_n\in L^+(n=1,2,\cdots)$

$f_n\nearrow f$且$If_n\leq C$，則

$f\in L^+$ 且$If=\lim\limits_{n\to\infty}If_n$，

（Note. 在可黎曼積分的函數集合中，並無這種性質。）

證明：對每一f_n，我們均可找到一序列定義它的基本函數：

$h_{11}\leq\cdots\leq h_{1n}\leq\cdots$，$h_{1n}\nearrow f_1$；

$h_{21}\leq\cdots\leq h_{2n}\leq\cdots$，$h_{2n}\nearrow f_2$；

$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$

$h_{k1}\leq\cdots\leq h_{kn}\leq\cdots$，$h_{kn}\nearrow f_k$；

$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$

然後，令$h_n=\max(h_{1n},\cdots,h_{nn})$，則$h_n\in H$，且$h_n$成一非減少序列。

又$h_n\leq\max(f_1,\cdots,f_n)=f_n$，

故，$Ih_n\leq If_n\leq C$，記$f^*=\lim\limits_{n\to\infty}h_n$

則由 L^+之定義，$f^*\in L^+$

且 $If^*=\lim\limits_{n\to\infty}Ih_n$

但因對任一$k\leq n$，$h_{kn}\leq h_n\leq f_n$，

當$n\to\infty$時，$f_k\leq f^*\leq f$。

由假設，可知$f_k\nearrow f$，而f^* 被擠在中間，故$f^*=f$幾乎到處成立。因而$f\in L^+$

又因$Ih_{kn}\leq Ih_n\leq If_n\leq If$，

且因$Ih_n\nearrow If^*=If$，

故得 $If_r\nearrow If$。 *q.e.d.*

系：令 $g_k\in L^+$，$g_k\geq 0$，使

$I(\sum\limits_{k=1}^{n}g_k)\leq C\ (n=1,2,\cdots)$

則 $f=\sum\limits_{k=1}^{\infty}g_k\in L^+$，且$If=\sum\limits_{k=1}^{\infty}Ig_k$

證明：只要令$f_n=\sum\limits_{k=1}^{n}g_k$ 再應用上之性質即可得證。

§ 5 擴充之第二步L

現在，我們要把 L^+擴充到一個更廣大的集合$L=L(X)$，因L^+ 對有些代數運算還不具封閉性，比如：兩個L^+ 中函數之差並不一定定在L^+中，所以我們還要再施展一手，把L^+再行擴充到一個更大的L。

定義：$\varphi\in L\Leftrightarrow$存在有$f$，$g\in L^+$ 使 $\varphi=f-g$幾乎到處成立。L中的元素稱作可積函數。

下面這些性質，是告訴我們，當已知某些函數在L中時，則另外某些函數亦在L中。

(a) 可積函數的線性組合，仍然是可積。

(b) 若$\varphi\in L$，則$|\varphi|$，φ^+，φ^-亦在L中。

證明：若$\varphi=f-g$，$f\in L^+$，$g\in L^+$，

則$\max(f,g)\in L^+$，$\min(f,g)\in L^+$

則$|\varphi|=\max(f,g)-\min(f,g)\in L$。

又$\varphi^+=\dfrac{1}{2}(|\varphi|+\varphi)$，$\varphi^-=\dfrac{1}{2}(|\varphi|-\varphi)$

故φ^+，$\varphi^-\in L$。

(c) 若φ，$\phi\in L$，則

$\max(\varphi,\phi)=(\varphi-\phi)^++\phi\in L$，

且 $\min(\varphi,\phi)=-\max(-\varphi,-\phi)\in L$

接著，我們要利用 L^+中以構作好的積分來構作L中之積分。

定義：設$\varphi\in L$，若$\varphi=f-g$，$f\in L^+$，$g\in L^+$，則定 $I\varphi=If-Ig$，稱$I\varphi$為函數φ的Lebesgue 積分，傳統的記法為 $\int_X\varphi(x)\,dx$。

若另外有f_1，$g_1\in L^+$，使$f_1-g_1=\varphi$

則 $f+g_1=g+f_1$，$If+Ig_1=Ig+If_1$（這是由L^+ 中之積分之唯一性）。

因而$I(f-g)=I(f_1-g_1)$，故上面的定義是完善的。

公設(1)和(2)所描述關於基本積分的性質，Lebesgue 積分也具有，即線性和非負性。現在我們只證明第二個：若$\varphi=f-g$，f，$g\in L^+$ $\varphi\geq 0$，則$f\geq g$

因而$If\geq Ig$，$I\varphi=If-Ig\geq 0$。

讀者可再證明：若$\varphi \in L$，
則$|I\varphi| \leq I(|\varphi|)$。
關於φ的表法，我們可作如下的選擇：
若$\varphi \in L$，則$\varphi = f - g$，
設$h_n \nearrow g$（$h_n \in H$），則$Ig = \lim_{n \to \infty} Ih_n$
而$\varphi = f - g = (f - h_n) - (g - h_n)$
$= f_n - g_n$
這裏$f_n = (f - h_n) \in L^+$，$g_n \in L^+$
只要n足够大，則Ig_n可小於任何正數ε。
若$\varphi \geq 0$，則$f_n = f - h_n \geq f - g$
$= \varphi \geq 0$。

§6 Levi定理

為了要替L的完全性證明舖路，從這一節開始，我們要一連證明幾個定理。這些定理大約都是在討論某一特定的函數序列，其極限是否可積，且其積分如何求得的問題。

Levi定理：設$\varphi_1, \cdots, \varphi_k, \cdots \in L$，
$\varphi_k \geq 0$，$(k = 1, 2, \cdots)$
若$I(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k) \leq C$ $(n = 1, 2, \cdots)$
則$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \in L$，且$I\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} I\varphi_k$

證明：先將每一φ_k（$k = 1, 2, \cdots$）表為
$\varphi_k = f_k - g_k$，其中f_k，$g_k \in L^+$，
且$f_k \geq 0$，$g_k \geq 0$，$Ig_k < 1/2^k$。
則$\{g_k\}$滿足定理1系中的所有條件。（因為$g_k \geq 0$且$I(\sum_{k=1}^{n} g_k) \leq 1$。）
故$g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \in L^+$，且$Ig = \sum_{k=1}^{\infty} Ig_k$
又$\{f_k\}$亦滿足系中之條件，（因$f_k \geq 0$
且$I(\sum_{k=1}^{n} f_k) = I(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k) + I(\sum_{k=1}^{n} g_k)$
$\leq C + 1$之故）
因而$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \in L^+$，且$If = \sum_{k=1}^{\infty} If_k$
綜上所述，$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} f_k - \sum_{k=1}^{\infty} g_k$
$= f - g \in L$。
且 $I\varphi = If - Ig$
$= \sum_{k=1}^{\infty} If_k - \sum_{k=1}^{\infty} Ig_k$
$= \sum_{k=1}^{\infty} I(f_k - g_k) = \sum_{k=1}^{\infty} I\varphi_k$ q.e.d.

系1：設$\psi_n \in L$（$n = 1, 2, \cdots$），
若$\psi_n \nearrow \psi$且$I\psi_n \leq C$，則$\psi \in L$，
且$I\psi = \lim_{n \to \infty} I\psi_n$。

證明：令$\varphi_1 = \psi_1$，$\varphi_2 = \psi_2 - \psi_1$，$\cdots$，
再應用Levi定理，立即可證明。
q.e.d.

在系1中，若$\psi_n \searrow \psi$，則相同的結果依然成立。
從上面這個系，很容易證得：若$\varphi \in L$僅在零測度集上之值不為零，則$I\varphi = 0$，反之能成立嗎？

系2：若$\varphi_0 \in L$，$\varphi_0(x) \geq 0$，$I\varphi_0 = 0$，則$\varphi_0(x) = 0$幾乎到處成立。

證明：令$\varphi_n = n\varphi_0$，則$\{\varphi_n\}$收斂至一極限函數φ，
φ之定義為：$\varphi(x) = 0$ $\forall x$ s.t. $\varphi_0(x) = 0$；
$\varphi(x) = +\infty$ $\forall x$ s.t. $\varphi_0(x) > 0$
由系1，$\varphi \in L$，但因L中之函數僅在零測度集上之值為無限大，故$\varphi_0(x) > 0$ 僅在零測度集上成立。

系3：設$Z \subset X$，若對任予之$\varepsilon > 0$，恒存在有一函數序列$0 \leq \varphi_1^{(\varepsilon)}(x) \leq \cdots \leq \varphi_n^{(\varepsilon)}(x) \leq \cdots$，而$I\varphi_n^{(\varepsilon)} < \varepsilon$ $\forall n$，且
$\sup_n \varphi_n^{(\varepsilon)}(x) \geq 1$ $\forall x \in Z$，則Z為零測度集。

證明：若$\varphi_n^{(\varepsilon)}(x) \in H$，則顯然成立，在一般情形下，令$\varphi^{(\varepsilon)}(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n^{(\varepsilon)}(x)$，則由系1知，$\varphi^{(\varepsilon)} \in L$，且
$I\varphi^{(\varepsilon)} = \lim_{n \to \infty} I\varphi_n^{(\varepsilon)} \leq \varepsilon$

取$\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$，

令$\varphi_1 = \varphi^{(1)}$，$\varphi_2 = \min\{\varphi^{(1)}, \varphi^{(1/2)}\}$，$\cdots$，$\varphi_n = \min\{\varphi^{(1)}, \cdots, \varphi^{(1/n)}\}$，$\cdots$

則 ψ_n 爲非負函數（亦即 $\psi_n(x)\geq 0$），因對每一 n，$\varphi^{(1/n)}(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m^{(1/n)}(x)=\sup\limits_m\varphi_m^{(1/n)}(x)$

$$\geq 1\ \forall x\in Z$$

故 $\psi_n(x)\geq 1\ \forall x\in Z$ (1)

又 $\psi_1(x)\geq\cdots\geq\psi_n(x)\geq\cdots$

且 $I\psi_n\leq I\psi^{(1/n)}\leq 1/n$

若 $\psi(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)$

則由系1，$\psi\in L$ 且 $I\psi=\lim\limits_{n\to\infty}I\psi_n=0$

因 $\psi_n(x)\geq 0$，故 $\psi(x)\geq 0$，且由(1)

$\psi(x)\geq 1\ \forall x\in Z$

由系2，$Z_1=\{x:\psi(x)>0\}$ 爲一零測度集

因而 $Z\subset Z_1$ 亦爲零測度集。

§ 7 Lebesgue定理

在§6中，到一個極限的過程，被限制是單調的。從這節開始，我們要考慮任意過程的收斂。但是，如果完全不對收斂的過程做點限制的話，我們亦不能期望下式一定成立：

$\varphi_n\to\varphi\quad I\varphi_n\to I\varphi$ 。在黎曼積分中就有這樣的例子，我們定義函數 φ_n

$$\varphi_n(x)=\begin{cases} n\sin nx, & 0\leq x\leq\dfrac{\pi}{n} \\ 0, & \dfrac{\pi}{n}<x\leq\pi\end{cases}\quad(n=1,2,\cdots)$$

則 $\varphi_n\to 0$，但 $I\varphi_n$ 不收斂至0，因 $I\varphi_n$ 恒等於2。現在我們要用 L 中的一個函數 φ_0，來約束所考慮的所有函數，設 $\varphi_0\in L$，$\varphi_0(x)\geq 0$

令 $L(\varphi_0)=\{\varphi:-\varphi_0(x)\leq\varphi(x)\leq\varphi_0(x)$ 幾乎到處成立$\}$ 則對每一 $\varphi\in L(\varphi_0)$，必有 $-I\varphi_0\leq I\varphi\leq I\varphi_0$，並且，若 φ 爲 $L(\varphi_0)$ 中某一單調序列之極限，則 φ 必然也在 $L(\varphi_0)$ 中，而由系1知，$\varphi\in L$ 。

又，對 $L(\varphi_0)$ 中之任何序列 $\{\varphi_n\}$，函數

$\sup\{\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots\}$ (1)

又 $\inf\{\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots\}$ (2)

皆在 $L(\varphi_0)$ 中，這是因爲(1)式爲非減少序列 $\max\{\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}\in L(\varphi_0)$ 在 n 趨近無限大時之極限；(2)式爲非增加序列 $\min\{\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}\in L(\varphi_0)$ 之極限

現在，我們要利用上面所討論的這些東西，來描述 $L(\varphi_0)$ 中一序列收斂函數的性質。

Lebesgue定理．若 L 中一序列函數 φ_n 幾乎到處收斂至某一函數 φ 並且滿足下列條件：

$|\varphi_n(x)|\leq\varphi_0(x)\in L\ (n=1,2,\cdots)$ (A)

則 $\varphi\in L$ 且 $I\varphi=\lim\limits_{n\to\infty}I\varphi_n$ (B)

證明：首先，我們要找兩個序列，分別從上下兩個方向來趨近 φ 。

令 $\psi_n(x)=\sup\{\varphi_n(x),\varphi_{n+1}(x),\cdots\}$，

$\chi_n(x)=\inf\{\varphi_n(x),\varphi_{n+1}(x),\cdots\}$。

則 ψ_n，$\chi_n\in L(\varphi_0)$，以下，我們僅考慮 $\varphi_n(x)$ 能收斂到 $\varphi(x)$ 之 x 值，則

$$\psi_n(x)\geq\lim_{p\to\infty}\varphi_{n+p}(x)=\varphi(x)$$

$$\chi_n(x)\leq\lim_{p\to\infty}\varphi_{n+p}(x)=\varphi(x)$$

且 $\psi_{n+1}(x)\leq\psi_n(x)$，$\chi_{n+1}(x)\geq\chi_n(x)$，

故 $\psi_n(x)\searrow\psi(x)\geq\varphi(x)\quad\chi_n(x)\nearrow\chi(x)\leq\varphi(x)$

現在證明：$\psi(x)=\varphi(x)=\chi(x)$

因 $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ni|\varphi(x)-\varphi_n(x)|<\varepsilon\ \forall n\geq n_0$

因而 $|\varphi(x)-\psi_n(x)|<\varepsilon\ \forall n\geq n_0$

故 $\varphi(x)=\psi(x)$。同理 $\varphi(x)=\chi(x)$

故 $\psi_n(x)\searrow\varphi(x)$ 且 $\chi(x)\nearrow\varphi(x)$

由證明前之討論可知，$\varphi\in L$ 。

因 $I\chi_n\leq I\varphi_n\leq I\varphi_n$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}I\chi_n\leq\lim\limits_{n\to\infty}I\chi_n\leq\lim\limits_{n\to\infty}I\psi_n$

$I\psi\leq\lim\limits_{n\to\infty}I\varphi_n\leq I\varphi$

故 $I\varphi=\lim\limits_{n\to\infty}I\varphi_n$ q.e.d.

§ 8 Fatou's lemma

1. 在有些條件下，雖然由 $\varphi_n\to\varphi$ 不能得到 $I\varphi_n\to I\varphi$，我們仍然可推到 $\varphi\in L$，且給 $I\varphi$ 一個估計。例如說，若把Lebesgue定理的條任之一 $|\varphi_n(x)|\leq\varphi_0(x)\in L$ 省去，而代之以 $|\varphi(x)|\leq\varphi_0(x)$（$\varphi$ 爲 φ_n 之極限函數），則 φ 亦在 L 中，而 $|I\varphi|\leq I\varphi_0$，這可證明如下：

令 $\psi_n(x)=\max\{\min[\varphi_n(x),\varphi_0(x)],-\varphi_0(x)\}$，這個意思也就是把每一 φ_n 截去超出 φ_0 的部分及低於 $-\varphi_0$ 之部分而得 ψ_n，則 $\varphi(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)$

顯然，$\psi_n\in L$ 且 $|\psi_n(x)|\leq\varphi_0(x)$

因此，由Lebesgue定理，$\varphi \in L$

又由 $|\varphi(x)| \leq \varphi_0(x)$

$-\varphi_0(x) \leq \varphi(x) \leq \varphi_0(x)$

$-I\varphi_0 \leq I\varphi \leq I\varphi_0$

故 $|I\varphi| \leq I\varphi_0$

2. 現在若把Lebesgue定理中的條件(A)變弱：只給 $I(|\varphi_n|) \leq C$，則 $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$ 亦在 L 中，但(B)亦變為

$$I|\varphi| \leq C$$

Fatou's lemma. 令 $\varphi_n \in L$，$\varphi_n(x) \geq 0$，$\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ 幾乎到處成立，且 $I\varphi_n \leq C$ 則 $\varphi \in L$，且 $0 \leq I\varphi \leq C$

證明：若令 $\chi_n = \inf\{\varphi_n, \varphi_{n+1}, \cdots\} \geq 0$ 則 $\{\chi_n\}$ 形成一非減少序列且幾乎到處收歛至 φ。（參閱前節中Lebesgue定理中之證明）

又，$\chi_n(x) \leq \varphi_n(x)$，故 $I\chi_n \leq I\varphi_n \leq C$

由§6中系1，$\varphi \in L$ 且 $I\chi_n \nearrow I\varphi$

亦即 $0 \leq I\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} I\chi_n \leq C$ *q.e.d.*

在通常情形下，若 $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$，

$I(|\varphi_n|) \leq C$

則由Fatou's lemma，

$|\varphi(x)| \in L$ 且 $I(|\varphi|) \leq C$，

又由1之結果，$\varphi \in L$。（只要令 $\varphi_0 = |\varphi|$）

q.e.d.

§9 L空間之完全性

首先，讓我們看看完全性在實數集合中的意義。我們說實數具有完全性，其意為：任何一個歌西數列均收歛至某一實數，但在描述一個數列的時候，必須用到絕對值的概念。因此，若我們欲在一般的空間中定義序列的極限，則非要有一個類似絕對值的概念不可，這就是“模方”。

定義：設 E 為一向量空間，定義於 E 上的一個模方是指一個 E 到 R 的函數 $\varphi \to \|\varphi\|$，而滿足下列公設：

A 1. $\|\varphi\| > 0 \quad \forall \varphi \neq 0$，且 $\|0\| = 0$

A 2. $\|\alpha\varphi\| = |\alpha|\,\|\varphi\| \quad \forall \varphi \in E$，$\alpha \in R$

A 3. 三角不等式。$\|\varphi + \phi\| \leq \|\varphi\| + \|\phi\|$

$\forall \varphi$，$\phi \in E$。

一個具有模方的向量空間，稱之為有模方向量空間（normed vector space）。讀者可發現，在上述定義中的三個公設為描述 R 中之絕對值函數者。

E 中序列極限的定義，可仿造數列極限定之。

定義：設 φ_n 為 E 中之一序列，ε 為任何正數，若存在有一自然數 N，使對所有的 m，$n > N$，下式成立：

$$\|\varphi_m - \varphi_n\| < \varepsilon$$

則稱 φ_n 為一歌西序列。

若 E 中之任一歌西序列 φ_n 皆有一極限 $\varphi \in E$，則謂 E 為一完全性有模方向量空間

今 L 已成一向量空間，在其中我們可以找到一個自然的模方 $\|\varphi\| = I(|\varphi|)$

則A 2，3 可很容易由 I 的基本性質證得。

但由§6中之系2，$I|\varphi| = 0$

僅可得 $\varphi = 0$ 幾乎到處成立而不保證完全和0重合。故嚴格說來，如此選擇的模方並不滿足A 1.，不過，只要我們把函數值幾乎到處相等的兩個函數看做全等，則可免除是項缺點。

在前幾節中，我們要使 L 空間具備完全性的努力，現在已可如願以償了。

Riesz－Fischer 定理：具有如上定義的有模向量空間 L，是一個完全的有模方向量空間。亦即：L 中的任一歌西序列 φ_n 均有一可積的極限函數。（極限的定義是對 L 上的模方來講。註6）

證明：設 φ_{n_k} 為 φ_n 的某一部分列，若 φ_{n_k} 有極限 $\varphi \in L$，則 φ 亦必為 φ_n 之極限；這是因為在下列不等式

$$\|\varphi - \varphi_n\| \leq \|\varphi - \varphi_{n_k}\| + \|\varphi_{n_k} - \varphi_n\|$$

中的右邊第二項在 $n \to \infty$ 且 $n_k \to \infty$ 時趨近於零。（因 φ_n 成一歌西序列。）現在我們便是要找這樣的一個有極限的部分列。對於每一自然數 k，我們可以找到一個自然數 N_k，使對所有的自然數 $n > N_k$ 下式成立：

$$\|\varphi_n - \varphi_{N_k}\| < 1/2^k$$

令 n_k 為這些 N_k 中之最小者，則 n_k 成一嚴格增數列。故 $n_{k+1} > n_k$，而

$$\|\varphi_{n_{k+1}} - \varphi_{n_k}\| < 1/2^k$$

亦即 $I(|\varphi_{n_{k+1}}|-\varphi_{n_k}|)<1/2^k$

但由Levi定理，由可積函數

$|\varphi_{n_{k+1}}-\varphi_{n_k}|$組成的級數

$\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{n_{k+1}}-\varphi_{n_k}|$幾乎到處收歛，故

$\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_{n_{k+1}}-\varphi_{n_k})$ 亦幾乎到處收歛。（見 Johnson p.470）

而其部分和爲

$$\sum_{k=1}^{N}(\varphi_{n_{k+1}}-\varphi_{n_k})=\varphi_{n_{N+1}}-\varphi_{n_1}$$

這表示 φ_{n_k} 會幾乎到處收歛至某個函數 φ 。茲固定 k ，則當 $p\to\infty$時，函數$\varphi_{n_p}-\varphi_{n_k}$ 幾乎到處向$\varphi-\varphi_{n_k}$ 收歛。

因 $I(|\varphi_{n_p}-\varphi_{n_k}|)=||\varphi_{n_p}-\varphi_{n_k}||$

$<1/2^k$ （$p>k$）

故由上節末之結果，知$\varphi-\varphi_{n_k}$爲可積，因而φ爲可積。又由相同的結果，

$$||\varphi-\varphi_{n_k}||=I(|\varphi-\varphi_{n_k}|)\leq 1/2^k$$

因而φ_{n_k}對L中之模方而言，收歛至L中之一函數φ 。 *q.e.d.*

最後，我們要證明，L空間是一個具有完全性的最小擴充。用數學語句來說，集合H是L的一個稠密子集。因爲L中的每一函數均爲L^+中某兩函數之差，我們只須證明每一個$f\in L^+$ 均爲一序列H中函數 h_n 之極限（對L之模方而言）。我們選擇 h_n 爲定義f的一列基本函數。則$h_n\nearrow f$ ，$Ih_n\nearrow If$且

$$||f-h_n||=I(f-h_n)=If-Ih_n\to 0$$

三、在R上的Lebesgue積分

現在，我們要利用上面這套積分理論，在R上建立起一套包含黎曼積分的理論。

§1 黎曼積分與Lebesgue積分的關係

在第一部分的§4中，我們已看到，若f爲一定義於〔a，b〕上的可黎曼積分函數，則可找到一序列非減少的階梯函數幾乎到處趨近於它。今選擇所有的階梯函數h作爲基本函數而成一集合H；每一階梯函數的積分作爲基本積分，i.e.，

$$Ih=\sum_{j=1}^{m}h_j\,s(I_j)\,,\ I_j=\{x:h(x)=h_j\}$$

則如第一部分所示，I滿足第二部分§1中之所有公設。因此，第二部分的整套理論皆適用於這種情形之下，亦即可保證我們得到一個向量空間L〔a，b〕；且對每一$\varphi\in L$，皆有一Lebesgue積分。而對定義於L上的模方 $||\varphi||=I(|\varphi|)$，L成一完全的有模向量空間。

這樣構作起來的函數空間有多大呢？我們知道，任一可黎曼積分函數皆可Lebesgue積分（其實，$f\in L^+$），並且f的Lebesgue積分與f的黎曼積分相等。除此之外，它還可以應用在一個更廣的函數空間中。例如，我們可以找到每一點均不連續的函數，但是照樣可以 Lebesgue 積分。像 Dirichlet 函數，（它僅在有理數時函數值爲1，某餘則爲0，）我們已知它不可黎曼積分，但因有理數的集合成一零測度集，故 Dirichlet 函數僅在零測度集上之值不爲零，故其積分爲零。事實上，任何一個函數f，只要可用一序列階梯函數 h_n 去幾乎到處趨近它，且$|f(x)|\leq f_0(x)$，（ f_0 爲一可積函數，甚至是常數函數），則f亦爲可積函數。（參看上一部分§8）

§2 非正常黎曼積分與Lebesgue積分

假如一個函數f的定義域〔a，b〕包含原點O，且除了O點以外，其函數値爲有限數，設$\varepsilon>0$，O_ε表一包含原點的開區間。若對每一$\varepsilon>0$，f在$I_\varepsilon=$〔a，b〕$-O_\varepsilon$ 上之黎曼積分 $\int_{I_\varepsilon}f(x)\,dx$皆存在，且極限

$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{I_\varepsilon}f(x)\,dx$存在，則稱$f$在〔$a$，$b$〕上之非正常黎曼積分（Improper Riemann integrable）爲 $\int_a^b f(x)\,dx$

$$=\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{I_\varepsilon}f(x)\,dx$$

試考慮如下之例：

例：函數$\varphi(x)=(x)^{-\alpha}$ ，定義域：$I=$〔a，b〕

則當$\alpha<1$時，φ在I上存在有非正常積

2. by the definition of a free structure, we know, if $f(s)$ is a dense subset of F and E is the closed subspace which contains $f(s)$, then $\overline{f(s)} \subset \overline{E} = E$, and hence $F \subseteq E$. It follows that $F=E$ and $f(s)$ generates F.

Briefly, we can state theabove theorem as a free structure F generated by S. (in the sense of homeomorphism)

Note:

In the theory of the free group, we have a theorem stated as follows; if a group together with a function $f:S \to F$ is a free group on the set S, then f is injective and its image $f(s)$ generates F.

Theorem 2: (Uniqueness theorem)

If (F,f) and (F',f') are free structures on the same completely regular space S, then there exists a unique homeomorphism $j:F \to F'$ such that $jof=f'$.

Proof:

Since (F,f) is a free structure on S, it follows from the definition of a free structure that there exists a unique contiuous function $j:F \to F'$ such that $jof = f'$ holds in the following triangle:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & F \arrow[dl, dashed, "j"] \\ & F' & \end{tikzcd}$$

Similarly, there exists a unique homeomorphism $K:F' \to F$ such that $Kof'=f$ holds in the following trianlge;

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & & F' \arrow[dl, dashed, "K"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

Next, let us consider the composition $h=Koj$ and the identity function i of F. In the following diagram:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[dl, dashed, shift right, "h"'] \arrow[dl, dashed, shift left, "i"] \\ F & \end{tikzcd}$$

(Note: h and i are unique because of the definition of the free structure.)

We have $hof=Kojof=Kof'=f$, $iof=f$. It follows from the uniqueness in the definition that $Koj=h=i$. Since i is an identity function, it follows that j is injective. Similarly, one can show that joK is the indentity function on F', Hence j is also surjective. This proves j is a bijective continuous function. Since F and F' are compact Hausdorff spaces, it is a homeomoephism.

Note:

In the theory of the free group, we have a theorem stated as follows: If (F,f) and (F',f') are free groups on the same set S, then there exists a unique isomorphism $J:F \to F'$ such that $jof=f'$.

Theorem: 3: (Existence theorem)

For any completely regular space X, there always exists a free structure on X.

Proof:

If X is completely regular, then there is an embedding $\rho: X \to \rho^X$ where P^X, being a cartesian product of closed unit intervals, is compact Hausdorff. Let $\beta(X) = \overline{\rho(X)}$, then $\overline{\rho(X)}$ which is a closed subspace of P^X is a compact Hausdorff space By theorem, we have the commutative diagram:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & Y \arrow[d, "\rho_0"] \\ \beta(X) \arrow[r, "\phi"'] & \beta(Y) \end{tikzcd}$$

Note:

(Y is compact, and f is a continuous function.)

Since Y is compact Hausdorff, we have ρ_0 a closed map. Hence, $\rho_0(Y) = \overline{\rho_0(Y)} = \beta(Y)$, and Y is homeomorphic to $\beta(Y)$. Let $F = \rho_0^{-1}\phi$. F is unique because X is dense in $\beta(X)$. On the whole ($\beta(X)$, ρ) is a free structure on the completely regular space X.

Note:

In the theory of the group, we have a theorem stated as follows; For any set S, there always exists a free group on S.

Theorem: 4:

If $\hat{X}$ is any compact Hausdroff space with a homeomorphism f from a completely regular space X onto a dense subsets of S of $\hat{X} \Rightarrow \hat{X}$ is homeomorphic to a quotient space of a free structure F generated by X.

Proof:

First, pick a dense subset S of X which generates X. For example, we may take $S = \hat{X}$.

Consider the free structure F generated by the set S. Then the inclusive function $g: S \to \hat{X}$ extends to a unique continuous function $h: F \to \hat{X}$ (by existence theorem). Since $S = g(S) \subset h(F)$ and since S generates $\hat{X}$ and h is a closed map, hence $h(F) = X$ and it follows that h is surjective.

Because h is a closed continuous surjection, $\Rightarrow h$ is an identification, Hence, X is homeomorphic to $F/\ker(h)$. (By the theorem of quotient space)

Note: $S \cong X$.

Theorem 5:

Let (F,f) and (G,g) be the free structures on X, Y respectively. If $\theta: X \to Y$ is a homeomorphism, prove that there θ exists a homeomorphism between F and G.

Proof:

Since $X \cong Y$, it follows from Thm.2 that there exists $j: F \to G$ which is a homeomorphism.

Note:

In the theory of the free group, we have two theorems stated as follows:

1) Every group is isomorphic to a quotient group of a free group.
2) Let F be freely generated by X and G freely generated by Y. If $\theta: X \to Y$ is a one-to-one correspondence, then F is isomorphic to G.

Theorem 6:

If Z^+ with discrete topology and S with discrete topology are homeomorphic $\Rightarrow$ the cardinal number of the free structure G generated by S is equal to 2^C.

Proof:

First, we want to prove $N(F) = 2^C$ where F is a free structure generated by Z^+. Let I^C be the cartesian product of $2^{\aleph_0}$ copies of I, then $N(I^C) = C^C = (2^{\aleph_0})^C = 2^C$, and furthermore I^C has a countable dense set D. Let $\varphi: Z^+ \to D$ be a surjection ; ϕ is continuous so it is extendable to $\hat{\phi}: F \to I^C$, Since F is compact Hausdorff, $\hat{\phi}(F)$ is a closed set containing D; consequently $\hat{\phi}$ is also surjective and therefore we have $N(F) \geq 2^C$. However, there are $C^{\aleph_0} = C$ maps of Z^+ into I, and F is a subspace of I^C; thus $N(F) \leq 2^C$ and it is proved. This proof is due to J. Mrowka. Next, for $Z^+ \cong S$, it follows from Thm.5 that F is homeomorphic to G. Hence, $N(G) = N(F) = 2^C$.

Theorem 7:

If $[0,1]$ is the subspace of E' and let $R = \{\text{rational numbers} \in [0,1]\}$ and

$I = \{$irrational numbers $\in [0,1]\}$, then there exist free structures $([0,1], f)$ and $([0,1], g)$ on R and I respectively.

Proof:

Since $[0,1]$ is a metric space, hence the subspaces R and I are completely reqular spaces. Hence we have the free structures $([0,1], f)$ and $([0,], g)$ on R and I respectively. By Thm. 3.

Note:

In the theory of the free group, we can define the rank to be a common number i.e. the number of elements in any set which freely generates F. The resource of this common number comes from a theorem statea as follows:

Let F be a free group. Suppose X and Y both freely generate F. If $|X|$ ($|X|$ = the number if elements of X) is finite, then so is $|Y|$ and $|X| = |Y|$. But, we cannot have a common number from the above theorem.

Theorem 8:

If $\{P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n\} = P$ is a subspace of E', then there exists a free structure F generated by P.

Proof:

Since P is ginite subspace of E', so P is a closed metric subspace, it follows that there exists a free structure F and $F = P$.

Note:

In the theory of the free group, we have a theorem stated as follows:

The number of elements of X is infinite.

Theorem: 9:

There is a functor foom the category of completely regular spaces with homeomorphism $(P, \theta) = \{f \mid f: P \to Q$ and f is continuous$\}$ to the category α of a compact Hausdorff spaces with Homeomorphism $(P, \theta) = \{f \mid f: P \to Q$ and f is continuous.$\}$

Proof:

Define a functor $g: \delta \to \alpha$ as follows; for each complete; u regular space $X \in \delta$, let $g(X)$ denote the free structure generated by X. On the other hand, for each continuous function $\partial : X \to Y \subset g(Y)$ in δ, let $g(\partial)$ denote the unique continuous function $\partial^* : g(X) \to g(Y) \ni \delta^*/X = \partial$.

One can easily verify that g is covariant functor.

Note:

In the theory of the free group. there is a functor from the category S of sets and the category α of Abelian groups.

The application of the idea of the free structure

X is a noncompact completely regular space. It can be embedded in a compact methods:

1) The Stone-Cech compactification of X. In other words, we can have a free structure on X.
2) The P. Alexandroff's one-point compactification of X.

Now, I will discuss some relations between $\overline{\rho(X)}$ and $\hat{X}$ with the idea of the free structure when X is locally compact space, where $\overline{\rho(X)}$ is the free structure X and Y is compact space so that $Y - \{P\} \cong X$.

First, I will show an example about Z^+ with discrete topology.

Example, by theorem 3, $N(\overline{\rho(Z^+)}) = 2^c$. Since Z^+ is an infinite discrete topology, Z^+ is locally compact. Hence we can have a compact space $\hat{Z}^+ \ni \hat{Z}^+ - \{P\} \cong Z^+$; but $N(\hat{Z}^+) = a + 1$, then $\overline{\rho(Z^+)}$ is not homeomorphic to $\hat{Z}^+$.

Next, I will prove a long theorem given by me.

Theorem 10:

Let X be locally compact and f be a homeomorphism of X into a compact space Y such that $Y - \{p\} \cong X$. Prove:

1) The Stone-Cech extension $F: \overline{\rho(X)} \to Y$ sends $(\overline{\rho(X)})X$ into $Y - f(X)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "f"'] & \overline{\rho(X)} \arrow[d, dashed, "F"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

2) F is a surjection.
3) F is an identification.
4) $\overline{\rho(X)}/K(F)$ is compact.
5) $\overline{\rho(X)}/K(F) \cong Y$.
6) If Y is another compact soaue such that $Y' - \{p'\} \cong X$, then $\overline{\rho(X)}/K(F) \cong \overline{\rho(X)}/K(F')$, where F' is the Stone-Cech extension from $\overline{\rho(X)}$ to Y'.
7) If any two compacts spaces X and Y having the property: a locally compact space X can beembedded in a compact space $\hat{X}$ $(\hat{Y})$ so that $\hat{X} - X(\hat{Y} - X)$ is a single point are homeomorphic.
8) F is a perfect map.

Proof:

1) It is proved by ex.7 P. 256 reference 1.
2) By (1) and $Y - \{p\} \cong X$, F is a surjection.
3) Since F is continuous surjection, and it is closed map (because F is continuous from a compact space $\overline{\rho(X)}$ to a compact space Y.) F is an identification.
4) $F : \overline{\rho(X)} \to Y$ is continuous , hence F can be factored as $\overline{\rho(X)} \xrightarrow{p} \overline{\rho(X)}/K(F) \to Y$; where p and q are continuous, p is surjective, q is injective. From q, we know $\overline{\rho(X)}/K(F)$ is Hausdorff space. From p, we know $\overline{\rho(X)}/K(F)$ is a compact space.
5) By (4), $q : \overline{\rho(X)}/K(F) \to Y$ and $F = q \circ p$. Because F is onto, hence q

is is onto, but by (4) q is injective, hence q is a continuous bijection from a compact space $\overline{\rho(X)}/K(F)$ to a compact space Y, then $\overline{\rho(X)}/K(F) \cong Y$.
6) I will prove it by the diagram:

$$\begin{tikzcd} & y' & & \rho(z)/K(F') \arrow[ll, "F'P'^{-1}"'] \\ X \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "f"'] & & \overline{\rho(X)} \arrow[ul, "F"'] \arrow[dl, "F"] \arrow[ur, "P'"] \arrow[dr, "p"'] & \\ & Y & & P(X)/K(F) \arrow[ll, "FP^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Because $p : \overline{\rho(X)} \to \overline{\rho(X)}/K(F)$ is an identification and $p' : \overline{\rho(X)} \to \overline{\rho(X)}/K(F)$ is continuous and $p'p^{-1}$ is single valued, hence $p'p^{-1}$ is continuous. (where $p'p^{-1}$ is single valued means p' is constant on $p^{-1}(Y)$).
Since F sends $\overline{\rho(X)} - X$ to a point y and F' sends $\overline{\rho(X)} - X$ to a point y', hence $p'p^{-1}$ is bijective. Moreover, $\overline{\rho(X)}/K(F)$ and $\overline{\rho(X)}/K(F')$ are compact, hence $p'p^{-1}$ is a homeo. from $\overline{\rho(X)}/K(F)$ onto $\overline{\rho(X)}/K(F')$.
Therefore $\overline{\rho(X)}/K(F) \cong \overline{\rho(X)}/K(F')$.
7) By (6) $X = Y$.
8) Since F is a continuous closed map, and $F^{-1}(y)$is compact for each $y \in Y$, then F is perfect map. The reason $F^{-1}(y)$ is compact for each $y \in Y$ is y $\{y\}$ is closed in Y and $F^{-1}(y)$ is closed in the compact space $\overline{\rho(X)}$.

In fact, 2,3,4,5, can be derived from Thm.4, but I can also prove it form 1.
By this theorem, I specially want to mention about 3,5,6,8.
Because F is an identification, we can have a better look at the relations between the properties of $\overline{\rho(X)}$ and that of Y, for instance, if $\overline{\rho(X)}$ is locally connected, so is Y and we can create something because of many applications of the identification . Because $\overline{\rho(X)}/K(F) = Y$, it gives us a wonderful look at the relation between $\overline{\rho(X)}$ and Y.

Because of 6, it gives us a different proof to the second part of P. Alexandroff's one-point compactification.

Because F is a percent map, I want to show something important about the relations between $\overline{\rho(X)}$ and Y.

By the theorems of the perfect map, I have some theorems stated as follows:

1) If $\overline{\rho(X)}$ is metrizable $\Rightarrow$ Y is metrizable.

2) If $\overline{\rho(X)}$ is 2 countable $\Rightarrow$ Y is 2^0 countable.

3) If Y is Lindelof $\Rightarrow \overline{\rho(X)}$ is Lindelof.

4) If Y is Lindelof $\Rightarrow \overline{\rho(X)} x Y$ is Lindelof.

By the theorem: Let X be locally compact. Then it's one-point compactification Y is metrizable if and only if X is 2 countable , We have.

5) If $\overline{\rho(X)}$ is metrizable $\Rightarrow$ X is 2 countable.

6) If X is 2^0 countable $\Rightarrow$ $\overline{\rho(X)}$ is regular Lindelof.

Proof:

Since X is 2^0 countable, Y is metrizable. By Y is metric compact, Y is regular Lindelof and paracompact, hence $\overline{\rho(X)}$ is regular Lindelof because of F is a perfect map.

In the book, General Topology, there is a relation is defined as follows:

A relation is defined on the collection of all compacticfications of a space X by agreeing that $(f,Y) \geq (g,Z)$ if there is a continuous map h of Y onto Z such that hof = g. By this definition the collection of all compacticfications of a topological space is partially ordered by $\geq$.

Now, I have two theorems proved as follows:

1) If $\overline{\rho(X)}$ id metrizable, then all compactifications of X are metrizable.

Proof: Since there is a unique continuous closed surjection $F : \overline{\rho(X)} \longrightarrow Y$ where Y is compactification of X, Hence Y is metrizable because F is a perfect map.

2) If the one point compactification X' of X is Lindelof, then all the compactifications of X are Lindelof.

Proof: Since there is a unique continuous closed surjection $F : \overline{\rho(X)} \longrightarrow X'$, hence $\overline{\rho(X)}$ is Lindelof because of (3). But, there is a unique continuous closed surjection $F' : \overline{\rho(X)} \longrightarrow Y$ for every compactification of X, hence Y is Lindelof.

References:

1) J. Dugundji : Topology, Allyn and Bacon, Boston, 1965.
2) Kelly, General Topology
3) Sze-Tsen Hu Elements of Modern Algebra 1965.
4) Saunders Maclane and Garrett Birkhoff: Algebra 1967.
5) Rotman, J.J. The theory of Groups, An introduction, Allyn and Bacon, 1965.
6) Kurosh A. The theory of Groups, Translated by K.A.Hirsch, Chelsea, 1960.

NOTES ON THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

—THE FUNDAMENTAL THEOREM—

數二 于 靖

In the introductory course on differential equations which we attended at our department, we had assumed without proof the fundamental theorem, so called the existence and uniqueness theorem for initial value problems. The goal of this article is to fill this serious gap. In view of the general theory of differential caculus which I discussed in another article of the present annals, this fundamental theorem can be formulated and proved with not extra cost for differential equations defined by : $\frac{dd}{dt} = F(t, \alpha)$, $F: I \times A \rightarrow W$, where I, as usual, an interval of real numbers but A is an open subset of some arbitrary Banach Space W instead of R or R^n.

Roughly speaking this theorem plays the same role in theory of differential equations as the fundamental theorem of algebra in classical algebra which asserts that a polynomial of the nth degree always has exactly n complex roots (counted according to multiplicities). But it turns out that every differential equations has a "continuous" of solutions and consequently the question to be posed does not concern the number of solutions but rather how the set of all solutions of a given differential equation can be described. We are going to see that if F has a continuous second partial differential, then there exists a uniquely determined "Local solution" through any point $(t_0, \alpha_0) \in I \times A$.

Traditionally this theorem is proved by the so called "Picard's method of successive aproximations". The idea of successive approximation is familiar one if you still remember the Newton's method for locating roots of polynomials in high school. It goes this way: For justification of the unique existence of something which can't be found directly, we first find another definite object and then modify it to better and better approximations, thereby we get a convergent sequence. although no term of this sequence is what we want, it's limit might turn out to be exectly what long for. As the theory of complete metric spaces and Banach Spaces growing up, it becomes clear that this Picard's method should be interpreted as a special case of the more general one know as Banach's contraction mapping fixed-point principle which I have already proved in the article "differential calculus" part II . Hence the approach here to the fundamental theorem is through an elegant application of Banach's theorem instead of the more tedious classical one by picard.

§ I LOCAL SOLUTIONS

The first step is to reduce an initial value problem for differential equation to an integral equation.

Before doing so we must develope an integration process for funciions defined on an real interval but taking values on arbitrary Banach Space . However, this process is essentially the same as the ordinary Riemamm Integration in elementary calculus for real valued functions of a single real variable . Therefore I shall sketch only those vital steps in the construction of such an integral.

We may easily define what naturally called step functions from $I = [a, b]$ to some fixed but arbitrary Banach Space W with respect to a partition of $[a, b]$. For such functions we may form their "Riemann Sums" as well. It's trivial to see that the set of all step functions constitute a subspace S of the set of all bounded functions from $[a, b]$ to W which is in fact a Banach Space if we take sup norm. Now, the Riemann Sum becomes a continuous linear mapping from S to W and if we apply the elementary linear extension theorem of Banach Space theory to this mapping what we get is a continuous linear mapping from $\overline{S}$ to W. The important thing to note here is that $\overline{S}$ will contain all the continuous functions from $[a, b]$ to W. The value of $f \in \overline{S}$ under this mapping will be denoted by $\int_a^b f(t)dt$

Even W is arbitrary abstract Banach Space, the so called fundamental theorem of calculus is still with us. It reads as follows:

If f is continuous from $[a, b]$ to W, the function F defined by $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ is then differentiable for every $x \in [a, b]$, moreover if we use $F'(x)$ to denote the unique directional derivative of X in W the famous identity $F'(x)=f(x)$ survives.

Now we are in a position to "integrate" an initial value problem.

Let I be open interval in R, A be an open subset of Banach Space W and let $F : I \times A \to W$ be continuous.

We want to study $\frac{d\alpha}{dt} = F(t, \alpha)$. By a solution of this equation we mean $f : J \to A$, where J is some open subinterval of I, such that $f'(t)$ exists and $f'(t) = F(t, f(t))$ for every t. Note that $f'(t)$ is the unique directional derivative of f at t whose existence is entirely equivalent to the condition that $f \in D_t(R,W)$ consequently $f(t)$ must also be a continuous function on $[a,b]$. More than that, since F is continuous and $f'(t) = F(t, f(t))$ it follows f' is also continuous. Thus a solution f is in fact a continuous by differentiable function on $[a.b]$.

Suppose f is such a solution satisfying initial condition (t_0, α_0) then an integration gives us:

$$\forall t \in J,\ f(t) - f(t_0) = \int_{t_0}^{t} F(S, f(s))ds,\ f(t) = \alpha_0 + \int_{t_0}^{t} F(S, f(s))ds$$

Conversely if f satisfy above "integral equation" it follows $f'(t) = F(t, f(t))$, by the fundamental theorem of calculus. Consequently f becomes the desired solution.

In other words f on J through (t_0, α_0) is a solution if and only if f is a fixed function under the integral transform:

$$K : (f : J \to A) \mapsto (g : J \to W) \text{ defined by } g(t) = \alpha_0 + \int_{t_0}^{t} F(S, f(s))ds$$

Thinking of the basic fact that the set of all bounded continuous functions from (c, d) to W is also a Banach Space under sup norm, the above observations suggest us that if we can prove this integral transform K determined by F and $(t_0\ \alpha_0)$ is really a contraction i.e. a Lipschitz mapping with constant less than 1, we will be able to conclude the unique existence of solution for our initial value problem from the famous Banach's theorem.

To this end, we must impose more stronger conbition on F then mere continuity: local uniform Lipschitz continuity of the second variable. By this we mean that for any point $(t_0, \alpha_0) \in I \times A$ there is a neighborhood $M \times N$ and a constant b such that $\|F(t, \xi) - F(t, \eta)\| \leq b \|\xi - \eta\|$ for all $t \in M$ and all $\xi, \eta \in N$

Theorem I The Fundamental Theorem.

Let A be an open subset of a Banach Space W, let I be an open interval in R, and let F be a continuous mapping from $I \times A$ to W which is locally uniformly Lipschitz in it's second variable.

Then for any point $(t_0, \alpha_0) \in I \times A$ and any sufficiently small interval neighborhood J of t_0, there is a unique solution from J to A passing through (t_0, α_0).

Proof:

First, we proceed to show that for any point $(t_0, \alpha_0) \in I \times A$, for some neighborhood U of α_0 and for any sufficiently small interval J containing t_0, there is a unique function from J to U which is a solution of the differential equation passing through (t_0, α_0). What we will apply is not Banach's theorem itself but one of it's natural corollary concerning a sufficient condition for a contraction from an open ball to the whole space to have a unique fixed point. This corollary has also been proved in "Differential Calculus" Part II.

We start by choosing a neighborhood where, in some sense, we can control the crucial behavior of F, i.e. a neighborhood LX Br (α_0) of (t_0, α_0) on which $F(t,\alpha)$ is bounded by constant M and lipschitz in α with constant C independent of t. Let J be some open subinterval of L containing to with length $\delta < \frac{r}{m+cr}$, and let B be the Banach Space of bounded continuous functions from J to W. We consider the ball of functions Br (f_{α_0}) in B where f_{α_0} is the constant function with value α_0, any f in this ball has it's range in Br (α_0), so that $F(t, f(t))$ is defined, bounded, and continuous a fortiori integrable. Therefore the integral transform K defined earlier maps $Br(f_{\alpha_0})$ into B. It's contractability is shown below:

$$\|K(f_1)-K(f_2)\| = \operatorname{Sup}\{\|\int_{t_0}^{t} [F(S, f_1(s))-F(S, f_2(s))]\, ds\|\} \quad t\in J$$

$$\leq \operatorname{Sup}\{\|F(S, f_1(s))-F(S, f_2(s))\|\}\cdot\delta, \quad S\in[t_0, t], t\in J,$$

$$\leq \delta C\cdot \operatorname{Sup}\{\|f_1(s)-f_2(s)\|\} = \delta C\|f_1-f_2\|.$$

Since $\delta < \frac{r}{m+cr}$ it follows $\delta C < 1$, consequently K is a contraction.

Moreover this contraction moves the center f_{α_0} a distance less then $(1-\delta C)r$ so that Banach's corollary is applicable:

$$\|K(f_{\alpha_0})-f_{\alpha_0}\| = \operatorname{Sup}\{\|\int_{t_0}^{t} F(S, \alpha_0)\, ds\|\} \leq \delta m < (1-\delta C)\gamma$$

Next we try to remove the restriction above on the range, all we have to show is that the uniqueness of solutions has nothing to do with it's range: If g_1 and g_2 are any two solutions of $\frac{d\alpha}{dt} = F(t,\alpha)$ through (t_0, α_0), then $g_1(t) = g_2(t)$ for all t in the intersection $J = J_1 \cap J_2$ of their domains. This fact depends vitally on the completeness of R. It's proof is an "old story" arguing at the greatest lower bound of some crucial set of real numbers contending if what we want to prove is not true then the greatest lower bound is no more itself:

Suppose on the contrary there is a point s in J such that $g_1(s) \neq g_2(s)$.

If $s > t_0$, let $x = \inf\{t \mid t > t_0 \text{ and } g_1(t) \neq g_2(t)\}$, then $g_1(x) = g_2(x)$, since g_1, g_2 are continuous. Denote this common value by α and then apply our former unique existence conclusion to (x, α). By choosing sufficiently small δ we have a unique solution g from $(x-\delta, x+\delta)$ to $Br'(\alpha) \subset Br(\alpha_0)$ and if δ is really small enough the restriction of g_1 and g_2 to $(x-\delta, x+\delta)$ will also have their range in $Br'(\alpha)$ since they are both continuously passing through (x, α), Thus $g_1 = g_2 = g$ on $(x-\delta, x+\delta)$ contradicts to the definition of x as a greatest lower bound.

If $S < t_0$, we can use sup instead of inf and argue similarly. ∎

In concluding this section we must emphasize that this fundamental theorem like all other important foundational results in analysis belongs to the deepest implications of the completeness of underlying spaces, which in a sense simply tells us that all the points ought to be there are really there and therefore we can pick out what we want.

§ II FROM LOCAL SOLUTION TO GLOLOL SOLUTION

The solutions which we have found until now are defined only in sufficiently small neighborhood of the initial point t. Accordingly they are called local solution. If we run along to a point (t_1, α_1) near the end of such a local solution and then consider the local solution about (t_0, α_0), first of all it will have to agree with the first solution on the intersection of their domains as we have seen in section I. Secondly it will in general extend farther beyond t, than the first solution so that the two solutions will fit together to make a solution on a larger domain. Continuing in this way we might be able to extend our original solution to what called a global solution, made up of a patchwork of matching local solution.

For $(t_0, \alpha_0) \in I \times A$, let F denote the family of all solutions through (t_0, α_0), Any two of them must agree on the intersection of their domains. Therefore if we are taking these functions as set of ordered pairs, their union F is still a function, furthermore a solution, the unique maximal solution through (t_0, α_0). The global solutions which we interest are, of course, those maximal solutions having the whole I as domain. For their existence we must impose more stronger global conditions on F to ensure the continuation of matching process without stopping.

Theorem II.

Let W be a Banach Space and let I be an open interal in R.

Let $F : I \times W \to W$ be continuous and suppose that there is a continuous function $C : I \to R$ such that $\| F(t, \alpha_1) - F(t, \alpha_2) \| \leq C(t) \| \alpha_1 - \alpha_2 \|$ for all $t \in I$ and $\alpha_1, \alpha_1 \in W$.

Then every maximal solution of $\frac{d\alpha}{dt} = F(t, \alpha)$ has I as it's domain.

First, we go back to our original situations in Th 1, analyze how a maximal solution can fail to be a global solution. If g be such a maximal solution whose domain interval J has right-hand endpoint b less then that of I. Then as $t \to b$, the restriction on δ_t the length of local solution through (t, α), must go to zero. In other words, as to sufficiently close to b, the numbers r, m, c in Theorem 1 must satisfy $\frac{r}{m+cr} < \varepsilon$ for arbitrarily small ε. Hence, it's clear that if the conditions on F is strong enough to free δ from approaching zero then maximability will always imply globalness

The hypothes is in the present theorem for F is just what we need.

For if $A = W$, we have no restriction on R, the bound on δ then becomes $\frac{1}{c}$, a fixed value. If we now choose t_0 such that $b - t_0 < \frac{1}{c}$, we will have local solutions through t which helps us to extend g beyond b -- contradicts to the maximability of g. The justification for having these crucial local solutions at hand is seen in the behaviour of c also assumed in the hypothesis.

The actual proof is given below:

Suppose g, b as above, we choose a finite open interval I' containing b such that $\overline{I'} \subset I$. Since I' now is compact the continuous C has a maximal value C_0 on $\overline{I'}$. Let $t_1 \in I' \cap J$ such that $b - t_1 < \frac{1}{c_0}$ and we set $\alpha_1 = g(t_1)$ and $M = \mathrm{Max}\{\|F(t, \alpha_1)\|\}$ $t \in \overline{I'}$. Then the proof of Theorem I gives us a local solution f through (t_1, α_1) with domain $(t_1 - \delta, t_1 + \delta)$ for any S less then $\frac{1}{c}$, since we choose t_1 so that $t_1 + \frac{1}{c} > b$, we can now choose ∂ so that $t_1 + \delta > b$. Therefore we get the desired contradiction .

REMARKS

(1) We have claimed at the beginning that if F has a continuous second partial differential then there exists a uniquely determined local solution through any point $(t_0, \alpha_0) \in I \times A$. This follows easily from a theorem in "Differential Calculus" Part II where we call it generalized mean-value theorem, for according to this theorem such F satisfies local uniform Lipschity condition on it's second variable with a constand afforded by the bound on it's second differential.

(2) Our preceeding fundamental theorems are proved for so called first-order differential equations. As to nth order differential equations, there are similar results which can be proved by applying theorem 1, 2 to those equations on W^n which are essentially equivalent to the original nth order equations on W.

(3) As an example of functions satisfying the hypothesis on F in theorem 2. so that the differential equation defined by it always has global solutions, we metion the defining function of any familiar linear differential equation.

(4) Also we must note that all Banach Spaces we have considered are not necessarily real ones, they might be spaces over complex number system, Therefore our results also hold for complex differential equations.

References

1) W. Hurewice. Lectures on ordinary Differential Equations 1958.

2) L. S. Pontryagin. Ordinary Differential Equations 1960.
(translated from russian)

3) K. Yosida Lectures on Differential and Integral Equations 1960.

4) G. Birkhoff and G. Rota, Ordinary Differential Equations 1969.

5) L. H Loomis and S. Sternberg Advanced calculus 1968.

6) J. Rieudoune Foundations of Modern Analysis 1960.

ON LATTICE

數二 李征勳

On the topic, we'll, section, six paragraphs in general , but not into the details. The details will be found on "Algebra" by Saunders Mac Lane Garrett birkhoff

And on "Lecture on Modern Algebra" by p. Dubreil and M.L. Dubreil-jacotin. I'll be thankful for your reading and your suggestions wherever I am wrong. Now, let us begin.

§ I .POSET AND CHAIN

A poset S is a set on which there is defined an order relation, i.e. a binary relation with the properties

(i) Reflexivity $a \leq a, \quad a \in S$

(ii) Antisymmetry $a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b$

(iii) Transitivity $a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \leq c.$

We apply the notation $a \leq b$ and denote that "a is less than or equal to b".

A poset S is called to be a chain if we have either

$a \leq b$ or $b \leq a$ for $\forall\ a, b \in S.$

The notation $a < b$ means $a \leq b$ and $a \neq b$. Ifneither $a \leq b$ nor $b \leq a$ then we denote $a \| b$.

For the sake of convenience, we represent a poset S by means of a Hasse diagram.

Example 1. If S is any set, then the family of subsets p (S) of S is a poset under the ordinary inclusion ($\subseteq$).

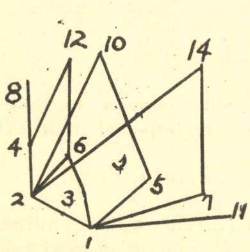
2. Let N = 1, 2, 3 .... n, ... be the set of natural numbers. then, we may define the same set to be in different ways.

(a) $p \leq q \Leftrightarrow \exists\ r \in N \ni pr = q$
(It is a poset, but not a chain).

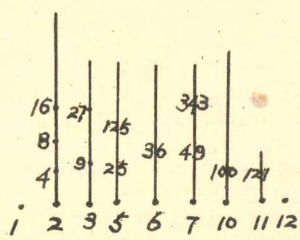
(b) $a < b \Leftrightarrow \exists$ a prime $p \ni a = p^s$ and $b = p^t \quad S < t$
(This is also a poset, but not a chain).

(c) $2p + 1 \leq 2q$ for $\forall$ p and $\forall$ q: $2p + 1 \leq 2q + 1 \Leftrightarrow p \leq q,\ 2p \leq 2S \Leftrightarrow p \geq S'$
(Clearly, it is a poset and a chain, also).

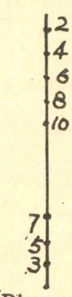
Hasse Diagram



(Diag. a)



(Diag. b)



(Diag. c)

(d) $F = \{ f(x) \mid X \in [0, 1]$ and f(x) is conti$\}$.
Then F is a chain by the relation $f \leq g \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\,d_x \leq \int_0^1 g(x)\,d_x$

Definition:

A greatest or universal element of a poset S is an element u such that $x \leq u \ \forall \ X \in S$. The same way; we may define a smallest or zero element.

A maximal element of S is an element $m \in XS \Leftrightarrow \exists X \in S \ni m < x$ (or $m \nless x, \forall X \in S$)

Minimal element $u \in S \Leftrightarrow \nexists \ x \in S) \ni x < u$

Note:

If greatest element (or smallest) element exists then it is unique. But a mimal (or a maximal) element, if it exists, is not necessarily unique, e.g. in P (E) - E the element E- $\{a\}$ ($\forall a \in E$) is maximal. But in P (E) - ϕ, the element $\{ \varepsilon \}$ where $a \in E$ is a minimal element.

Lemma:

Any finite non-empty subset X of a poset has minimal and maximal elements.

Theorem:

Every finite chain^S of n elements is isomorphic to the ordered set n.

Proof:

Here $\bar{n} = \{ 1, 2, 3 \ldots . n \}$.

By the lemma, $S = \{ a_1, a_2 \ldots . a_n \}$, we may arrange

$S = \{ x_1, x_2, x_3 \ldots . x_n \}$ where $X_i < X_k$ if $i < K$. (Why).

Then, we define $f : S \to n$ to be a mapping

defined $f(X_k) = K$ for $1 \leq K \leq n$. Hence f is isomorphic

§ 2. LATTICE

Definition:

A sup semilattice is a poset in which any two elements a and b always have a smallest upper bound. We call this smallest upper bound the union of a and b, and denote it by sup (a, b) or by $a \vee b$.

Example: 1. In p (E) (E is a set) ordered by inclusion, we define sup $(A, B) = A \vee B$. Clearly. p (E) is a sup semilattice. But if F = p (E) - E. and sup $(A, B) = A \vee B$. then F is not a sup semilattice. (Why).

2. Let $N = \{ 1, 2, 3 \ldots . n \ldots . \}$. $p. q \in N$, $p \leq q \Leftrightarrow \exists r \in N \ni pr = q$. Then N is sup semilattice if sup (p.q) = l.c.m. (p.q)

Theorem:

In a sup semilattice any finite subset has a smallest upper bound.

It is easy to prove by mathematical induction.

Definition:

A complete sup semilattice is a sup semilattice in which any subset T has a smallest upper bound and denotes it by sup T

For example, in p (E), any family of elements A_i ($A_i \subseteq E$) has a least upper bound, namely the set-theoretic union of these subsets $\sup A_i = \{ X : X \in E, \exists i \in I, X \in A_i \} = \cup A_i$

Evidently. p (E) is a complete sup semilattice.

N the natural number isn't a complete sup semilattice, is it?

Definition:

A inf semilattice S is a poset $\Leftrightarrow \forall a, b \in S$, a and b possess a largest lower found. And we denote it by inf (a,b) or by $a \wedge b$. A Complete inf semilattice is defined as above.

Example: 1. At paragraph 2. example 2. Let inf (p.q) = g.c.d. (p.q).
Then N is an inf semilattice.

2. Is the set F = p (E) - ϕ an inf semilattice, let inf $(A, B) = A \cap B$?

3. p (E) is a complete inf semilattice, while the chain of real numbers, $\left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\}$, under the usual ordering, is not. (Why?)

Definition:

A lattice S $\leftrightarrow$ S is a sup semilattice and an inf semilattice. A complete lattice $\Leftrightarrow$ S is a complete sup semilattice and a complete inf semilattice.

Note:

If S is a lattice, but $S' \subseteq S$ need not be necessarily a lattice. (Why?)

We say that two posets S and S* are isomorphic if there is a bijection of S onto S* such that each of the relations $a \leq b$, $\alpha(a) \leq \alpha(b)$ implies the other.

Lemma:

If E and E* are two isomorphic posets, a set $A \subset S$ has a smallest upper bound S or greatest lower bound i so is the iwage α (S) and α (i), respectively, in E*.

Theorem:

Any complete sup (inf) semilattice A with a smallest element o (greatest element u) is a complete lattice.

Proof:

Let A be a complete sup semilattics and $S \subseteq A$.

The set L of lower bound of S in A. Then $L \neq \phi$ since $o \in L$. L is a subset of A and has a smallest upper bound, say l.

If $\forall S \in S$, then $m \leq S$ for $\forall m \in L$. Hence S is an upper bound of L, so $l \leq S$, This implies that l is the greatest lower bound of S. Since S is any subset of A. So A is a complete inf semilattice. Accordingly, A is a complete lattice

Example: 1. A Moore family F of subsets of set E is a complete inf semilattice with E as universal element. By the theorem, we deduce F is a complete lattice.

Remark:

Moore family

A family $\bar{F}$ of subsets of a non-empty set E is called a Moore family if $\bar{F}$ possesses the following properties:

M_1: $E \in \bar{F}$; M_2: if $\bar{F}' \subseteq \bar{F}$, then $\bigcap_{F \in F'} F \in \bar{F}$

In this complete lattice, the smallest upper bound of a subset $\bar{F}'$ of $\bar{F}$, i.e. sup S' is formed as follows Let $u = \{M: M \in F,\ S \subseteq M,\ \forall S \in F'\}$

Then, we have sup S = inf M = $\bigcap_{M \in U} M$

2. The subsemigroups S of a semigroup form a Moore family, and hence a complete lattice, in which inf $(S_1, S_2) = S_1 \cap S_2$. sup $(S_1, S_2) = \overline{S_1 \cup S_2}$ where $\overline{S_1 \cup S_2}$ is the semigroup generated by $S_1 \cup S_2$.

3. The subgroups H of a group form a Moore family, and hence a complete lattice, in which inf $(H_1, H_2) = H_1 \cap H_2$. sup $(H_1, H_2) = \overline{H_1 \cup H_2}$, where $\overline{H_1 \cup H_2}$ is the join of H_1 and H_2.

In topology the name filter is a family $\bar{F}$ of subsets of E with the three properties

(i) $F_1 \in \bar{F}$, $F_2 \in \bar{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in F$

(ii) $F \in \bar{F}$ $x \supseteq F \Rightarrow x \in \bar{F}$

(iii) $\phi \notin F$

Hence, a filter is not P (E) since $\phi \notin p(E)$

We call p (E) to be an improper filter.

Theorem:

The filters of E, together with p (E) form a Moore family.

Proof:

Let $T = \{\bar{T}: \bar{T}$ is a filter of E$\} \cup \{p(E)\}$.

Then (M_1): $p(E) \in T$

(M_2): If $T' \subseteq T$, then $\bigcap_{\bar{T} \in T'} \bar{T}$ must be a filter of E.

(Why?) According. T is a Moore family

We call this family the Moore family of filters.

Consider any two filters $\bar{F}_1, \bar{F}_2$. Let $\bar{F} = \inf(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ is the intersection of these two families in p (E)

Let $\varphi = \{F_1 \cup F_2 : F_1 \in \bar{F}_1 \; F_2 \in \bar{F}_2\}$

To see this, we note $F_1 \cup F_2 \supseteq F_1 \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \bar{F}_1$ while $F_1 \cup F_2 \supseteq F_2$

$\Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \bar{F}_2 \Rightarrow \phi \leq \bar{F}$ ·········(1)

Conversely, if $F \in F$, then $F = \bar{F} \cup \bar{F} \in \phi \quad \bar{F} \subset \phi$······(2)

From (1) and (2), we deduce $\bar{F} = \phi$

Let sup $(\bar{F}_1 \bar{F}_2) = \bar{F}$ is the pet which is the Union of $\bar{F}$ and $\bar{F}_2$

Then $T = \sup(\bar{F}_1 \bar{F}_2) = \{F_1 \cap F_2 : F_1 \in \bar{F}_1 \; F_2 \in \bar{F}_2\}$

Since this fieter is closed under intersection, so

$(F_1 \cap F_2) \cup X = (F_2 \cup X) \cap (F_1 \cup X), \quad \forall X \in P(E)$

According the Moore family of filters forms a complete lattice.

Note:

sup $(\bar{F}_1 \bar{F}_2) = p(E)$ i.e. improper fieter if and only if $F_1 \cap F_2 = \phi$ for some $F_1 \in \bar{F}_1$, and $F_2 \in \bar{F}_2$

§3. DISIRIBUTIVE AND COMPLEMENTED LATTICE

The operation is distributive with respect to each other.

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

Definition:

A distributive lattice is a lattice in which each operation is distributive.

Duality principle:

$$A = [a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)] \;=\; [a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)] = B$$

Proof:

Here, we only prove $A \Rightarrow B$. And $B \Rightarrow A$ remains.

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= [(a \vee b) \wedge a] \vee [(a \vee b) \wedge c] \\ &= a \vee [(a \vee b) \wedge c] = a \vee [a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \\ &= [a \vee (a \wedge c)] \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)\end{aligned}$$

Theorem:

The lattice of filters of a set E is distributive.

Proof:

Suppose that F_1, F_2, F_3 are any three filters of E.

Then we have $F_1 \wedge (F_2 \vee F_3) = \{F_1 \cup (F_2 \cap F_3) : F_i \in F_{i, i=1,2,3}\}$

But $F_1 \cup (F_2 \cap F_3) = (F_1 \cup F_2) \cap (F_1 \cup F_3)$ then it follows

$F_1 \wedge (F_2 \vee F_3) \quad (F_1 \vee F_2) \wedge (F_1 \vee F_3)$. $\qquad F_1 \wedge (F_2 \vee F_3) \leq (F_1 \vee F_2) \wedge (F_1 \vee F_3)$ ·········(1)

On the other hand, in any lattice

$(F_1 \vee F_2) \wedge (F_1 \vee F_3) \leq F_1 \wedge (F_2 \vee F_3)$ ·········(2)

From (1) and (2) we deduce that $F_1 \wedge (F_2 \vee F_3) = (F_1 \wedge F_2) \vee (F_1 \vee F_3)$

Hence, the lattice of filters of a set E is distributive.

Example: 1. $N = \{1, 2, 3 \cdots n, \cdots\}$ Let $p \vee q = \text{l.c.m.}(p.q)$

$p \wedge q = \text{g.c.d.}(p.q)$

The lattice is a distributive lattice.

2. Any sublattice of a distributive lattice is a distributive lattice, also.

3. Any distributive lattice possesses the condition

$$\left.\begin{aligned} c \wedge a &= c \wedge b \\ c \vee a &= c \vee b \end{aligned}\right. = \; a = b$$

Proof:
$$\left.\begin{aligned} a &= a \vee (c \wedge a) = (a \vee c) \wedge (a \vee b) \\ b &= b \vee (c \wedge b) = (b \vee c) \wedge (b \vee a) \end{aligned}\right\} = \; a = b$$

4. The product lattice of two distributive lattices is distributive.

Proof:

Let F_1, F_2 are two distributive lattices

$T_1 \times T_2 = \{(a_1, a_2) : a_1 \in T_1, a_2 \in T_2\}$

$(a_1, a_2) \wedge (a_3, a_4) = (a_1 \wedge a_3, a_2 \wedge a_4)$; $(a_1, a_2) \vee (a_3, a_4) = (a_1 \vee a_3, a_2 \vee a_4)$

Therefore

$(a_1, a_2) \wedge \{(a_3, a_4) \vee (a_5, a_6)\} = (a_1, a_2) \wedge \{(a_3 \vee a_5), (a_4 \vee a_6)\}$

$=\{a_1\wedge(a_3\vee a_5), a_2\wedge(a_4\vee a_6)\}=\{(a_1\wedge a_3)\vee(a_1\wedge a_5), (a_2\wedge a_4)\vee(a_2\wedge a_6)\}$

$=(a_1\wedge a_3, a_2\wedge a_4)\vee(a_1\wedge a_5, a_2\wedge a_6)=\{(a_1,a_2)\wedge(a_3,a_4)\}\vee\{(a_1,a_2)\wedge(a_5,a_6)$.

In a latticeS, let Z be the zero element, u be the universal element. $a'\in S$ is called complement of an element a if $a\wedge a'=Z \quad a\vee a'=U$

Theorem:

In a distributive lattice, if complements exist, then they are unique.

Proof:

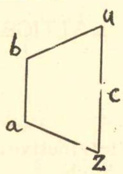
If b, c are two complements of a, then

$$\left.\begin{matrix} a\wedge b=Z=a\wedge c \\ a\vee b=U=a\vee c \end{matrix}\right\} = \ b=c. \ (\text{By } 3.\ \text{Ex}3)$$

Remark:

In the lattice, complement is not necessarily unique.

As following:



(1)

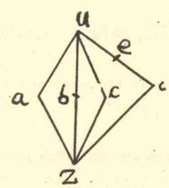


Figure (I) C has two complements a and b.

Figure (II) a has complements b.c.d.e. d has complements a.b.c. but d and e are not complements each other.

Definition:

A complemented lattice is a lattice with zero element and a universal element in which each element has at least one complement.

Theorem:

The product of two complemented lattices is a complemented lattice.

Example: 1. If E is any set then the lattice p (E) is complemented. since every set $A\subseteq E$, E–A is complement of A.

2. The lattice formed by the filters of an infinite set E and p (E) is not complemented.

Proof: First, we have $\{E\}$ as zero element and p (E) as universal. Let K be a filter consisting of the complements of the finite subsets of E. And suppose $\bar{K}$ the filter to be a complement of K. Then any element H of K must be such that $H\cup F=E$, $\forall F\in K$, so that H must contain E–F for $\forall F\in K$ Thus H must contain all the finite subsets of E, and, in particular, any element of E. Thus H = E and K = $\{E\}$ But $\{E\}\vee\bar{K}=\bar{K}\neq P(E)$ This inplies that K hasn't a complement. Hence, the lattice of filters is not complemented.

§4. BOOLEAN LATTICE AND BOOLEAN RING

Definition:

A Boolean lattice is one which is both complemented and distributive.

Theorem:

In a Boolean lattice

$(a\wedge b)'=a'\vee b', \ (a\vee b)'=a'\wedge b'$

Proof:

$$\begin{cases} (a\wedge b)\wedge(a'\vee b')=(a\wedge b\wedge a')\vee(a\wedge b\wedge b')=z\vee z=z \\ (a\wedge b)\vee(a'\vee b')=(a\vee a'\vee b')\wedge(b\vee a'\vee b')=u\vee u=z \end{cases}$$

Hence, $(a\wedge b)'=a'\vee b'$

Similarly, we can prove $(a\vee b)'=a'\wedge b'$.

Example: 1. All the lattices consisting only two element a, b with $a < b$ are all Boolean lattice.

2. Let $T = \{ (X_1, X_2 \cdots X_n) \mid X_i \in T_i \}$ $\quad T_i = \{ a_i, b_i \mid a_i < b_i \}$

Then T is a Boolean lattice.

Let $N = \{ 1, 2, 3 \cdots\cdots n \}$, then T is isomorphic to the lattice $p(\overline{N})$.

Proof:

We set up a bijection of T onto $p(\overline{N})$ by assoriating with $x \in T$ the subset Bx of $\overline{N}$ consisting of the suffixes i of whose components x_i of x for which $x_i = b_i$ (i.e. $B \subseteq \overline{N}$ there is associated $x \in T$ defined by $\begin{cases} X_i = b_i & \text{if } i \in B \\ X_i = a_i & \text{if } i \notin B \end{cases}$

Futher, we have $x \leq y$ if and only if $B_x \subset B_y$

Theorem:

With suitable definitions of addition and multiplication, Boolean lattice is an idempotent commutative ring with an identity element.

Proof:

Let us consider the internal composition laws defined in the Boolean lattice by.

$$a + b = (a' \wedge b') \vee (a \wedge b) \quad ab = a \vee b$$

Using the distributirity. we have first.

$$a + b = (a' \wedge b') \vee (a \wedge b) = [(a' \wedge b') \vee a] \wedge [(a' \wedge b') \vee b]$$

$= (b' \vee a) \wedge (a' \vee b)$; from this, it's clear that this addition is commutative. Secondly. we will show that it's associative.

$$(a+b)+c = \{[(a \wedge b') \vee (a' \wedge b)] \wedge c'\} \vee \{[(a' \wedge b') \vee (a \wedge b)] \wedge c\}$$

$$= (a \wedge b' \wedge c') \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge b' \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

$$a + (b+c) = \{a' \wedge [(b \wedge c') \vee (b' \wedge c)]\} \vee \{a \wedge [(b' \wedge c') \vee (b \wedge c)]\}$$

$$= (a' \wedge b \wedge c') \vee (a' b' \wedge c) \vee (a \wedge b' \wedge c') \vee (a \wedge b \wedge c)$$

$\therefore (a+b)+c = a+(b+c)$ for $\forall$ a, b, c.

$a + u = (a' \wedge z) \vee (a \wedge u) = z \vee a = a$ for $\forall a$.

This implies that is a zero element for this addition this shows that every element is involuntary Accordingly, we have shown that this addition is satisfying that all conditions for an abelian group. So the lattice is an abelian group.

In fact, we set $ab = a \vee b \Rightarrow (ab)C = a(bc)$, clearly, Now, we, finally, must verify that this multiplication distributive over addition.

$$ac + bc = (a \vee c) + (b \vee c) = \{(a \vee c)' \vee (b \vee c)\} \wedge \{(a \vee c) \vee (b \vee c)'\}$$

$$= (a' \vee b \vee c) \wedge (a \vee b' \vee c) = [(a' \vee b) \wedge (a \vee b')] \vee c$$

$$= (a+b) \vee c = (a+b)c$$

Thus, under the above laws of addition and multiplication, we have finished these hypotheses.

We call this ring to be a Boolean Ring.

Discussion:

If we set up $a + b = (a' \vee b') \wedge (a \vee b) = (a' \wedge b) \vee (a \wedge b')$

And $ab = a \wedge b$. then T is also a Boolean Ring. (Why?)

Pheorem:

From above theorem, the ideals of the Boolean Ring · are closed under the operation $\wedge$

Proof:

We remind the definition of an ideal F of T being an additive subgroup and a subset permissible for multiplication.

Then, if a, $b \in F$ then $a + b \in F$, $ab = a \vee b \in F$ $\quad a + b + (a \vee b) \in F$

$$a \vee b = c, \; c' = a' \wedge b',$$

$$a + b + c = (a' \wedge b' \wedge c) \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b' \wedge c') \vee (a \wedge b \wedge c)$$

$$= z \vee z \vee z \vee (a \wedge b) = a \wedge b$$

§ 5. MODULAR LATTICE

Definition:

A lattice T is said to be modular if

$x \leq t = \quad x \vee (y \wedge t) = (x \vee y) \wedge t$

Theorem:

Any distributive lattice is modular.

Theorem:

Any sublattice of a modular lattice is modular

Theorem:

The lattice of normal subgroups of a group G is modular.

Proof:

Let S_1, S_2, S_3 be three normal subgroups of group G.

Suppose $S_1 \subseteq S_3$. We have $(S_1 \vee S_2) \wedge S_3 = S_1 S_2 \cap S_3$

Let $x \in S_1 S_2 \cap S_3$ $\quad x = S_1 S_2 = S_3 \quad S_1 \in S_1$

Then $S_2 = S_1^{-1} S_3 \in S_3 \quad S_1^{-1} \in S_3$. $S_2 \in S_2 \cap S_3$.

so that $x \in S_1(S_2 \cap S_3) = S_1 \vee (S_2 \wedge S_3)$ $\quad (S_1 \vee S_2) \wedge S_3 \leq S_1 \vee (S_2 \wedge S_3)$

But $S_1 \vee (S_2 \wedge S_3) \leq (S_1 \vee S_2) \wedge S_3$

Accordingly, the lattice is modular.

Corrollary:

The lattice of subgroups of an abelian group is modular.

The lattices of left ideals, of right ideals of a ring are all modular.

Remark:

1. The lattice of normal subgroups of a group G is not, in general, distributive.
Let us see here. let G be the free abelian group with two generators a and b
i.e. $G = \{ a^m b^n : m, n \text{ integers}, m \neq 0, n \neq 0 \}$
Then we have that there are subgroups S_1, S_2, S_3 generated by a, b and ab, respectively. Then we have

$S_1 \cap S_2 = \{e\}$ (e is identity element)

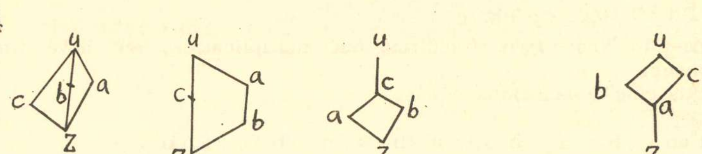
$(S_1 \wedge S_2) \vee S_3 = \{e\} \vee S_3 = S_3$

But $\quad S_1 \vee S_3 = S_1 \cup S_3 = G$ since $a^m b^n = a^{m-p}(a^p b^n)$

$S_2 \vee S_3 = S_2 \cup S_3 = G$ since $a^m b^n = b^p(a^m b^{n-p})$

Hence $(S_1 \vee S_3) \wedge (S_2 \vee S_3) = G \wedge G = G \neq S_3 = (S_1 \wedge S_2) \vee S_3$

2.



Above four figures, which of them is distaibutive, modular, non-distributive, non-modular, both distributive and modular, both non-distributive and non-modular?

Theorem:

The modular lattice $T \Leftrightarrow$
$$\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ a \wedge c = b \wedge c \\ a \vee c = b \vee c \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$$

Proof:

(A) necessary condition:

$a = a \vee (c \vee a) = a \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge b = (a \vee b) \wedge b = b$

(B) Sufficient condition. $\qquad x < t \Rightarrow$

Suppose T is non-modular. let $x, y, z \in T$ and $x \vee (y \wedge t) < (x \vee y) \wedge t$

Here, let $a = x \vee (y \wedge t)$ $\quad b = (x \vee y) \wedge t$, $\quad a \leq \quad a < b$

for $\forall c \in T \Rightarrow a\vee c \leq b\vee c$ and $a\wedge c \leq b\wedge c$
we take $c = y$, therefore

$$\left.\begin{array}{l} a\vee c = x\vee(y\wedge t)\vee y = x\vee y \\ b\vee c = \{(x\vee y)\wedge t\}\vee y \leq \{(x\vee y)\wedge t\}\vee(x\vee y) = x\vee y \end{array}\right\} \Rightarrow b\vee c \geq a\vee c$$

Accordingly; $a\vee c = b\vee c$
Similarly, we easily prove that $a\wedge c = b\wedge c$
Heace, we deduce the sufficient condition is true

Theorem:
A lattice is distributive $\Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} a\wedge c = b\wedge c \\ a\vee c = b\vee c \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$

Proof:
(A) Sufficient condition

$$a = a\vee(a\wedge c) = a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\wedge c) = (a\vee b)\wedge(b\wedge c)$$
$$b = b\vee(b\wedge c) = b\vee(a\wedge c) = (a\vee b)\wedge(b\wedge c)$$

Heace $a = b$

(B) Necessary condition
We note first that the given condition holds.
Then, from the above theorem, we have T is modular.
Let $x.y,t$ be any three elements of T and
let $a = (x\wedge y)\vee\{t\wedge(x\vee y)\}$ $b = (y\wedge t)\vee\{x\wedge(y\vee t)\}$
Since T is modular, we have

$$a = \{(x\wedge y)\vee t\}\wedge(x\vee y), \quad b = \{(y\wedge t)\vee x\}\wedge(y\vee t)$$

If we take $y = c$. then we obtain

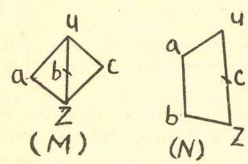
$$a\wedge c = (x\wedge y)\vee(t\wedge y) \text{ and } b\wedge c = (t\wedge y)\vee(x\wedge y) = a\wedge c$$

By duality, we also have $b\vee c = a\vee c$
so that, we deduce $a = b$.
But $a\wedge x = \{[x\wedge y)\vee t]\wedge(x\vee y)\}\wedge x = [(x\wedge y)\vee t]\wedge x = (x\wedge y)\vee(t\wedge x)$

$$b\wedge x = \{(y\vee t)\wedge[x\vee(y\wedge t)]\}\wedge x = (y\vee t)\wedge x$$

Since $a\wedge x = b\wedge x = x\wedge(y\vee t) = (x\wedge y)\vee(t\wedge x)$
From the result, we deduce T is distributive.

Studying:
A lattice T with the property $\left.\begin{array}{l} a\wedge c = b\wedge c \\ a\vee c = b\vee c \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$

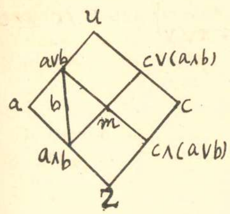


(M) (N)

is equivalent to the condition that there should exist no sublattice of type (M) or (N)

Proof: (I) Sufficient condition: It's clear.
(II) Necessary condition:
Suppose there exist three elements a, b, c such that
$\left.\begin{array}{l} a\vee c = b\vee c \\ a\wedge c = b\wedge c \end{array}\right\} \Rightarrow$ and $a \neq b$
If a and b are comparable, then it's obvious that there is sublattice of type (N)
Suppose a and b are non-comparable. Then the lattice is modular and we shall prove that it has a sublattice of type (M).
The sublattice, generated by a, b and c, together with the elements, contains the elements $a\wedge c = b\wedge c = a\wedge b\wedge c = z$
$a\vee c = b\vee c = a\vee b\vee c = u$, it also cn contains $c\wedge(b\vee a)$, $c\vee(a\wedge b)$ and $(a\wedge b)\vee\{c\wedge(a\vee b)\} = (a\vee b)\wedge\{c\vee(a\wedge b)\} = m$

Then we have $a \wedge m = a \wedge \{ c \vee (a \wedge b) \}$
By the modularity, $a \wedge m = a \wedge b$
Similarly, $b \wedge m = a \wedge b$
In the same way, we have $a \vee m = b \vee m = a \vee b$
Thus the five elements a , b, a b, a b, and m. from a sublattice of type M if they are distinct.
Hence, it suffices to say that necessary condition is true.
From (I) and (II), to sum up, they are equivalent.



§6. Lattice Mapping

finition:
A mapping, $\varphi : F \subseteq P(S) \to P(S)$ where S is a set, possessing the following operties, is called a family closure mapping:
i) Extensive : i. e. $A \subset \varphi(A)$
ii) Isotonic : i. e. $A \subset B = \varphi(A) \subset \varphi(B)$
iii) Idempotent: i. e. $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A)$
mma:
If $P(S)$ has a closure mapping φ then there is a moore family $F \subset P(S)$ ving φ as family closure mapping.
eorem: (Mac Neil theorem)
Any poset S can be embedded in a complete lattice T in such a way that least per bounds and greatest lower bounds in S (when they exist) are preserved.
oof:
Let S be a poset, let us consider the mapping α of $P(S)$ into itself, defined
$\alpha : A \to A^*$ where
$A^* = \{ x : x \leq m , \forall m \in M_A \ x \in S \}$ and $M_A = \{ m : a \leq m , \forall a \in A \}$
Note: If $A = \phi$, then $M_A = E$ and $A^* = \{ 0 \}$ ϕ according as S has a zero element o or not. If $M_A = \phi$, then $A^* = S$
Then, the mapping α defined in this way has the properties.
i) $A \subseteq A^*$.
ii) If $A \subseteq B$ then $A^* \subseteq B^*$.
iii) Since $A \subseteq A^*$, any upper bound m^* of A^* is an upper bound of A. but, any upper bound m of A is an upper bound of A^*. Hence $M_A = M_A{}^* \Rightarrow A^* = A^{**}$
Since α possesses these three closure mapping properties, so α is a Moore ure mapping, According, the closures $\alpha(A) = A^*$ form a Moore family and nce it forms a complete lattice T. The order relation is inclusion, and inf set-theoretic intersection. Consider now the subsets $\{ x \}$, singlehen, of S we denote $\alpha(\{x\}) = x^* = \{ y \mid y \leq x \}$ Let T be the set of all such X^* as X scribes S. Then the mapping $X \to X^*$ of S onto T is clearly bijective; rther, $x \leq y \Rightarrow x^* \subseteq y^*$, and conversely. Hence the poset S and T are omorphic. Since T is a complete lattice. any subset of T possesses a least per bound and a greatest lower bound, and these belong to T with the corresnding bounds for S exist
Thus, the Mac Neil theorem is completely proved.
Now, let us apply Mac Neil theorem to the real number system. We have to prove the Jordan-Holder-Dedekind theorem.
finition:
By a covers b in a poset p. it is meant that $a > b$ but that $a > x > b$ for no p. The length of a finite chain n is defined to be n-1. and the length $l(p)$ of oset p is defined as the least upper bound of the lengths of the chains in p.

Definition:

In a modular lattice, two intervals of the form $[a \wedge b, a]$ and $[b, a \vee b]$. will be called transposes; two intervals $[c, d]$ and $[c^*, d^*]$ will be called projective where there exists a sequence of intervals $k = 0, 1, 2, \ldots n$. such that (i) $[c_0, d_0] = [c, d]$. (ii) $[c_n, d_n] = [c^*, d^*]$ and (iii) $[c_{k-1}, d_{k-1}]$ and $[c_k, d_k]$ are transposes, for $k = 1, 2, \ldots n$.

Lemma:

Let $L(A)$ be the modular lattice of all R-submodules of any R-module A. In $L(A)$, projective intervals $[S, T]$ and $[S^*, T^*]$ correspond to isomorphic quotient-modules T/S and T^*/S^*.

Proof:

Any transposed intervals are isomorphic. (Why?)

Since isomorphism is transtive it follows in any modular lattice that any two projective intervals are isomorphic sublattices.

By the Diamond Isomorphism Theorem, transposed intervals correspond to isomorphic quotient-modules. Since isomorphism is transitive $T/S = T^*/S^*$

Note: Diamond Isomorphism Theorem:

For submodules S and T of a module A. the assignment

$T + s$ for all $s \notin S'$ is an isomorphism

Theorem: (Jordan-Holder-Dedekind theorem)

Let M be any lattice of finite length in which either covering condition or holds. i. e.

(ε) If a and b both cover c, then a b covers both a and b.

(ε') Dually, if c covers both a and b, then both a and b cover a b.

Then any two connected chains in M which have the same ends have the same length.

Note: A connected chain of length m in a poset is a list of elements $x_0, x_1, \ldots x_m$ of p in which x_i covers x_{i-1}.

Proof:

For each positive interger m, let $P(m)$ stand for the proposition: If r is a connected chain from a to b in L has length m. $r = \{x_i : a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots x_m = b\}$ then every such connected chain has length m. Clearly, $P(1)$ is true. Let $p(m-1)$ be true, also. Thus let $r' : a = y_0 < y_1 < y_2 \ldots\ldots < y_n = b$. be any other connected chain from a to be in L. We set $Z = x_{m-1} \wedge y_{n-1}$.

If $Z = x_{m-1} = y_{n-1}$, then $p(m-1)$ trivially implies $m-1 = n-1 == m = n$.

If $x_{m-1} \neq y_{n-1}$, from the assumed covering condition (ε'), we deduce that x_{m-1} and y_{n-1} both cover $Z = x_{m-1} \wedge y_{y-i}$. By our hyperthesis $p(m-1)$. the connected chain δ : $a = x_0 < \ldots\ldots\ldots < Z < x_{m-1}$ from a to x will have length $m-1$. Similarly S' : $y_1 < y_2 \ldots\ldots < Z < y_{n-1}$ will have length $m-1$. this implies $m = n$.

By mathematical Induction, we deduce that $p(m)$ is true. We have proved this statement.

We'll have come to an end with some problems:

(1) Show that $(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \leq (a \vee c) \wedge (b \vee d)$ for any four elements a, b, c, d in a lattice.

(2) Prove that $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$ in any distributive lattice.

(3) Prove Diamond Isomorphism Theorem for modules.

又是一年

謝敏致

時間過得眞快，自從去夏學會改選後，很快一年又已過去。現在又是各社團，各學會改選的時候了。最近時常有人問我，擔任一年來的學會負責人有何感想，我總不知如何回答才好。現在就讓我藉此機會，作個簡單的學會活動報告。同學或許可以從活動中了解我一點兒。個人由於經驗能力不足，所以接任後一直就很惶恐，唯恐有不是的地方，覺得當初自己實在是太不自量力了。不過可堪告慰的是由於老師、學長時常給予我指導，各股股長的鼎力協助，以及各位同學在各項活動也都分別竭盡所能的給予支持，因此學會各項活動也大多能順利的展開，在此先由衷的謝謝大家了。現在就讓我分成三方面來報告：

㈠學術股方面：今年學術股的工作除了在下學期秉承了往年學術股的工作——繼續出版「系刊」第四期外，另一件最大的工作便是在上學期中連續出刊本系「期刊」兩期。這使得本系出版的刊物在份量上已獨步於師大一當然，質是難以比較的。期刊能順利出版，我們最要感謝系主任在經費方面的支持與老師的幫忙審稿，我們的期刊，從寫稿、編稿至印刷完全是由同學們利用課餘之暇親自動工的。「期刊」的裝訂不如理想，固然有待技術的改進，人力不足和有限的經費，確曾使學術股各幹事爲之困擾。但學術股各幹事對「期刊」熱心負責的精神是令我感動的。有一天，戈文企同學爲編稿，黃金虎同學爲印刷都誤了餐點，這是至今令我難忘的。「數學期刊」的創刊，我們雖然不敢說它會對本系學術的研究有多大的幫助，但它能鼓勵同學多寫讀書心得，由本期「系刊」的稿源來看，我們可以說：「期刊」的出刊已爲「系刊」預備了一條路一徵稿的困難已減少了許多。希望他日，「期刊」仍能繼續出刊，學術研究的風氣日益茁壯。

㈡康樂股方面：迎新與送舊會是每年康樂股的重任。今年的迎新以園遊會爲主而另以土風舞會及摸彩助興。套鴉、燒蛋、神射手等歡樂節目，想必能給新鮮人予大學黃金時代來日清新甜蜜回憶的資料。歡送會我們要求簡單隆重，對於這三年來，學長們的愛護與指導。我們願呈獻每位即將結業的學長一份小禮物，以表感謝之忱。我們也願給每位即將離去的學長們別上一朵小花，送上錦繡的前程。今年康樂股除了與往年一樣辦了兩次土風舞晚會外，我們深感平日同學與老師接觸不多，爲了增進師生間的友誼及更多的了解，我們特於四月間舉辦了一次師生聯合郊遊，由各班班長邀請各班老師共同參加。希望藉此活動於自由交談中獲取師長的寶貴意見。雖然這次郊遊由於天氣的影響及期中考近的關係，同學的出席並不踴躍，但系裏能有七十位同學參加，這在團體活動中也已經是難能可貴的了。以後如能選擇較恰當的時機，相信這種師生聯合的活動，必能更踴躍的參與，也必能使師生間的感情更爲融洽，寄望未來的理事會能注意及此。也寄望同學們能以「讀書的時候讀書，娛樂的時候娛樂」共勉之，多注意休暇的康樂活動，不要讓外系的同學認爲數學系的學生生活僅是在沙漠中尋求綠洲而已。

㈢體育股方面：體育活動在學會各項活動中算是最主要的一部份了。幾乎整學年中隨時都有各項的競賽，因此體育股長傅同學也是最忙的人了。他除了本身是一位運動健將外，對體育活動也是極其熱心負責的。排球賽在本系可算是最盛行的球賽，因此在各項球類競賽中表現也最爲優異，同學前往加油的也最爲踴躍。系際排球賽同學吶喊助威之聲，至今猶縈繞於耳側。雖然今年仍屈居亞軍，未能奪回去年失去的王座，但本系排球的聲譽仍是全校聞名的，希望能繼續努力，且待下屆求取最光榮的勝利。談到排球，我也希望藉此代表系裏的同學向即將畢業的王懷玉隊長致最大的謝意，這幾年，他對系裏的排賽，熱心的指導與貢獻實在太多了。其他

如籃球賽、足球賽、棒球賽、桌球賽等代表隊的同學在系際球賽中奮戰的精神也是每位親臨觀戰的同學所讚賞的。可惜此類球賽舉行時，前往加油的同學似乎不如排球賽時踴躍，這大概是同學的興趣問題了；希望藉此呼籲同學：以後有系際球賽時能多以系的榮辱為念，多多前往加油助陣。須知系的榮辱是每位同學的，並非是少數幾名運動球員的責任。往往在球賽的緊要關頭，士氣的鼓舞常是勝負的關鍵。除了球賽外，還有紀念　國父誕辰的全校運動會及校慶日的水上運動會。除了水上運動會尚未舉行，我們僅能寄望比賽勝利外，最後就讓我來作校運會的報告：比賽分團體與個人兩組。在團體成績方面，今年本系女子成績表現特優，是歷年來最輝煌的。除了在大隊接力賽中榮獲第五名外，並且獲得了田賽總成績的亞軍。男子方面：除了徑賽總成績獲得第五名外，大隊接力也壓倒了往年的勁敵一化學系，獲得了分組冠軍，原以為獲總冠軍是不成問題的了，誰知在另組比賽中竟又出了一匹馬一工教系僅以零點二秒之差取勝了我們，我們也因此而又屈居亞軍，相信如果工教系也與我們同組而競的話，也許紀錄又得改寫了。在個人賽方面亦頗有斬獲一此為奠定團體賽總成績的基礎。例如在去年年底舉行的第一屆全國大專院校田徑運動大會中，裘尚正，陳素換兩位同學代表本校分別奪取了個人賽一百公尺，及標槍的全國第一名，不僅為校爭光，也為本系贏取了無上的榮譽。

關於活動方面，談的也差不多了。寫到此，我內心感到一陣輕鬆，我覺得當此篇與各位同學見面時，我將已交了差。在責任方面我算是盡力了，但限於經驗能力，若有不如同學期望的地方，尚請各位同學多加原諒，因為大三這一年功課的繁重，實非我始料所及，一連串的考試，幾乎已使我有喘不過氣的感覺。不過在此還得要由衷的感激每位曾為學會而幫忙我的同學。諸如校運期間林玉斌同學兩天全天候的為運動員服務，蔡高太，黃廣育兩位同學於清晨四點半就起床為運動員的休息處搶位置架營等等，因限於篇幅，恕未能一一道出。同學們互助合作眞摯的友誼將永難忘懷，請容我再說聲：謝謝大家。謝謝！！謝謝！！！

59年5月18日於系閱覽室

58學年度數學學會組織表

理事長：謝敏致（數三）　　文教股長：黃金虎（數二）

總務股長：李竹光（數二）　　康樂股長：徐玉淞（數三）

體育股長：傅恒霖（數二）　　衛生股長：曾麗霞（數三）

期刊主編：戈文企（數二）　　系刊主編：于　婧（數二）

系館負責人：利正銘、李竹光。

理事：許政瑞、湯木榮、方光威、游啓聰、胡明宏、林昭南、張明鐘、劉家興、張英傑、邵萬華、陳豐卿、蕭水興、黃鴻洲、曾文賓、黃滿足、利正銘、傅恒霖、楊維邦、張清約、蔡竹山、陳永添、顏淑季、邵來發。

常務監事：裘尚正

監　　事：張太山、洪萬生、江忠輝、季大明、陳進春、計恒敬、李宗欣。

系友通訊錄

1. 黃允明、林繁男
Mr. Yean－Ming Huang
Dept. of Math.
Univ. of Minn.
Mpls. Minn. 55455
U. S. A.

2. 楊盛成
Mr. Gandi Shen－Cheng Young
Dobson House 472
Northeast Mo. State College
Kirksville, Mo. 63501
U. S. A.

3. 張獻明、翁仁山、葉金城、鄭福安
Mr. Shian－Ming Chang
1148 W. Hancock, Detroit
Michigan 48201
U. S. A.

4. 伍清榮
Mr. Ching－Jung Wu
140, E. College Ave. Apt. 3
State College, PA. 16801
U. S. A.

5. 邱有行
Mr. Yu－Hsing Chiu
318 South, 12th East,
Salt Lake City
Utah 84102
U. S. A.

6. 林峯元
Mr. Fong－Yuen Lin
3730, Mc Clintock Ave
433F, Los Angles
Calif. 90007
U. S. A.

7. 束興新
Mr. Sing－Sing Soh
305, Grant Apts. Pine Street
Rolla, Missouri 65401
U. S. A.

8. 陳昭地
Mr. J. D. chen
Rm. 447 D, Graduate House
Purdue Univ.
Lafayette, Indiana 47907
U. S. A.

9. 王作民
Albert, Tso－Ming Wang
256, Oakland Ave.
Pittsburgh Pa. 15213
U. S. A.

10. 陳西華
Miss Jnty S. Chen
22331 Morley St.
Dearborn, Michigan 48124
U. S. A.

11. 羅仁松
Mr. Reng－Song Lo
213, Bailey St.
East Lansing, Michigan 48823
U. S. A.

12. 周誠寬
Mr. Cheng－Kwei Chou
1010 West Green St. # 85
Urbana Ill. 61801
U. S. A.

13. 王坪、楊久子
Mr. and Mrs. Pyng Wang
Dept. of Math.
Univ. of Illinois
Urbana, Ill. 61801
U. S. A.

14. 彭阿文
Mr. Ivan Peng
2405 Marion Ave., Apt. 5G
Bronx, N. Y. 10458
U. S. A.

15. 蕭弘人
Mr. Hong－Jen Hsiao
34 Göttingen
Grone2 Strasse 25
West Germany

16. 蘇春槐
Mr. Chun－Hwai Su

541 , W. 113 st. Apt. 5E
New York , N.Y. 10025
U. S. A.

17. 林丕二
Dr. Pi－Erh Lin
Dept. of Statistics
The Florida State Univ.
Tallahassee , Florida 32306
U. S. A.

18. 柯慧美
Miss Hwei－Mei Ko
Dept. of Math.
Univ. of British Columbia
Uancouver 8 , B. C.
CANADA

19. 黃文郁
Mr. Iku W. Huang
Box 917
Setauket N. Y. 11733
U. S. A.

20. 謝志雄、趙昭子
Mr. Simon C. Hsieh
Math. Dept.
Univ. of South Carolina
Columbia , S. C. 29208
U. S. A.

21. 卜愰文、霍慧敏
Dr. and Mrs. H. W. Pu
3700 Plainsman Lane , Apt. 54
Bryan , Texas 77801
U. S. A.

22. 陳健哲
Mr. Jiann－Jer Chen
Stillings Box 1847
Univ. of New Hampshire
Durham , New Hampshire 03824
U. S. A.

23. 王景明
Mr. Jim－Ming Wang
902 Main St.
Rolla , Mo. 65401
U. S. A.

24. 薛昭雄
Mr. and Mrs. Jau－Shyong Shiue
126－24 , S. Hills
Carbondale , Ill. 62901
U. S. A.

25. 曹恒平
Mr. Hung－Ping Tsao
808 W. Calif. Ave.
Urbana , Ill. 61801
U. S. A.

26. 趙家昂
Mr. and Mrs. Jia－Arng Chao
6429 Cates Avenue St.
Louis , Missouri 63130
U. S. A.

徵 稿 小 啓

一、我們熱誠地期待同學們的來稿，特別希望假期成爲“豐收”季節。

二、寫稿格式：

① 請用標準稿紙正楷橫寫，並將標點符號置於空格內。

② 圖表請以製圖墨水畫於白紙上，以便影印。

③ 符號請採用普通簡單者，例如：儘量以英文字母代替希臘字母。

④ 譯文請註明出處，譯名請附原文。

⑤ 原稿上請附班別、眞名。

三、有稿費。

四、來稿請投系舘稿箱。

編後語

首先，我們要感謝康系主任，以及助教們的支持與協助，解決各種困難，使本期系刊得以順利出版。

其次，我們要感謝許多同學的支持與鼓勵，尤其是下列熱心出力的同學：林鴻賢，賴世倫，黃人祥，彭金豐，胡明宏，謝敏致，張英傑，熊耀原，林玉斌，邵萬華，戈文企，季大明，段台生，郭文聰，李政貴，盧靜秋，羅淑媛，陳登源，傅恒霖，紀榮松，李慶輝，葉樹華。

本期系刊的特色是包含了有各年級同學的作品。範圍從純數學，邏輯，應用數學到數學教育，雖然內容還談不上學術價值，但至少是同學們自己的研習心得。我們衷心希望系刊的繼續出版能普及研究風氣，激起探討學問的熱潮，而不僅是在同學們的書架上多一本裝飾品而已。

因為限於篇幅，幾篇文藝性的文章都無法刊登，這是我們所最感到遺憾的一點，在此我們謹向幾位作者表示最大歉意。

最後我們必須說明，由於編者經驗的不足，本期系刊難免有不少不理想的地方，這是主編個人所應負全責的，希望同學們本愛護系刊的立場，提供建設性的批評，讓明年編輯同學藉以參考，編出更完善的第五期來。

數學系刊 4

師大訓課刊登字130號

發行人：康洪元

出版者：國立台灣師範大學數學學會

學會負責人：謝敏致

主編：于靖

編輯：洪萬生、王頑玉、陳柏
吳家怡、高寶泰、黃金虎

承印者：永明打字機行

地址：台北市貴陽街二段107號