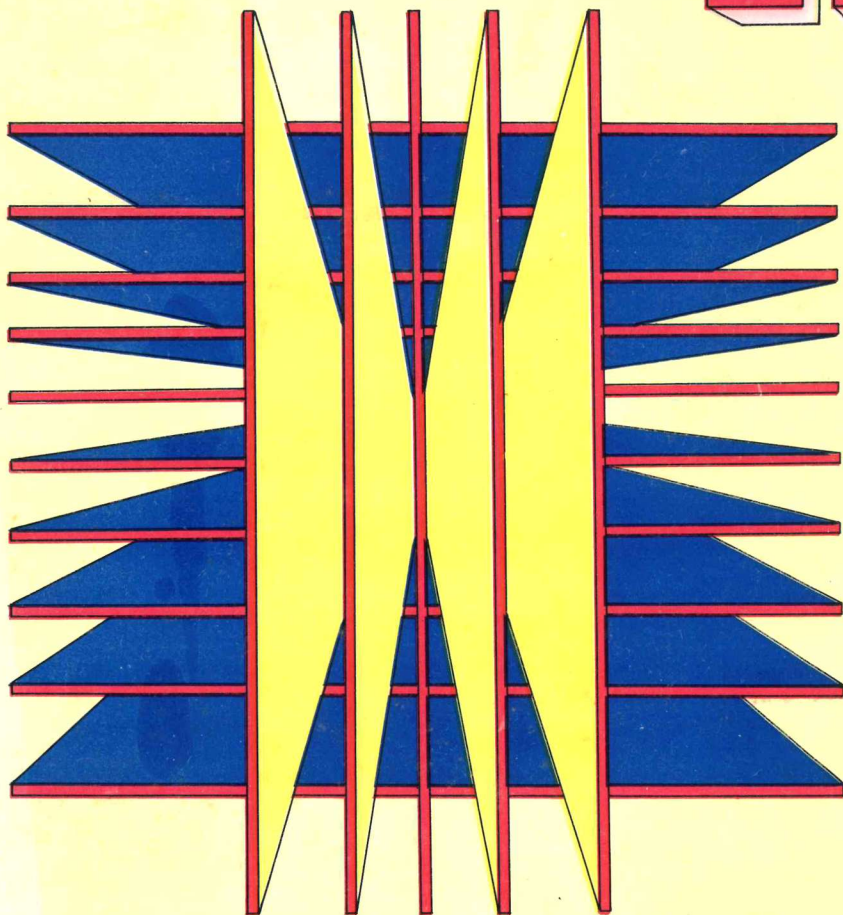


# 師大數學

21



# 序

## 系主任

本系成立於民國三十五年八月，首由張儒林教授擔任系主任，當時招收數學系及四年制專修科各一班，同學三十餘人，教授三位，助教一位，嗣由管公度、潘璞、李新民、康洪元、范傳坡、常法徽、顏啓麟各教授輪掌系務，歷經各任主任與教授們之群策群力，始具今日之規模。三十九年來本系之畢業系友，已逾貳仟柒佰餘人，多各有成就；其中獲得碩士學位叁佰餘人，具博士學位者超過一百五十人，或執教於高等學府，或繼續高深學術研究，餘則多服務於中等學校，都能秉持誠正勤樸之校訓，平時諄諄教學、熱誠服務、堅守崗位，頗獲好評。

現本系共有專兼任教師四十七人，學生十二班共有四百一十九名同學，圖書逾兩萬冊，雜誌百餘種，個人電腦六十部，電算室一大間。六十四年夏由本部遷於現址，環境煥然一新，出國學成系友相繼返校，互相砥勵，奠定良好的研究風氣，並擴展了研究領域；今日數學系之師生，更能孜孜不息，為美好遠景奮發努力。

近年來國內外科學發展甚速，對數學之需要更切，本系之任務更日益增大，除肩負數學教育之發展及中等數學教育之輔導外，亦兼具數學學術及數學教育研究之重任。為增強研究風尚，本系於二十年前創辦師大數學年刊，以供師生發表教學及研究心得，切磋琢磨，提高學習及研究興趣。本刊屢經負責同學之精心策劃及全體師生系友之共同支持，漸茲茁壯，除至表感謝外，今後請更不吝珠璣，源源賜稿，善珍此片園地，使本刊前程更能散發絢爛光芒。

陳 昭 地

七十六年五月

# 目 錄

序	系主任	
1. 探索數學教育——訪卜思博士	編輯小組	1
2. 關於 Simson 線之定理的擬似的和射影的推廣	許振榮、呂素齡	10
3. 奇異吸引子	費毓港	26
4. 阿貝爾定理	葉新材	46
5. 線性微分方程式	許志農	59
6. 淺談微分方程式的解的存在性	王彩蓮	76
7. 布林代數與電路設計	鄭英豪	80
8. Kronecker 定理的一維情況及其應用	T. M. C.	96
9. 尤拉公式及其逆定理	H. M. Y.	102

# 1. 探索數學教育— 訪卜思博士

編輯小組

相信同學們對於年度12月份，系上的數學教育旋風有相當深刻的印象——林福來老師在劍橋大學的朋友卜思博士來訪，並於每週四下午舉辦一系列有關數學教育的演講，這六次演講引起相大的震撼，風評甚佳。所謂「聆君一席話，勝讀十年書。」有感於此，我們特地採訪了卜思博士，並請林福來老師翻譯。以下是我們訪問的內容——。

\*\*\*\*\*

問：請問您畢業於那一所大學？任教何處？

卜思：我的學歷可分成三個階段：第一個階段在英國伯明罕大學受三年的數學師資訓練，目標是教國小到國中，年級約2～10年級。第二個階段，我到了澳洲，在雪梨大學得到第一個榮譽學士學位，雙主修數學與心理學，教七年級到12年級的學生為主，偶爾也教六年級的數學。第三個階段，在倫敦大學我依次拿到教育碩士和哲學博士，這期間主要重點是探討國高中程度學生的數學學習狀況。

我現在在澳大利亞北昆士蘭的 James Cook 大學教書，主要工作是數學師資訓練，我最感興趣的學生層是國小高年級到國中的學生，尤其是七年級，因為很多學生在國小到國中轉了學校，他們在原來的學校，數學可能沒有學好，當他們換了環境，可以提供我們一個機會為他們重新建立數學觀念，提高興趣，使我們較有機會教好他們。所以我認為國小六年級到國中這階段的教學是最重要的。我的興趣重點即在此。

問：可否簡明扼要說明「數學教育研究」是什麼？研究範圍？目的？理念？

卜思：至於什麼叫做「數學教育研究呢？我個人從事數學教育研究工作自1973年開始，已有13年歷史。我曾到過新幾內亞，新加坡、澳大利亞，大部份時間則留在英國作研究。主要研究興趣是有關小孩數學學習方面的研究，如學生主要的觀念想法是什麼？了解狀況如何？學習困難在那裏？以及他們常犯錯誤的類型是什麼？只有當我們了解學習困難在那兒，我們才可能教好他們，只有當我們了解學生怎樣思考數學問題，我們才能提供給一般老師，老師們了解學生這些想法以後，才能增進教學。

數學教育研究最重要的理念目標，簡而言之就是增進學生的學習，不論任何時代，這都是主要目標。舉個例子來說：目前很多人引進電腦，若將電腦應用於數學教育，這問題就變成一怎樣利用電腦來幫助並增進學生對數學概念與方法的了解。

數學教育研究大致在10年以前和最近10年是一個分水嶺，這期間差異甚大。(一)十年以前的研究，許多是針對傳統數學的教法，另外構想某種教法，設定實驗組與控制組進行教學實驗，這類實驗實際上對增進學生學習幫助不大，因為我們可能想像得到的新教材、教法易受傳統影響，與傳統方法的差異不見得大。即使有很顯著的差異，還是像一個黑盒子，不知道裏面有什麼東西，到底是什麼原因造成差異，一直少有人探討。而近十年，就是一種揭開黑盒子秘密的研究，研究的焦點放在學生是如何思考。正因近十年研究方向重在學生是怎麼想的，所以此方法比起傳統方法有效得多。

問：老師您來自英國，請老師談一下英國學生的學習態度？

卜思：英國學生的學習態度基本上可分成兩種學生，一種是比較好的學生，另一種是比較弱的學生。比較好的學生嚴肅且用功，但比起台灣的學生，用功程度上還是差很遠，主要原因是兩國的教育哲學不一樣。從

大人的角度來看，他們並不認為知識是教育的全部，其他如文化方面身體的發展、道德、社交等等，都非常重要。若以小學生的角度來看，我們的小學生就和台灣的小學生差很多，在觀念上我們認為小孩子就應該有一段時間像小孩子，應該享受好的童年生活，所以家長都會鼓勵小孩畫畫、運動，音樂、戲劇等。如果對一個小學生每天至少要做二個鐘頭的功課，不僅小孩會抱怨，父母亦不容許，只允許他們的小孩回家後做半個小時的作業。因此鼓勵好的學生唸書，亦鼓勵他們參加社團活動，整個學校課程就按照這個理念來安排，於是乎就有非常多的活動，這一點和台灣不一樣。基本上台灣雖然講五育並重，德智體群美，然而台灣理論比實際多。英國理論與實際較配合。英國早就脫離發展中國家，是屬先進國家，教育和經濟發展已有很悠久的歷史。而台灣是發展中國家，一般在發展中國家的父母親，總希望他們的下一代比他們更好，最直接可行的方式就是接受良好的教育，在學校出人頭地，將來在社會上才可能較有成就。英國早已超越這種想法。認為除物質方面之外還應要求生活環境的品質、文化層次的認知、音樂戲劇的欣賞等等，當一個國家經濟發展到某一個程度以後，行有餘力就可以注意到精神生活。如果整個社會都認為這個很重要，學校教育就會把這些排進去，當做主要課程，而不是只是理論上談五育，實際上偏重智育。因此，或許有一天台灣的教育也會發展到像英國那樣，當然不會完全一樣，畢竟兩國的民族性不同。一般而言，中國人較為勤奮，所以台灣的小孩還是會較用功。以上是指英國好的學生學習態度。至於英國弱的學生，在心理上，他們就不管唸書或不唸書，只想著他們要活動，所以大部份的時間都花在活動上。整個教育裏，好的學生與差的學生都有秩序問題，只是秩序問題差的學生表現的更突顯。有些學生在本質上不能也沒有能力上大學，對於這些學生，是不是需另設定一些配合他們能力的課程，以吸引他們的學習興趣，減低秩序問題，在這方面，英國一直積極在做，然而效果不佳。比較上，台灣也有較差的學生，但是這些學生仍勉為其難地用功。

問：對如何提高學習數學興趣有什麼看法？

卜思：通常學生學數學的態度不好，可分成兩個方面加以改進。第一，改進「教材」及「活動」，第二是改進學習環境、在教材方面，學生面臨最大的困難就是他們看不到所學有什麼用，不知道所學目的是什麼？因而態度不好。如果老師強調學這些只是爲了要考得好成績，慢慢地這樣的講法會使一部份學生失去興趣。因爲總是有學生會考不好，總是有學生不認爲考好是那麼重要。

問：我們知道好的老師對學生學習有很大的影響，可否請問身爲一個好的數學老師需具備那些條件？

卜思：基於上述原因，做一個好的老師所應該努力的方向！

第一，改變教材的表現方式以及活動等等，我們的教材，學生可能沒有興趣，所以老師應盡可能改變教材的表現方式。

第二，老師要了解教學學習目的。學生看不到學習目的，身爲老師的我們就必須了解學生學某一單元的目的，然後再把此訊息傳達給學生。

第三，提供一些拋開記憶式學習的活動，如果學數學只是用背誦的久而久之，學生就會聽不懂，自然不會有好的學習態度。我們可以提供一些活動，讓學生進行非記憶式而是真正了解式的學習，例如解題活動、探索活動等等，讓學生透過這些解題、探索活動，確實了解，他們是需要某些數學概念、方法來替他們解決問題的，學數學對他們解題仍是有益的。而提供的活動有那些呢？

①在班上提供數學競賽，數學競賽的題目不一定要很難，目的只是要提供他們的學習興趣。

②做一些小型的研究計畫（Project），例如畢氏定理的探討，探討的角度可以從歷史、背景，或是探討未發現定理以前怎樣等等。不同程度的學生，自然有很多觀點可以說。

③在班上由學生自己搜集一些有趣的探討活動。讓學生自己去找問題、形成問題、假設、作臆測，再想辦法證明。過一段時間，要求他

們把作品公布出來，根據作品我們可以比較一下那一個的方法最好，他們的差異在那兒。由學生自己去思考不同的解決方法，對整個數學學習是很有意思的。換句話說就是提供學生不同的學習觀。從這些學習活動中看到數學教育的目的，以及爲什麼他們要學數學。第四，欲改變學生的學習態度，老師本身要表現出對數學的興趣。學生可以從很多方面去判斷老師是否對數學有興趣。我們若希望學生對這門學科有興趣，首先我們必須表現出我們的喜愛程度。並提供學生良好的興趣。第五，一個數學老師還要很瞭解數學，但必須是以學生的觀點去瞭解數學觀念、方法。例如我們已很瞭解一元二次方程式，但我們必須知道學生的想法是什麼，他們的學習困難是什麼？身爲一個老師，以學生的觀點去瞭解數學，與自己當學生去瞭解某一單元，是不同的。針對此點卜思提供二個建議：

- 1.好好善用評量所回饋的資料，確實瞭解學生學習情況及錯誤觀念所在。
- 2.在課堂上多與學生討論，多瞭解他們的想法，找出錯誤觀點、由此可糾正您的教學方針、幫助學生解決學習困擾。

問：學生的錯誤在學習過程中的正面功能是什麼？

思：錯誤本身並不是那麼有趣的，但錯誤發生的原因是我們所感興趣的。

錯誤提供了二方面訊息：

- 1.學生在學習新單元之前的預備知識：老師往往假設學生在學習新單元之前需要知道的都已經知道，而事實上，在老師教學之前很可能學生就存有錯誤觀念，因此任憑您再努力教，仍是在做「白功」。
- 2.學生本身想法：錯誤最主要乃在於讓老師瞭解學生想法。老師應用學生的錯誤於教學上有二種方式：
  - ①在評量機會下若發現學生有任何錯誤，將錯誤提出，讓學生與學生討論。如果有同學能糾正錯誤，藉此老師除了知道糾正錯誤那



個同學真正懂了，並且因為學生與學生間程度相近，犯錯的同學可從同學那邊直接瞭解他為何犯錯、錯在那兒、該如何改正。

- ②老師故意在概念上犯錯：藉此老師可檢驗出學生是否真正跟著您在學。若學生能馬上提出錯誤，顯然您的教學相當成功；若得相反結果、那您就得小心，可能您的班上很安靜，可是學生心不在焉。當學生能指出錯誤所在時，可以緊接著問為什麼，而答案本身就是您所要教他們的概念或容易犯錯的地方。此種方式、若您能善加利用，等於同時做了好幾件事。

問：我們將來都要從事教育工作，現在在大學養成教育期間應該如何準備？

卜思：這個問題與前面問題有很大關連性，分為四項說明之：

- 1.分析數學概念：身為老師應該很瞭解數學概念，並且要從學生觀點深入分析數學概念，為什麼這個數學概念有用，提出實際證據，並且尋求適合國中學生程度的方法，對所要教的概念提供可被接受的說明。
- 2.應該自己瞭解教數學的目的是什麼，學生學數學的目的又是什麼，換言之，要建立明確教學目標：為達此目的最可行的方法是：在大學中透過小組討論數學教學目的是什麼？針對不同目的所引發的教學態度、理念也就大不相同。例如有人認為學數學的目的是「有用」，在這個理念引導下您的教學方式就會朝著「有用」進行，為使您的學生認為數學有用，您必須提出證據，找出數學確實有用的實際例子，使您的學生信服。又如您認為學數學目的在於培養邏輯思考，那麼您的教學就須避免記憶式學習，因為記憶式學習對邏輯思考是沒什麼幫助的。
- 3.瞭解您所要教的對象—學生：在大學中沒有辦法讓你們從班級中直接接觸學生，所以此處所謂的瞭解學生是屬於比較基本地瞭解學生想法、可能遭遇困難。如果您有弟弟妹妹或您的朋友有弟弟妹妹或

您兼家教等等，這些都提供您很好的實習機會。當學生提出問題時，花點時間想想，為什麼這個地方會有學習困擾，學生在這裏為什麼這麼想，該如何幫助他。如此一來，家教這件事除了替自己賺取零用錢外，也更積極地讓您從實際經驗中更瞭解學生。

4. 準備充裕教學資源：在大學中您可很有時間去翻閱各類書籍、期刊，當您看到可能與將來教學單元有關者，不妨把它影印下來、並且加以整理，將內容相近者收集在一塊兒，使三角有三角的資料、代數有代數的資料等等。或許您現在就看或許您現在不看，但都無妨。當您真正從事教學工作時，您可參閱手邊資料，並將資料中內容加以驗證，相信充裕資源會使您的教學更加得心應手。

問：數學師資訓練課程的模式問題。

卜思：全世界有很多人還在討論這個問題、而任何被提出的模式都還在實驗中，迄今還沒有說那一個模式是特別理想的，以下我提出二個「個人」觀點，供諸位參考：

1. 數學師資訓練課程除高層次數學學習外，更重要的是學習「關於數學」( About Mathematics )，對於我們將來要教的數學作更深入的探討：學習較高層次數學課程可提昇數學教師本身程度，擴展對數學領域的瞭解，但這應該只佔整個課程的一部分，課程重點應在於多學習「關於數學」。從各種不同觀點來看數學、瞭解數學；深入探討我們將來要教的數學內容為何？為何我們要教它？我們該如何教？；從比較深的觀點來看那些我們將來所要從事的教學單元，為什麼要教這個單元，這個單元與其他單元有何關連性？這個單元更深一層的意義為何？如何更深入地瞭解它？學工程的要學工程數學，學醫的要學醫科數學，對於不同領域的人須提供他不同領域的數學，當然對於我們將從事數學教育者也須有一門「教師數學」，「教師數學」的內容也就是數學師資訓練課程內容亦即上述之種種。

2. 數學師資訓練教材應採三明治模式：個人並不贊同在大學從事四年

師資訊練再出去教書。一個簡單例子是，如果四年下來你發現自己不喜歡教書，那麼這四年的訓練等於浪費掉了；從另外一個角度來看，在學校中因為本身缺乏教學經驗，談教學、學習課程都只能從理論來談，而理論一般而言都是空洞的，除非本身已經有教學經驗來驗證這些理論。換言之，身為一個老師所要學的那些理論，不在理論本身，主要在於如何將這些理論真正應用到班級教學。如果說整個四年都待在大學中，當然就沒辦法知道如何應用教學理論了，因此個人比較偏向三明治模式。所謂的三明治模式，簡言之，就是學校、大學間來來去去、而不是一直待在大學學高深數學。高中畢業後若有志從事教育工作，就先到學校教書教一段時間（三明治的最上一層），跟一些有經驗老師學習、取得與學生相處經驗，由此您可體會到從學生觀點來看數學教室與從老師觀點來看數學教室是截然不同的。三明治的第二層是回到大學，由於您已有些經驗、再與您談理論，在實際經驗與理論相互驗證、配合之後，您就可明確知道該怎麼做比較好。三明治的最下一層是讓您再度回到學校實行屬於您自己的教學方式。以上就是所謂的三明治教學模式。

此外，提到一點，因為教書與其他職業有很大不同，當一個人決定終身獻身教育之前，最好有從事其他職業的經驗，多瞭解校外的社會到底是怎麼樣。如此，一方面您可對您的學生將來可能從事的職業有更廣泛的瞭解；另一方面，有了從事其他職業經驗後，您可更加深刻瞭解教書確實比較單純、比較適合您的性向，您也會比較有奉獻精神。

問：您對學生「背誦數學」感覺如何？

卜思：記憶式學習本身並沒有錯，有些東西確實需要去記，因此我們所應秉持的態度是：真正需要記憶的東西我們還是需要去記它，例如九九乘法；但記憶學習並不是主要的學習。關於記憶式學習我們的問題是：在不必記的時候，我們卻提供學生很多記憶環境。例如，教一個很簡

單的等差數列時，老師費心地把各種情況都考慮，列出6個公式，在這種情況下，學生只好硬把6個公式給背了下來。實際上、理解是比較容易被接受的學習方式，有些東西根本不用背、只須理解即可。例如，查電話號碼遠比背電話號碼好得多，當您想知道時，去查一下就好了。同理，有些公式，如果說你瞭解，自然隨時可以導得或查到，例如您只須明瞭體積的真正意義，那麼所有體積公式皆可導得。身為一個數學教師，您有心幫助學生，盡心盡力地把所有情況替學生整理出來，但您或許忽略了這件事從學生觀點來看，無疑是增加他們記憶負擔，個人特別強調這件事，提醒諸位應避免犯上這個無心之過。

問：評量測驗對從事數學教育有那些幫助？

卜思：對學校、社會而言，評量最重要目的就是測驗學生學習成就、學習成果；由教師觀點來看，評量除了顯示學生學習成績外，評量更重要的，應該是用來做為教學及補救教學的指引。由評量中發現學生錯誤所在，進而推測學生對那些教材不明瞭、不熟悉，由此回饋到您的教學，做為下次教學的最佳指引。

問：您自12月初來師大，至今已一個多月，您對師大學生的感覺如何？有何建議？

卜思：個人感受到我們這裏的學生（部分她所接觸的學生）用功唸書，對課業十分嚴肅，當然這沒什麼不好，針對這些學生個人提出一些建議及對人生看法：用功唸書只是人生的一部分，而非全部，趁年輕多經歷一些事。我的母親在她小時候曾告訴我：「趁妳年輕，多經歷一些事，這些事情、這些經驗的色彩將隨時間而改變，當妳年紀大時，再經歷這些事情，妳的感覺就已不同了。年輕時的感受是寶貴的，很多事寧可做了後悔，不願將來後悔年青時沒做。」

我極力鼓勵大家把人生觀放得更寬、更廣、更深，不要只是斤斤計較於讀書這件事。同樣一件事，你年輕時的感覺與年紀大後的感受會完全不一樣，年輕的感受現在不經歷，以後可就沒機會囉！擴展您的視野吧！別讓它太局限於一些小範圍。

## 2. 關於 Simson 線定理的擬似的 和射影的推廣

許振榮\* 呂素齡\*

最近樊熾先生在 Linear Algebra and Its Application Vol.65 (1985) PP. 273~277 上證明了下面定理：

【定理】 設  $F$  爲示性數  $\neq 2$  的一個體。  $V$  爲在  $F$  上的一個 2 維的向量空間。  $f$  爲在  $V \times V$  上的對稱雙線性形式，又設  $C = \{a \in V : f(a, a) = 1\}$ 。 設  $a_0, a_1, a_2, a_3$  爲  $C$  上使  $f(a_1, a_2) \neq 1, f(a_2, a_3) \neq 1$  且  $f(a_3, a_1) \neq 1$  成立的四點。 設  $b_1, b_2, b_3$  爲  $V$  中三點使  $b_1, a_2, a_3$  爲共線，  $b_2, a_3, a_1$  爲共線且  $b_3, a_1, a_2$  爲共線。 現在如果

$f(a_0 - b_1, a_2 - a_3) = 0, f(a_0 - b_2, a_3 - a_1) = 0, f(a_0 - b_3, a_1 - a_2) = 0$  成立，則  $b_1, b_2, b_3$  三點爲共線。

如果在  $V$  中選一組基  $\{e_1, e_2\}$ ，使  $f(e_1, e_1) = 1, f(e_2, e_2) = \beta, f(e_1, e_2) = f(e_2, e_1) = 0$ ，則對於  $a_i = x_i e_1 + y_i e_2, i = 1, 2$ 。  $f(a_1, a_2) = x_1 x_2 + \beta y_1 y_2$ 。 因此，如果  $F$  爲所有實數所成的體時，上面定理爲歐氏平面的定理。 故當  $\beta = 1$  時， $C$  表單位圓；當  $\beta > 0$  時， $C$  表  $f(a, a) = x^2 + \beta y^2 = 1, a = x e_1 + y e_2$  的橢圓；當  $\beta (= -\beta') < 0$  時， $C$  表  $x^2 - \beta' y^2 = 1$  的雙曲線。

\*許振榮先生是中央研究院數學研究所研究員，呂素齡小姐爲助理研究員。民國 75 年 10 月 16 日第一位作者曾在師範大學數學研究所演講本文。

上面的定理在平面歐氏幾何中是怎樣的定理呢？我們先來討論： $e, e'$  為  $C$  上二點時， $f(e, e') = 0$  所表示的幾何意義為何？

【引理】 在上述定理的假定和符號下，如果  $e, e'$  為  $C$  上二點並且滿足  $f(e, e') = 0$ ，則  $e'$  的方向為所有與  $e$  平行的弦之中點所形成的軌跡直線之方向。

【證明】 設  $a$  為  $C$  上任一點。經過  $a$  與  $e$  平行的直線上的點可表成  $b = a + \lambda e$ 。此直線與  $C$  之交點滿足

$$1 = f(a + \lambda e, a + \lambda e) = f(a, a) + 2\lambda f(a, e) + \lambda^2 f(e, e)$$

因  $f(a, a) = f(e, e) = 1$ ，可得  $\lambda = -2f(a, e)$ 。故此直線與  $C$  另一

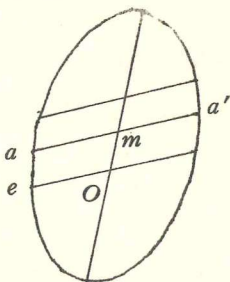
交點為  $a' = a - 2f(a, e)e$ 。弦  $aa'$  之

中點為  $m = a - f(a, e)e$ 。因為

$$f(m, e) = f(a - f(a, e)e, e)$$

$$= f(a, e) - f(a, e)f(e, e) = 0$$

，故  $om$  之方向為滿足  $f(e', e) = 0$  之  $e'$  的方向。



回到  $F$  為所有實數的情形。設

$f(e', e) = 0$  成立。當  $\beta = 1$ ，即  $C$  為圓時  $e'$  為與  $e$  為垂直的方向。當  $\beta \neq 1$  時  $C$  為有心圓錐曲線，此時  $e'$  的方向為所有與  $e$  平行的弦之中點所形成的軌跡的方向，故  $e'$  為  $e$  所表示的直徑之共軛直徑的方向。

有了  $f(e', e) = 0$  的幾何意義，上面定理包含下列二個定理：

【定理 1】（關於 Simson 線的定理） 設  $a_0$  為  $\triangle a_1 a_2 a_3$  之外接圓上的任一點。作  $a_0$  至  $\triangle a_1 a_2 a_3$  之三邊  $a_2 a_3, a_3 a_1, a_1 a_2$  上的垂線，使其垂足分別為  $b_1, b_2, b_3$ ，則  $b_1, b_2, b_3$  三點為共點。

【定理 2】（一種關於 Simson 線的定理的擬仰推廣） 設  $\triangle a_1 a_2 a_3$  是一個內接於有心圓錐曲線  $\Sigma$  的三角形， $a_0$  為  $\Sigma$  上任一點。經過  $a_0$  作  $a_2 a_3$

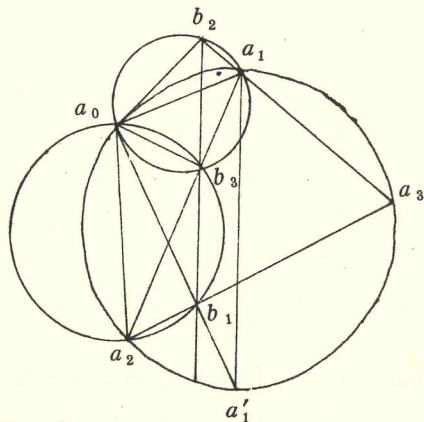
的共軛直徑方向的直線，與  $a_2a_3$  交於點  $b_1$ ；作  $a_3a_1$  的共軛直徑方向的直線與  $a_3a_1$  交於點  $b_2$ ；作  $a_1a_2$  的共軛直徑方向的直線與  $a_1a_2$  交於點  $b_3$ ，則  $b_1, b_2, b_3$  三點為共線。

定理 2 可以說是關於 Simson 線之定理的擬似幾何的推廣。這是因為定理 2 在擬似變換之下不變的緣故。所謂擬似變換是把直線變換為直線，使線段比不變，並使平行性不變的變換（無限遠直線變為無限遠直線）。但是這個結果（即定理 2）並不是完全是新的，在五、六十年前高須鶴三郎已在東北帝國大學理科報告第 30 卷（1931）PP. 213~251 中發表了「Simson 線的射影的和擬似的推廣」。我們現在換一個角度，即從初等幾何的觀點來討論它。

我想關於 Simson 線的定理（即定理 1）大部份的人都知道，但是知道下面相關的定理 3 的人並不那麼多：

【定理 3】 利用定理 1 的假設和符號，並假設直線  $a_0b_1, a_0b_2, a_0b_3$  分別與圓  $C$  之第二交點為  $a'_1, a'_2$  及  $a'_3$ ，則直線  $a_1a'_1$ ，直線  $a_2a'_2$ ，直線  $a_3a'_3$  和 Simson 線互為平行。

【證明】（包含 Simson 線定理之證明）：



先注意：四點  $a_0, b_3, a_1, b_2$  在同一圓周上，又四點  $a_0, b_3, b_1, a_2$  亦在同一圓周上。

$$\text{故 } \angle a_1 b_3 b_2 = \angle a_1 a_0 b_2, \quad \angle a_2 a_0 b_1 = \angle a_2 b_3 b_1$$

因為四邊形  $a_0 a_2 a_3 a_1$  內接於一圓，故  $\angle a_0 a_2 a_3 = \angle a_0 a_1 b_2$ 。

$$\text{又因 } \angle a_2 a_0 b_1 + \angle a_0 a_2 b_1 = \frac{\pi}{2} = \angle a_1 a_0 b_2 + \angle a_0 a_1 b_2$$

$$\text{成立，可得 } \angle a_2 b_3 b_1 = \angle a_1 b_3 b_2$$

因此，三點  $b_1, b_2, b_3$  在同一直線上（以上是關於 Simson 線的定理之證明）。

現在來證明直線  $a_1 a'_1$  與 Simson 線  $b_1 b_2 b_3$  平行。因為  $\angle a_2 a_0 a'_1 = \angle a_2 a_1 a'_1$ （在同一圓弧  $a_2 a'_1$  上）故

$$\angle a_2 b_3 b_1 = \angle a_2 a_1 a'_1$$

即同位角相等。故  $a_1 a'_1 \parallel b_1 b_2$ 。

至於定理 3 的逆命題是否成立？對於此問題可得下面定理：

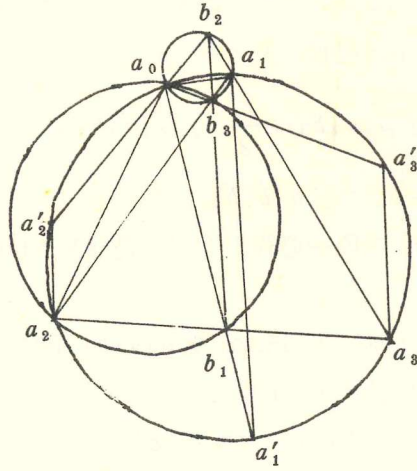
【定理 4】 設  $a_0$  為  $\triangle a_1 a_2 a_3$  之外接圓上任一點。經過點  $a_1, a_2, a_3$  分別作互相平行的三直線使其與圓的第二交點分別為  $a'_1, a'_2, a'_3$ 。設直線  $a_0 a'_1, a_0 a'_2, a_0 a'_3$  與邊  $a_2 a_3, a_3 a_1, a_1 a_2$  之交點分別為  $b_1, b_2, b_3$ ，則  $b_1, b_2, b_3$  三點為共線，並且  $a_0 b_1, a_0 b_2, a_0 b_3$  分別與邊  $a_2 a_3, a_3 a_1, a_1 a_2$  所成的角皆為相等，但是不一定為直角。

【證明】 於圓中假設  $a_1 a'_1 \parallel a_2 a'_2 \parallel a_3 a'_3$ 。

$$\begin{aligned} \angle a_0 b_2 a_1 &= \angle a'_2 b_2 a_3 \\ &= \{ \widehat{a'_2 a_3} \text{ 上之圓周角} \} - \{ \widehat{a_0 a_1} \text{ 上之圓周角} \} \\ &= \{ \widehat{a'_2 a_2} \text{ 上之圓周角} \} + \{ \widehat{a_2 a'_1} \text{ 上之圓周角} \} \\ &\quad + \{ \widehat{a'_1 a_3} \text{ 上之圓周角} \} - \{ \widehat{a_0 a_1} \text{ 上之圓周角} \} \\ &= \{ \widehat{a'_2 a_2} \text{ 上之圓周角} \} + \{ \widehat{a'_2 a_0} \text{ 上之圓周角} \} \\ &\quad + \{ \widehat{a_1 a'_3} \text{ 上之圓周角} \} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \angle a_0 b_3 a_2 \\
 &= \angle a_0 b_1 a_2
 \end{aligned}$$



因此，如果  $a_1 a'_1 \parallel a_2 a'_2 \parallel a_3 a'_3$  則

$$\angle a_0 b_2 a_1 = \angle a_0 b_3 a_2 = \angle a_0 b_1 a_2$$

成立。反之如果  $\angle a_0 b_3 a_2 = \angle a_0 b_1 a_2$  成立，則  $\widehat{a_1 a'_1} = \widehat{a'_1 a_3}$ ，即

$a_1 a'_1 \parallel a_3 a'_3$ 。又從  $\angle a_0 b_2 a_1 = \angle a_0 b_3 a_2$  可得

$\widehat{a_2 a'_1}$  上的圓周角  $= \widehat{a_0 a_1}$  的圓周角  $= \widehat{a'_2 a_0}$  上的圓周角

(此因  $\widehat{a'_1 a_3} = \widehat{a_1 a_3}$  之故)。因此  $\widehat{a_2 a'_1} = \widehat{a'_2 a_0}$ 。故  $a_1 a'_1 \parallel a_2 a'_2$  以上

已證了： $a_1 a'_1 \parallel a_2 a'_2 \parallel a_3 a'_3 \iff$

$$\angle a_0 b_2 a_1 = \angle a_0 b_3 a_2 = \angle a_0 b_1 a_2。$$

此時可得 四點  $a_0, b_3, a_1, b_2$  在同一圓周上。

四點  $a_0, b_3, b_1, a_2$  亦在同一圓周上。

故  $\angle b_2 a_0 a_1 = \angle b_2 b_3 a_1$ ， $\angle a_2 a_0 b_1 = \angle a_2 b_3 b_1$ 。

又因  $a_0 a_1 a_2 a_3$  在同一圓周上， $\angle a_0 a_2 b_1 = \angle a_0 a_1 b_2$ ，三角形三角之和為  $\pi$ ，故

$$\angle a_2 a_0 b_1 + \angle a_0 b_1 a_2 + \angle a_0 a_2 b_1 = \angle b_2 a_0 a_1 + \angle a_0 b_2 a_1 + \angle a_0 a_1 b_2$$

由此式可得

$$\angle a_2 a_0 b_1 = \angle b_2 a_0 a_1,$$

因此，可得

$$\angle a_2 b_3 b_1 = \angle a_1 b_3 b_2.$$

所以三點  $b_1, b_2, b_3$  在同一直線上。

接著來證明直線  $b_1 b_3$  與直線  $a_1 a'_1$  平行如下：

$$\angle a_0 a_2 b_3 = \angle a_0 b_1 b_3 \quad (\text{在同一圓弧上的圓周角})$$

$$\angle a_0 a_2 a_1 = \angle a_0 a'_1 a_1 \quad (\text{在同一圓弧上的圓周角})$$

故  $\angle a_0 b_1 b_3 = \angle a_0 a'_1 a_1$  (同位角相等)。

因此可得  $b_1 b_3 \parallel a_1 a'_1$ 。

由上面的證明亦可得下面定理：

【定理 5】 設  $a_0$  為  $\triangle a_1 a_2 a_3$  之外接圓上任一點。經過點  $a_0$  引三直線使其分別與邊  $a_2 a_3, a_3 a_1$  及  $a_1 a_2$  成相等的角，並且與這些邊分別交於  $b_1, b_2, b_3$ ，則這些三點為共線。如果直線  $a_0 b_1, a_0 b_2, a_0 b_3$  分別與圓之第二交點依次為  $a'_1, a'_2, a'_3$ ；則直線  $a_1 a'_1, a_2 a'_2, a_3 a'_3$  和直線  $b_1 b_2 b_3$  互為平行。

在定理 5 中所得的直線  $b_1 b_2 b_3$  稱為擴張的 Simson 線。定理中的三相等角等於直角時， $b_1 b_2 b_3$  即為原來的 Simson 線。定理 5 是關於 Simson 定理的推廣。

因為在擬似變換 (affine transformations) 之下，圓變換為橢圓，平行線變換為平行線，共線的點變換為共線的點，故可以很容易的得到定理 4 的擬似推廣：

【定理 6】 設  $\Sigma$  為一有心二次曲線。 $a_0, a_1, a_2, a_3$  為  $\Sigma$  上的四點。經過點  $a_1, a_2, a_3$  分別作互相平行的三直線使其與  $\Sigma$  之第二交點分別為  $a'_1, a'_2, a'_3$ 。又設直線  $a_0 a'_1, a_0 a'_2, a_0 a'_3$  與  $\triangle a_1 a_2 a_3$  三邊  $a_2 a_3, a_3 a_1,$

$a_1a_2$  之交點分別為  $b_1, b_2$  及  $b_3$ ，則  $b_1, b_2, b_3$  為共線，並且直線  $b_1b_2b_3$  亦與直線  $a_1a_1'$  等平行。

現在來討論定理 6 的射影的推廣。射影變換為把點變換為點，直線變換為直線，使點在直線上或直線經過點的性質不變並且使非調和比不變的變換。二條直線平行可看成經過一個無限遠點的二直線，故在定理 6 中三直線  $a_1a_1', a_2a_2', a_3a_3'$  經過同一無限遠點。在射影變換之下不能區別無限遠點，故平行的三直線變換為交於同一點的直線。二次曲線變換為一般的二次曲線。故定理 6 之射影的推廣可敘述如下：

【定理 7】(Aubert 定理) 設  $\triangle a_1a_2a_3$  為內接於一圓錐曲線  $\Sigma$  的三角形， $a_0$  為此圓錐曲線上任一點。又設  $c$  為此圓錐曲線所在的平面上任一點。設直線  $a_1c, a_2c, a_3c$  與圓錐曲線  $\Sigma$  之第二交點分別為  $a_1', a_2', a_3'$ 。又設直線  $a_0a_1', a_0a_2', a_0a_3'$  分別與邊  $a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2$  之交點為  $b_1, b_2, b_3$ ，則四點  $b_1, b_2, b_3$  及  $c$  為共線。

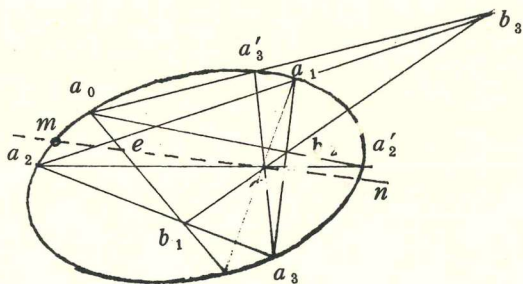
此定理可以很簡單地用關於圓錐曲線之 Pascal 的定理證明之。先敘述 Pascal 的定理於下：

【Pascal 定理】 設  $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$  為內接於一圓錐曲線之六邊形（即其頂點  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  均在一圓錐曲線上）。又設其對邊  $a_1a_2$  和  $a_4a_5$  之交點為  $p$ ，對邊  $a_2a_3$  和  $a_5a_6$  之交點為  $q$ ，對邊  $a_3a_4$  和  $a_6a_1$  之交點為  $r$ ，則  $p, q, r$  三點為共線。（證明省略）

【定理 7 之證明】 先考慮內接於  $\Sigma$  的六邊形  $a_0a_1'a_1a_2a_3a_3'$  對邊  $a_0a_1'$  與  $a_2a_3$  之交點為  $b_1$ ，對邊  $a_1'a_1$  與  $a_3a_3'$  之交點為  $c$ ，對邊  $a_1a_2$  與  $a_3'a_0$  之交點為  $b_3$ ，故依上述的 Pascal 定理， $b_1, c, b_3$  三點為共線。

同樣地考慮  $\Sigma$  的內接六邊形  $a_0a_2'a_2a_3a_1a_1'$ ，可證  $b_1, c, b_2$  為共線。又考慮  $\Sigma$  的內接六邊形  $a_0a_3'a_3a_1a_2a_2'$  可證  $b_2, c, b_3$  為共線。故可知

$b_1, b_2, b_3$  及  $c$  為共線。



定理 7 為定理 4 和定理 6 的射影的推廣。那麼從定理 5 能否得到其射影的推廣？其答案是肯定的。為了說明其可推廣的背景，我們必須先說明 Laguerre 角的意義。

首先來說明無限遠虛圓點。設  $(x, y)$  為平面上之直角座標。 $(x_1, x_2, x_3)$  為同一平面的齊次座標且滿足  $x_1 : x_2 : x_3 = x : y : 1$ 。此時  $x_3 = 0$  為無限遠直線之方程式。設

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

為所考慮的平面上任一圓。此圓與無限遠直線之交點之齊次座標滿足

$$x_3 = 0 \quad \text{及} \quad x_1^2 + x_2^2 = 0。$$

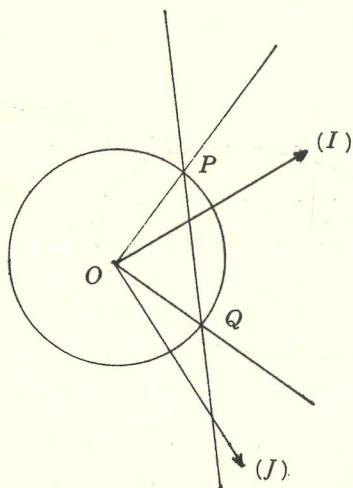
故其座標為

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \pm i : 0。$$

顯然，任何圓均經過此二點，以  $I, J$  表之。 $I, J$  即稱為無限遠虛圓點。

設  $P, Q$  為單位圓上的二點，其直角座標分別為  $(x_1, y_1)$  及  $(x_2, y_2)$ 。點  $O$  為單位圓之中心，其座標為  $(0, 0)$ 。我們想把  $\angle POQ$  以非調和比來表示。設  $R$  為直線  $PQ$  上任一點，則其直角座標為

$$\left( \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \right),$$



此處， $\lambda$  為  $PR : RQ$  之比。直線  $OR$  經過無限遠虛圓點  $I$  或  $J$  之條件為

$$(x_1 + \lambda x_2)^2 + (y_1 + \lambda y_2)^2 = 0$$

即  $\lambda^2 + 2 \cos \theta \lambda + 1 = 0$

此方程式之二根分別表為

$$\lambda_1 = -(\cos \theta + i \sin \theta),$$

$$\lambda_2 = -(\cos \theta - i \sin \theta)。$$

故 
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} = e^{2i\theta}。$$

另一方面，四直線  $OP$ ， $OQ$ ， $OI$ ， $OJ$  之非調和比為

$$O(PQ, IJ) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ \frac{x_1 + \lambda_1 x_2}{1 + \lambda_1} & \frac{y_1 + \lambda_1 y_2}{1 + \lambda_1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ \frac{x_1 + \lambda_1 x_2}{1 + \lambda_1} & \frac{y_1 + \lambda_1 y_2}{1 + \lambda_1} \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ \frac{x_1 + \lambda_2 x_2}{1 + \lambda_2} & \frac{y_1 + \lambda_2 y_2}{1 + \lambda_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ \frac{x_1 + \lambda_2 x_2}{1 + \lambda_2} & \frac{y_1 + \lambda_2 y_2}{1 + \lambda_2} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \circ$$

因此，可得

$$O(PQ, IJ) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = e^{2i\theta},$$

即

$$\theta = \frac{1}{2i} \cdot \log O(PQ, IJ) \circ$$

這就是 Laguerre 角的意義。

在定理 5 中

$$\begin{aligned} & \text{直線 } a_0b_1 \text{ 與邊 } a_2a_3 \text{ (二直線 } b_1a_3) \text{ 所成的角} \\ &= \text{直線 } a_0b_2 \text{ 與邊 } a_3a_1 \text{ (二直線 } b_2a_1) \text{ 所成的角} \\ &= \text{直線 } a_0b_3 \text{ 與邊 } a_1a_2 \text{ (二直線 } b_3a_2) \text{ 所成的角。} \end{aligned}$$

故依 Laguerre 角的意義

$$b_1(a_0a_3, IJ) = b_2(a_0a_1, IJ) = b_3(a_0a_2, IJ)$$

或  $b_1(IJ; a_0a_3) = b_2(IJ; a_0a_1) = b_3(IJ, a_0a_2)$  成立。

因為非調和比在射影變換之下不變。如果在射影變換之下圓變換為一圓錐線  $\Sigma$ ， $I, J$  二點變換為  $\Sigma$  上二點  $m, n$ ，則定理 5 可射影的推廣之如下：

【定理 8】(高須定理) 設  $a_1, a_2, a_3, a_0, m, n$  為在同一圓錐曲線  $\Sigma$  上的六點。設點  $b_1, b_2, b_3$  分別在  $\triangle a_1a_2a_3$  的邊  $a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2$  上，且滿足

$$b_2(m, n; a_0, a_1) = b_3(m, n; a_0, a_2) = b_1(m, n; a_0, a_3) = k;$$

則三點  $b_1, b_2, b_3$  為共線，而且  $a_1a'_1, a_2a'_2, a_3a'_3$  和  $b_1b_2b_3$  四直線經過同一點  $c$ 。此處  $a'_1, a'_2, a'_3$  分別為三直線  $a_0b_1, a_0b_2, a_0b_3$  與圓錐曲線之第二交點。

【證明】 因為直線  $b_1a_2$  二直線  $b_1a_3$ ，由假定可得

$$b_3(m, n; a_0, a_2) = b_1(m, n; a_0, a_2) \circ$$

因此  $m, n, b_3, a_2, b_1, a_0$  交點在同一圓錐曲線  $\Sigma_1$  上。故

$$a_2(m, n; a_0, b_3) = b_1(m, n; a_0, b_3) \circ$$

同理，因為直線  $b_2a_1$  和直線  $b_2a_3$  為同一直線，可得

$$(*) \quad b_2(m, n; a_0, a_3) = b_1(m, n; a_0, a_3) \circ (\text{假定})$$

故  $m, n, b_1, a_0, a_3, b_2$  六點在同一圓錐曲線上。因此

$$(**) \quad a_3(m, n; a_0, b_2) = b_1(m, n; a_0, b_2) \circ$$

又，因  $a_1, a_2, a_3, a_0, m, n$  在同一圓錐曲線上，有下面關係：

$$a_2(m, n; a_0, a_1) = a_3(m, n; a_0, a_1) \circ$$

因為直線  $a_2a_1$  與直線  $a_2b_3$  相同，直線  $b_2a_3$  與直線  $a_3a_1$  相同。

$$(***) \quad a_2(m, n; a_0, b_3) = a_3(m, n; a_0, b_2) \circ$$

因此，由  $(*)$ ， $(**)$  及  $(***)$  可得

$$b_1(m, n; a_0, b_2) = b_1(m, n; a_0, b_3) \circ$$

故直線  $b_1b_2$  與直線  $b_1b_3$  為同一直線。即  $b_1, b_2, b_3$  為共線。最後部分，即四直線  $a_1a'_1, a_2a'_2, a_3a'_3$  及  $b_1b_2b_3$  經過同一點  $c$  可以很容易由下面引理得到：

【引理 1】(Aubert 定理之逆命題) 設  $a_1, a_2, a_3, a_0$  四點在一圓錐曲線  $\Sigma$  上， $b_1, b_2, b_3$  三點分別在  $\triangle a_1a_2a_3$  之三邊  $a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2$  上。又設  $a'_1, a'_2, a'_3$  分別為直線  $a_0b_1, a_0b_2, a_0b_3$  與圓錐曲線  $\Sigma$  之第二交點。則  $b_1, b_2, b_3$  三點為共線之充要條件係三直線  $a_1a'_1, a_2a'_2, a_3a'_3$  相交於同一點  $c$ 。此時  $b_1, b_2, b_3, c$  為共線。

【證明】 設  $a_1a'_1$  與  $a_3a'_3$  之交點為  $c_2$ ； $a_2a'_2$  與  $a_1a'_1$  之交點為  $c_3$ ， $a_2a'_2$  與  $a_3a'_3$  之交點為  $c_1$ 。現在考慮圓錐曲線  $\Sigma$  之內接六邊形  $a_0a'_1a_1a_2a_3a'_3$ 。此時  $b_1, b_2, b_3$  分別為直線  $a_0a'_1$  與邊  $a_2a_3$ ，直線  $a_0a'_2$  與邊  $a_3a_1$ ，直線  $a_0a'_3$  與邊  $a_1a_2$  之交點。因為點  $b_1, c_2, b_3$  分別為內接六邊形  $a_0a'_1a_1a_2a_3a'_3$  之對邊之交點，故為共線。

同理，可得： $b_1, c_3, b_2$  為共線，又  $b_2, c_1, b_3$  為共線。先假設  $b_1, b_2, b_3$  為共線。因為  $b_1, c_2, b_3$  共線， $a_1a'_1$  與直線  $b_1b_2b_3$  之交點為  $c_2$ 。又因為  $b_1, c_3, b_2$  共線， $a_1a'_1$  與直線  $b_1b_2b_3$  之交點為  $c_3$ 。因此  $c_2 = c_3$ 。同理可證  $c_2 = c_1$ 。故三直線  $a_1a'_1, a_2a'_2, a_3a'_3$  相交於同一點  $c_1 = c_2 = c_3 \equiv c$ 。逆命題顯然成立。由 Aubert 定理可知  $b_1, b_2, b_3, c$  為共線。

由定理 8 的證明，可知：定理 8 的這一種射影的推廣必然亦為定理 7 的那一種射影的推廣。那麼反過來，定理 7 那一種射影的推廣是否亦為定理 8 的這一種射影的推廣？其答案亦為肯定的。為討論此事我們需要下面引理：

【引理 2】 設  $a_1, a_2, a_3, a_0, m, n$  等為一圓錐曲線  $\Sigma$  上六點。設一直線與  $\triangle a_1a_2a_3$  之三邊  $a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2$  之交點分別為  $b_1, b_2, b_3$ 。又設直線  $a_0b_1, a_0b_2, a_0b_3$  和圓錐曲線  $\Sigma$  之第二交點分別為  $a'_1, a'_2, a'_3$ 。假設三直線  $a_1a'_1, a_2a'_2, a_3a'_3$  相交於直線  $b_1b_2b_3$  上的一點  $c$ 。此時，使

$$b_2(m, n; a_0, a_1) = b_3(m, n; a_0, a_2) = b_1(m, n; a_0, a_3)$$

成立之充要條件係點  $c$  在直線  $mn$  上。

【證明】 充分性（必要性之證明從略）

設點  $c$  在直線  $mn$  上。又設直線  $a_0b_1$  與直線  $mn$  之交點為  $\ell$ 。因為  $a_1a'_1, a_2a'_2, a_3a'_3$  之交點為  $c$ ，得知  $a_1a'_1, a_2a'_2, a_3a'_3$  各直線與  $mn$  之交點為  $c$ 。直線  $b_1b_2b_3$  與直線  $mn$  之交點亦為  $c$ 。此時可得

$$a'_1(m, n; c, \ell) = b_1(m, n; c, \ell)。$$

因為直線  $b_1\ell$  與直線  $a'_1a_0$  相等，可得

$$a'_1(m, n; c, b_1) = b_1(m, n; c, a_0) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

其次，因為六點  $a_1, a'_1, a_2, a_0, m, n$  在圓錐曲線  $\Sigma$  上，有下面關係：

$$a'_1(m, n; a_1, a_0) = a_2(m, n; a_1, a_0)$$

即



$$a'_1(m, n; c, b_1) = a_2(m, n; a_1, a_0) \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

此因直線  $a'_1c$  = 直線  $a'_1a_1$ ，直線  $a'_1a_0$  = 直線  $a'_1b_1$  之故。由①和②兩式可得：

$$a_2(m, n; a_1, a_0) = b_1(m, n; c, a_0)$$

即  $a_2(m, n; b_3, a_0) = b_1(m, n; b_3, a_0)$ 。

此因直線  $a_1a_2$  = 直線  $a_2b_3$  之故。

因此， $m, n, a_2, b_3, a_0, b_1$  六點在同一圓錐曲線上。所以

$$b_3(m, n; a_0, a_2) = b_1(m, n; a_0, a_2)$$

$$= b_1(m, n; a_0, a_3)$$

(因直線  $b_1a_2$  = 直線  $b_1a_3$ )

另一方面，因為  $m, n, a_1, a'_1, a_0, a_3$  在圓錐曲線  $\Sigma$  上，有下面關係：

$$a'_1(m, n; a_1, a_0) = a_3(m, n; a_1, a_0)$$

即  $a'_1(m, n; c, a_0) = a_3(m, n; b_2, a_0)$ 。

此因 直線  $a_1a'_1$  = 直線  $a'_1c$ ，直線  $a_3a_1$  = 直線  $a_3b_2$

之故。又因直線  $b_1c$  與直線  $b_1b_2$  相同，由①式，可得

$$a'_1(m, n; c, a_0) = b_1(m, n; b_2, a_0)$$

由上式可得

$$a_3(m, n; b_2, a_0) = b_1(m, n; b_2, a_0)$$

因此， $a_3, b_1, m, n, b_2, a_0$  六點在同一圓錐曲線上。所以，可得

$$b_1(m, n; a_0, a_3) = b_2(m, n; a_0, a_3)$$

$$= b_2(m, n; a_0, a_1)$$

(因直線  $b_2a_3$  = 直線  $b_2a_1$ )，

有了此式，就可由下列引理得到下式：

$$b_1(m, n; a_0, a_3) = b_2(m, n; a_0, a_1) = b_3(m, n; a_0, a_2)$$

【引理 3】 設六點  $a_1, a_2, a_3, a_0, m, n$  在一圓錐曲線  $\Sigma$  上。又設一直線與  $\triangle a_1a_2a_3$  之三邊  $a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2$  之交點分別為  $b_1, b_2, b_3$ 。

此時，如果

$$b_1(m, n; a_0, a_3) = b_3(m, n; a_0, a_2)$$

成立，則下式亦成立：

$$b_2(m, n; a_0, a_1) = b_3(m, n; a_0, a_2) = b_1(m, n; a_0, a_3)。$$

【證明】 由下列關係：

$$\begin{aligned} b_3(m, n; a_0, a_2) &= b_1(m, n; a_0, a_3) \\ &= b_1(m, n; a_0, a_2) \\ &\quad (\text{因直線 } b_1a_3 = \text{直線 } b_1a_2)。 \end{aligned}$$

可知六點  $m, n, b_3, a_2, b_1, a_0$  在同一圓錐曲線上。因此，

$$a_2(m, n; a_0, b_3) = b_1(m, n; a_0, b_3) \dots\dots\dots ①$$

另外，因為  $a_1, a_2, a_3, m, n, a_0$  在所考慮的圓錐曲線  $\Sigma$  上有下面關係：

$$a_2(m, n; a_0, a_1) = a_3(m, n; a_0, a_1)$$

即  $a_2(m, n; a_0, b_3) = a_3(m, n; a_0, b_2) \dots\dots\dots ②$

此因 直線  $a_1a_2 =$  直線  $a_2b_3$ ，直線  $a_3a_1 =$  直線  $a_3b_2$

之故。由 ① 和 ② 二式可得

$$\begin{aligned} b_1(m, n; a_0, b_3) &= a_3(m, n; a_0, b_2) \\ &= b_1(m, n; a_0, b_2) \\ &\quad (\text{因直線 } b_1b_3 = \text{直線 } b_1b_2) \end{aligned}$$

由此式得知： $m, n, a_0, b_1, b_2, a_3$  六點在同一圓錐曲線上。故有下面關係：

$$b_2(m, n; a_0, a_3) = b_1(m, n; a_0, a_3)$$

即  $b_2(m, n; a_0, a_1) = b_1(m, n; a_0, a_3)。$

此因直線  $b_2a_3$  與直線  $b_2a_1$  相同之故。

利用引理 2，可證明：定理 7 所講的那一種射影的推廣亦可視為定理 8 所講的這一種射影的推廣。其理由如下：在定理 7 所講的那一種射影的推廣中，在所考慮的圓錐曲線  $\Sigma$  上任取一點  $m$ 。設直線  $mc$  與圓錐曲線  $\Sigma$  的第二

交點爲  $n$ 。因爲點  $c$  在直線  $mn$  上依引理 2 可得

$$b_2(m, n; a_0, a_1) = b_3(m, n; a_0, a_2) = b_1(m, n; a_0, a_3)$$

之故。如此定理 7 和定理 8 所作的二種射影的推廣中，沒有一種會比另一種廣義。

現在來討論由定理 8 可得的擬似的敘述。

【定理 9】 設  $a_1, a_2, a_3, a_0$  爲一圓錐曲線  $\Sigma$  上四點，又設  $m_\infty, n_\infty$  爲圓錐曲線  $\Sigma$  與無限遠直線之交點。假設  $b_1, b_2, b_3$  分別爲  $\triangle a_1 a_2 a_3$  邊  $a_2 a_3, a_3 a_1, a_1 a_2$  上的點，並且滿足

$$b_1(m_\infty, n_\infty; a_0, a_3) = b_2(m_\infty, n_\infty; a_0, a_1) = b_3(m_\infty, n_\infty; a_0, a_2) = k,$$

則  $b_1, b_2, b_3$  三點爲共線。又四直線  $a_1 a'_1, a_2 a'_2, a_3 a'_3$  及  $b_1 b_2 b_3$  互爲平行。此處  $a'_1, a'_2, a'_3$  分別爲直線  $a_0 b_1, a_0 b_2, a_0 b_3$  與圓錐曲線  $\Sigma$  之第二交點。

下面定理可視爲定理 9 的特殊情形：

【定理 10】 設  $a_1, a_2, a_3, a_0$  四點在一圓錐曲線  $\Sigma$  上。又設  $b_1, b_2, b_3$  爲分別在  $\triangle a_1 a_2 a_3$  之邊  $a_2 a_3, a_3 a_1, a_1 a_2$  上的三點。而且滿足下面條件：即

直線  $b_1 a_0$  及直線  $b_1 a_3$ ；直線  $b_2 a_0$  及直線  $b_2 a_1$ ；直線  $b_3 a_0$  及直線  $b_3 a_2$  等三對直線，其中每一對直線的方向都是關於圓錐曲線  $\Sigma$  的一對共軛直徑的方向；

則  $b_1, b_2, b_3$  三點爲共線。

此定理爲定理 9 中  $k = -1$  之情形。其實，如果直線  $a_3 a_1$  上的無限遠點爲  $c_2$ ，則弦  $a_3 a_1$  之中點  $d_2$  爲滿足  $(a_2 a_3; d_2 c_2) = -1$  之點。故與  $a_2 a_3$  平行的各弦之中點之軌跡爲  $c_2$  關於圓錐曲線  $\Sigma$  之極線。設此極線與無限遠直線之交點爲  $e_2$ ，則  $(m_\infty, n_\infty; e_2, c_2) = -1$ ，而經過  $e_2$  的  $\Sigma$  之直

徑為邊  $a_3 a_1$  方向的共軛直徑。假設  $b_2(m_\infty, n_\infty; a_0, a_1) = -1$ ，則直線  $b_2 a_1$  為直線  $a_3 a_1$ 。故此直線上的無限遠點為  $c_2$ 。又直徑  $b_2 a_0$  上的無限遠點為  $e_2$ 。因此直線  $b_2 a_0$  和直線  $a_3 a_1$  表示互相共軛的二直徑方向。因此，如果  $\Sigma$  與無限遠直線相交於相異二點時，定理 10 之結果與定理 2 之結果相同。但是定理 2 之敘述比定理 10 的敘述簡單而且比較容易了解。沒有必要考慮無限遠點。可以說定理 2 比定理 10 好。

■右圖為三人爬樓梯比賽的大概圖形：

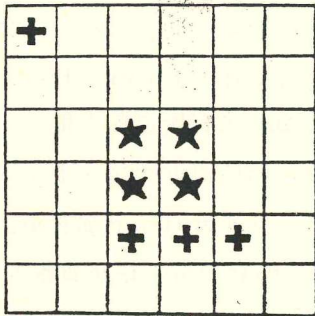
Ackworth 為圖中第一人，以一步三階梯方式參加比賽。

Barnden 為圖中第二人，以一步四階梯方式參加比賽。

Croft 為圖中第三人，一步五階梯，問階梯數為何時 Ackworth 贏得勝利？



■將下圖之大正方形分割成四塊形狀、大小完全相等的圖形，且每塊均含一個 **+**、一個 **★**



### 3. 奇異吸引子

譯者：費毓港  
指導老師：王惠中

Among all mathematical disciplines the theory  
of differential equations is the most important.

— S. Lie

【本文譯自：D. Ruelle, Strange Attractors : The Mathematical  
Intelligencer, 2(1980), 126-137.】

#### 前 言

首先，讓我們比較數學地看一下爲什麼要討論「奇異吸引子」(strange attractor)。

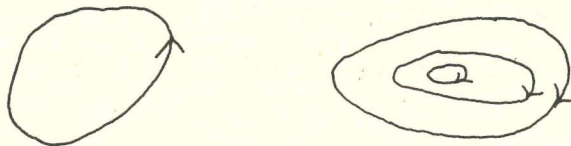
考慮常微分方程

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad f \in C^1$$

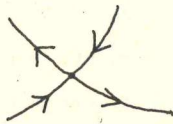
所謂「Cauchy 問題」，乃對給定的  $f$ ，尋求滿足特定初始條件的解，由此產生著名的解之存在唯一性定理 (Euler, Picard)。及後，Poincaré 以動力系統的觀點，透視由微分方程所定義之積分曲線的幾何結構，在相空間上作全域的定性分析，探討解的漸近行爲。令  $x(t)$  爲微分方程的一個解，不失一般性地，可設  $x(t)$  在整條實軸上都有定義 (這是一個定理)。稱  $y$  爲  $x(t)$  的「 $\omega$ -極限點」的意思是：存在實數列  $\{t_n\}$ ， $t_n \rightarrow \infty$ ，使得  $x(t_n) \rightarrow y$ 。而由一些解的全部  $\omega$ -極限點所構成的集合叫做「 $\omega$ -極限集」。它們刻劃出這個系統的最終穩定狀態。因此，了解 (尤其是有界的)  $\omega$ -

極限集之結構就顯得異常重要。其實，所有的有界  $\omega$ -極限集都是由微分方程的解所構成的，當  $d = 2$  時，「Poincaré-Bendixson定理」告訴我們這些解只有兩類：(1)奇點——「平衡點」；(2)閉軌線——（如果是孤立的）「極限環」（limit cycle）。關於前者比較深入且完整的結果，都在假設  $f(x, y) = (P_m(x, y), Q_n(x, y))$ ，其中  $P_m, Q_n$  分別是  $m, n$  次的多項式之下完成的，著重在平衡點的分類上。而對後者而言，即使有此假設，仍然異常複雜。著名的 Hilbert 第 16 問題就是要找出（ $m = n$  固定時）極限環的最大個數  $N(n)$  與其相對位置。現在只有在  $m = n = 2$  的情形算是解決<sup>(1)</sup>：

$N(2) = 4$ ，且此時該 4 個極限環的相對位置為



由於 Poincaré-Bendixson 定理的證明仰賴平面獨有的 Jordan 曲線定理，故很自然地會想到  $d = 3$  時並不會成立（其實，它在緊緻的 2 維流形上也不會成立（A. J. Schwartz））。那麼，究竟是否有不由奇點與閉軌線構成的  $\omega$ -極限集呢？R. N. D'Heedene<sup>(2)</sup> 在 1961 年給出一個反例，說明這種可能性，其中的  $\omega$ -極限集還是很接近週期解。我們希望尋求一些比較複雜的  $\omega$ -極限集，最好是有一個「雙曲結構」（hyperbolic structure）：



這可能就是奇異吸引子的數學動機。

利用「Poincaré 變換」，我們可以把 3 維的微分方程置於一旁，僅討論平面上的變換就可以了，也就是考慮「離散動力系統」：

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

因此就產生了比較容易了解的 Hénon 吸引子（見本譯文，其中當  $a > (5 + 2\sqrt{5})(1 + |b|)^2/4$  時，它有一個雙曲結構）。

其實，奇異吸引子還沒有一個精確的嚴格定義，本文之作者是這方面的先驅，他在 1971 年與 F. Takens 合作的論文中，首先提出以奇異吸引子描述亂流，引起相當的轟動，本文亦有提及。這十餘年間，由於定性、定量之理論與方法相互配合，分歧理論得以蓬勃發展，物理學家要在「混沌現象」（Chaos）裡找尋其中的秩序也漸露曙光，這其中奇異吸引子扮演重要的角色。

最後還要一提的是，對於那種混雜一片的系統，單單幾何的方法是不夠的，我們還須要一些統計的方法——「遍歷理論」（ergodic theory）。本文中提到的「特徵指數」就是其中的一個主題（其他還有「維度」、「熵」（entropy）。最近，已經有一篇這方面比較完整的結果發表了<sup>(3)</sup>。

- (1) Chin Yuan-Shun : Integral Surfaces defined by Ordinary Differential Equation.
- (2) R. N. D'Heedene : A third order autonomous differential equation with almost periodic solutions. J. Math. Analysis Applic., 3(1961)344-350.
- (3) J. P. Eckmann, D. Ruelle : Ergodic theory of Chaos and Strange attractors. Reviews of Modern Physics, 57(1985)617-656.

## 簡介：確定性系統的一些奇想

在物理、化學以及生物學中，常會遇到不規則、非週期、「混沌」的時間發展系統（time evolution system）。譬如，想像一下於平靜空氣裡從香煙頭上升起的縷縷輕煙，當煙柱到達某一高度的時候，會產一種異常複雜、表面上難以理解的振動。雖然，時間之發展遵守著嚴格的確定性（deterministic）定律，但此系統的行為却似乎只取決於它本身的自由意願。物理學家、化學家、生物學家，還有甚至是數學家，都致力於了解這種境況。我們將看到他們如何在其中藉助奇異吸引子的概念以及電腦的操作。<sup>(1)</sup>

一個奇異吸引子是由平面上（如圖 1 A）或  $m$  維空間中無限個點所組成

的。這些點對應到混沌系統中的各種狀態。奇異吸引子是比較抽象的數學概念，但電腦却賦與它們一些生命，並且把它們的圖形也畫出來。（看看後面的圖片，注意電腦只能畫出有限個點。）希望讀者曾經接觸過電腦，以期能重做以下的一些「實驗」。(2)

## 時間發展的描述：動力系統

我們利用參數  $x_1, x_2, \dots, x_m$  決定物理、化學或生物系統中的一個狀態。例如，化學系統取決於各種反應物的濃度。這些參數隨時間而改變，我們把它們在時間  $t$  時的值記成

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t).$$

為簡單起見，我們先考慮整數值的  $t$ （時間限定為秒或年）。後面我們會回來看看時間連續改變的情形。

如何決定這個系統的時間發展，即所謂的動力（dynamics）呢？我們將時間  $t + 1$  時的參數表成時間  $t$  時的函數，從而得到

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= F_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \\ x_2(t+1) &= F_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \\ &\dots\dots\dots \\ x_m(t+1) &= F_m(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \end{aligned} \tag{1}$$

假設函數  $F_1, F_2, \dots, F_m$  均為連續，且有連續之導數。我們的例子都滿足這個「技術性」的可微分條件，以後我們可以看出它的重要性。

給定參數的初值（initial values），對所有正整數  $t$ ，利用(1)，可以一個接一個地算出  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$ 。因此，只要知道系統在時間為 0 時的狀態，就可以算出時間  $t$  的狀態。我們稱函數  $F_1, F_2, \dots, F_m$  決定一個離散時間的動力系統（dynamical system）。由於我們假設函數  $F_1, F_2, \dots, F_m$  具有連續導數，這是一個可微分的動力系統。



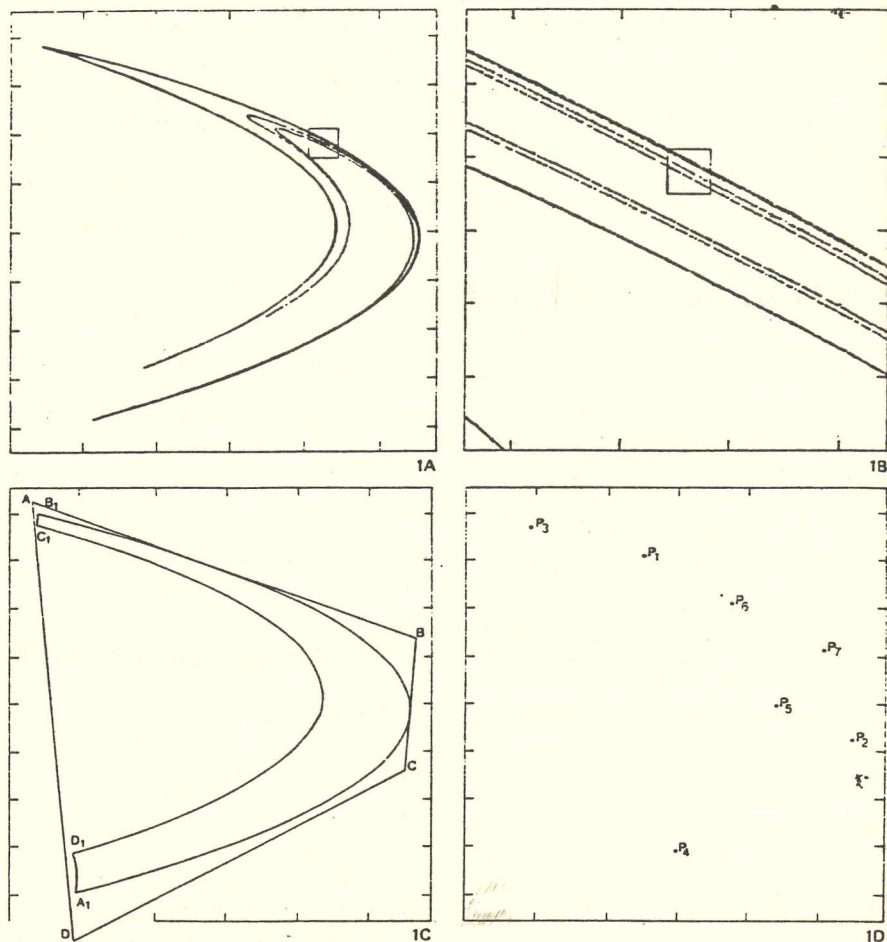


圖 1 給定平面上的點  $(x(0), y(0))$ ，令

$$x(t+1) = y(t) + 1 - ax(t)^2, \quad y(t+1) = bx(t)$$

其中  $a = 1.4, b = 0.3$ 。利用電腦標出  $t$  從 1 到 10000 的點之坐標  $x(t), y(t)$ ，這 10000 個點構成一個複雜的系統——Hénon 吸引子。它是一個奇異吸引子。將圖 1A 中的小正方形放大後就得到圖 1B，再將其中的小正方形放大仍得到同樣的圖像，每經一次放大，會分解出更多的曲線。Hénon 吸引子對應著平面上的一個變換，將點  $(x, y)$  送到  $(F_1(x, y), F_2(x, y))$ ，其中  $F_1(x, y) = y + 1 - ax^2, F_2(x, y) = bx$ 。在此變換下，圖 1C 的四邊形  $ABCD$  被映成它自己裡面的  $A_1B_1C_1D_1$ 。注意  $F_1, F_2$  均為多項式，故有連續之偏導數

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= -2ax & \frac{\partial F_1}{\partial y} &= 1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= b & \frac{\partial F_2}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

可以看出  $A_1B_1C_1D_1$  的面積等於  $ABCD$  面積的  $3/10$  (因為  $b = 0.3$ )。在圖 1D 中，仍然取  $b = 0.3$ ，但  $a$  換成 1.3。奇異吸引子消失了，代之而起的是包含 7 個點的週期吸引子。

## 一個例子：Hénon吸引子

現在，讓我們檢驗一個實際的例子。令  $m = 2$ ，以  $x, y$  代替  $x_1, x_2$ 。  
給定

$$F_1(x, y) = y + 1 - ax^2$$

$$F_2(x, y) = bx$$

其中  $a = 1.4$ ， $b = 0.3$ 。則關係(1)有以下形式：

$$\begin{aligned}x(t+1) &= y(t) + 1 - ax(t)^2 \\ y(t+1) &= bx(t)\end{aligned}\tag{2}$$

給定  $x(0), y(0)$ ，取十六位有效數字，可以算出，譬如  $t = 1, 2, \dots$ ，10000 時的  $x(t)$  與  $y(t)$ 。這用手算的話大概要用好幾個月，且又好像看不出有甚麼真正的意趣，故還沒有人這樣做。另一方面，對「數位計算機」(digital computer)而言，這種鑽孔式的反覆性工作根本不是問題。Nice 氣象觀測站的 Michel Hénon 利用 HP-65 程式型的袖珍電子計算機首先作出這種計算。然後，他又到一個較強的機器上運轉 (IBM 7040)，這個電腦附有一個繪圖器，可以在一張紙上標出坐標為  $x(t), y(t)$  的點，其中  $t$  從 1 跑到 10000。圖 1 A 展示所得到的結果。很意想不到的，這一萬個點落在一系列具有複雜結構的曲線上。如果放大圖 1 A 中的那個小正方形，就得到圖 1 B。而將圖 1 B 中的正方形放大，仍然得到一個類似的圖形，繼續下去，每經一次放大，都會顯現前次沒有看清楚曲線<sup>[1]</sup>。

如果改變初值  $(x(0), y(0))$ ，到底會發生甚麼事情呢？首先，若初值取得「不好」的話，則  $(x(t), y(t))$  會趨近無窮（當然，就會離開那張紙了）。但如果取得好， $(x(1), y(1)), (x(2), y(2)), \dots$  會逐漸靠近圖 1 A 中的「麵條」，在標出幾千點之後，就可以看出這些圖形的一般行為。

我們所謂的「麵條」就是 Hénon 吸引子，它是一個奇異吸引子。它有很多可以引起我們好奇的地方，特別要指出的是，當(2)中的參數  $a, b$  改變時，吸引子會突然消失。例如取  $a = 1.3$  及  $b = 0.3$ ，我們可以看出當  $t$  增加時，點  $(x(t), y(t))$  會趨近於 7 個點  $P_1, \dots, P_7$  (圖 1 D)。如今我們得

到一個（週期為7）的週期吸引子，再不是奇異吸引子了。

爲了要了解這個Hénon吸引子，我們考慮從平面到它本身的變換 $F$ ，定如(2)。若 $x$ 與 $y$ 爲 $X$ 的坐標，則 $F(X)$ 的坐標是

$$F_1(x, y) = y + 1 - ax^2, \quad F_2(x, y) = bx.$$

令 $X_t$ 爲平面上具有坐標 $x(t), y(t)$ 的那點。那麼， $X_1 = F(X_0)$ ， $X_2 = F(F(X_0))$ ， $\dots$ 等等，即將變換 $F$ 作用到 $X_0$   $t$ 次就得到 $X_t$ 。在圖1 C中展示了四邊形 $ABCD$ <sup>(3)</sup>，以及它在 $F$ 作用下的像 $A_1B_1C_1D_1$ 。這個像是由點 $F(X)$ 所構成的集合，其中 $X$ 落在四邊形 $ABCD$ 裡面。Hénon把四邊形 $ABCD$ 取得使其包含像 $A_1B_1C_1D_1$ 。圖1 C說明這個四邊形經過 $F$ 後「摺成兩層」。故若初值 $X_0$ 落在 $ABCD$ 中，則 $X_1$ 會在像 $A_1B_1C_1D_1$ 裡，也因此仍然落 $ABCD$ 中。所以，四邊形 $ABCD$ 包含所有點 $X_1, X_2, \dots, X_t, \dots$ ，還有Hénon吸引子。

## 另一個例子：螺線管

現在，我們來看一下三維空間裏的一個吸引子，即在(1)式中取 $n = 3$ 。我們不再明確地寫出函數 $F_1, F_2, F_3$ 的表示式，只幾何地描述這個從3維空間到其本身的變換 $F$ （此變換 $F$ 將坐標爲 $x_1, x_2, x_3$ 的點映成坐標爲 $F_1(x_1, x_2, x_3), F_2(x_1, x_2, x_3), F_3(x_1, x_2, x_3)$ 的點）。假設 $F$ 把環域 $A$ （圖2 A的實心圓環）拉長，使其變薄，再摺疊成像圖2 B那樣。此圖中同時展示了 $A$ 及其像 $F(A)$ 。像 $F(A)$ 圍著環域 $A$ 的中心繞了兩次。

在環域 $A$ 中取一點 $X_0$ 爲始點，記 $X_1 = F(X_0), X_2 = F(X_1), \dots$ 。圖2 C中展示了5000點 $X_{51}, X_{52}, \dots, X_{5050}$ （以及集合 $F(A)$ ）。一個新的奇異吸引子產生了。因爲 $A$ 中的點 $X_0$ 是任意取的，故一般而言不一定落在吸引子上，但 $X_1, X_2, X_3, \dots$ 會逐漸靠近它。這就爲甚麼我們標出的點要從 $X_{51}$ 開始了。觀測繪圖器（附在HP9830A上的）所畫出來的圖像確是非常迷人的，在一種表面上很隨機的步驟中，每隔大概一秒，就有一聲「卡搭」，同時標出一點。而要推斷吸引子最後的形狀還要花上一段很長的時間。

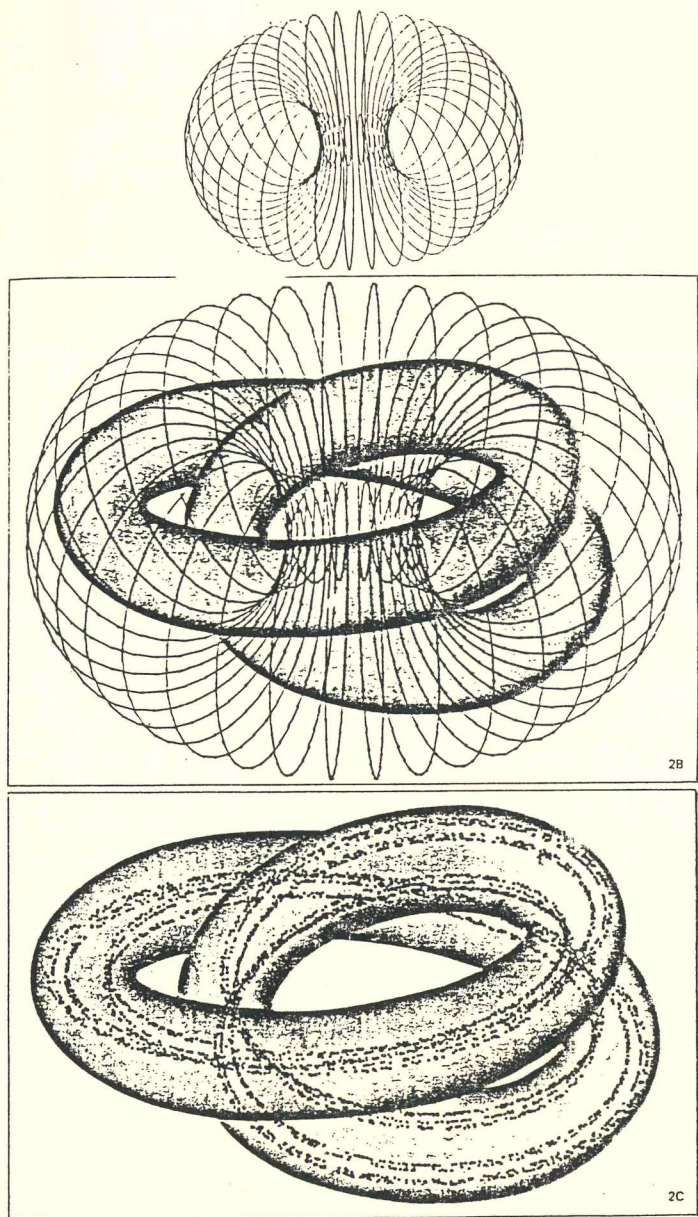


圖 2 螺線管 圖 2 A 是 3 維空間中環域  $A$  的透視圖，變換  $F$  將  $A$  拉長，使它變細，經過摺合把它的像  $F(A)$  置於  $A$  裡面，使得  $F(A)$  繞了  $A$  的中心兩次，如圖 2 B 所示。令  $X_{t+1} = F(X_t)$ ，以某初始點  $X_0$  出發，圖 2 C 展示了落在  $F(A)$  中連續的 5000 個點。這些點組成一個線圈的結構，它是新的奇異吸引子，稱為螺線管。

圖 2 C 中的吸引子稱為螺線管 (solenoid)。事實上，它就彷彿電線繞著一條軸旋轉那樣。要了解它的結構，首先注意到這個螺線管不只包含在圖 2 A 中的環域  $A$  裡，並落在圖 2 C 的像  $F(A)$  中，還有落在  $F(F(A))$ ， $F(F(F(A)))$ ， $\dots$ 。像  $F(A)$  是繞  $A$  的中心 2 次之圓管的內部； $F(F(A))$  落在一條更細的管裡，繞  $A$  的中心 4 次； $F(F(F(A)))$  更細了，且繞了中心 8 次， $\dots$  等等。因此，螺線管包含在一條很薄的圓管中，繞了中心非常多次，這就說明了它的形狀如何。

### 對於初始條件的敏感依賴性：誤差隨時間如何增長

不要忘記參數  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$  是設定來描述物理、化學或生物系統的。我們假設這個系統有一個由方程式(1)所定義之確定性的時間發展。正如無法避免的，當實驗程序出現些微的誤差時，如何去預測它的精確程度呢？當  $t$  增加時，誤差又怎麼樣增加（或減少）呢？當然，答案會跟給定的函數  $F_1, F_2, \dots, F_m$  以及初值  $x_1(0), x_2(0), \dots, x_m(0)$  有關。對剛才的兩個奇異吸引子（Hénon 吸引子與螺線管）而言，由初值之誤差（或不確性）所引發於時間  $t$  時的誤差，會隨  $t$  逐漸地增加。

讓我們以 Hénon 吸引子說明這種現象，已知在此吸引子的四週，存在四邊形  $ABCD$ ，使得  $F$  將它摺成兩層。像圖 1 C 所展示的，這個摺疊同時伴隨著拉長。因此，若  $X_t$  與  $X'_t$  為兩個互相靠近的初值  $X_0$  與  $X'_0$ ，則距離  $d(X_t, X'_t)$  一般會隨  $t$  增加。至少當距離夠小時這是對的；但當從  $X_t$  到  $X'_t$  的距離與吸引子本身的大小相若時，它就不再增加了。說得具體一點，我們發現

$$d(X_t, X'_t) \sim d(X_0, X'_0) \cdot a^t \quad (3)$$

其中  $a \approx 1.52$ 。由於  $a > 1$ ，因子  $a^t$  會隨著  $t$  逐漸（指數地）增加。所以，差額  $d(X_t, X'_t)$  隨時間指數地增長。這個增加的速率決定於  $a$ （或者是它的對數  $\lambda = \ln a$ ，即所謂的「特徵指數」（characteristic exponent），此處  $\lambda \approx 0.42$ ）。<sup>(4)</sup>

我們也可以利用同樣的方法處理螺線管，變換 $F$ 會拉長包含它的每個圓管，就因為是經過拉長，公式(3)依然成立，只是換了一個不同的 $a$ 而已。

由(3)式所描述的那個指數地增加的差額，其實是表示在我們考慮的動力系統中，有著對於初始條件的敏感依賴性（sensitive dependence on initial condition）。

注意到爲了要給(3)式一個精確的意義，我們必須「無窮小地」取 $d(X_0, X'_0)$ ，就是在這裡用到 $F_1, F_2, \dots, F_m$ 具有連續偏導數的假設。再者，對給定的 $X_0$ ，可能會有一些例外的 $X'_0$ ，使得距離的差額不像(3)中所指出的那樣地增長（它甚至會減少）。

### 一點兒數學：奇異吸引子的定義

我們回來看看由方程式(1)所定義的一般動力系統， $F$ 是從 $m$ 維空間到它本身的一個變換，它將坐標爲 $x_1, \dots, x_m$ 的 $X$ 映成具有坐標 $F_1(x_1, \dots, x_m), \dots, F_m(x_1, \dots, x_m)$ 的 $F(X)$ 。我們稱 $m$ 維空間內的集合 $A$ 爲對變換 $F$ 的一個奇異吸引子的意思是，存在一集合 $U$ ，具有下列性質：

- (a)  $U$ 是 $A$ 的一個 $m$ 維鄰域，即：對 $A$ 的每一點 $X$ ，存在一個完全落在 $U$ 中以 $X$ 爲心的小球。特別， $A$ 也包含在 $U$ 內。
- (b) 對在 $U$ 中的每個初值 $X_0$ ，當 $t$ 爲正時，具有坐標 $x_1(t), \dots, x_m(t)$ 的點 $X_t$ 仍然落在 $U$ 中；且只要 $t$ 取得足夠大， $X_t$ 可以任意的靠近 $A$ 。這表示 $A$ 是會吸引的。
- (c) 當 $X_0$ 落在 $U$ 中時，會有一種對於初始條件的敏感依賴性。這使 $A$ 成爲一個奇異吸引子。

在Hénon吸引子的例子中，可以取 $U$ 爲四邊形 $ABCD$ （圖1C），而對螺線管而言， $U$ 可取成實心圓環 $A$ （圖2）。

上面的定義允許我們利用電腦對奇異吸引子作實際的判斷，但在數學上却並不是很完整的，我們還須要加上下面的條件。

(d) 可在  $A$  中找到一點  $X_0$ ，對  $A$  裡的其他點  $Y$ ，無論如何的靠近  $Y$ ，都存在某一點  $X_t$ ，其中  $t$  是正的。這個不可分解 ( indecomposability ) 的條件告訴我們  $A$  不能夠分裂成兩個不同的吸引子。

我們還要把對於初始條件的敏感依賴性弄得更精確一點。不過，這會遭遇一些不太容易了解的問題。我們須要強調的是，奇異吸引子的數學理論是艱深的，某一部份仍屬於萌芽階段。螺線管已經得到明確的了解，這歸功於在 Berkeley 的 Steve Smale<sup>[2]</sup> 的工作。相反的，到目前為止，還不能證明圖 1 A 和 1 B 中所展示的不是一條週期很長的軌跡。只能透過電腦的計算相信 Hénon 吸引子其實是一個奇異吸引子！也可能我們對奇異吸引子所下的定義還要改變，以適用於較一般的情況，並不須要看得那麼嚴格。

「奇異吸引子」一詞首先出現在 Floris Takens ( 在 Groningen 裡 ) 與作者合寫的一篇論文<sup>[3]</sup> 中。我曾經問過 Takens，說他是否成功地創造出這個引人注目的名詞。他的回答是：「你有沒有曾經懷疑過上帝為何要造出這個雜亂的世界呢？…我都不記得了。…通常，我做完就忘了。」因此，儘管奇異吸引子的創造過程充滿了雲霧與暴風，這還是一個漂亮的字，正適合這種使人驚異又僅了解少許的對象。

除了奇異吸引子以外，不要忘記還有一些非奇異的吸引子。例如，吸引的定點 ( attracting fixed points )， $A$  是一個這種點的意思是，只要  $X_0$  落在  $A$  的某個鄰域內，當  $t$  增加時， $X_t$  會任意地靠近  $A$  點。當然，在這種情形裡，隨  $t$  的增加，距離的差額會減少，故沒有對於初始條件的敏感依賴性。吸引的定點是週期吸引子 ( periodic attractors ) 的一種，後者我們剛剛才遇到過，它們都只包含有限個點。

吸引的定點很久以前就被研究了，它們代表了一種漸近的固定狀態，即：對足夠大的  $t$ ， $X_t$  幾乎不再隨  $t$  而變了。同理，週期吸引子描述一種漸近的週期狀態。自然現象的漸近行為都是固定、或者都是週期性的，這是科學家經常用到的觀念。直到最近，他們才對具有對於初始條件敏感依賴性的「混沌」 ( chaotic ) 行為發生興趣，此乃因它們的確在某些自然現象中出現。

## 自然界的奇異吸引子

物理學家、化學家與生物學家利用像(1)中的方程式、或具有連續變化時間的微分方程來描述他們所遭遇到的系統，千萬不要輕視這種數學的理想化過程。某些參數取作變量  $x_1, \dots, x_m$ ，某些却可以忽略，再加以各種的簡化步驟。理想化是自然科學的基本要素，每個嚴謹的科學家都須要證明他在考慮中的自然系統，經過細微的擾動，會服從一些類似(1)中的確定性定律。然後，利用直接的實驗數據、或者經過電腦的模擬，尋找其中的奇異吸引子。就因為這樣，出現在某些現象中的混沌行爲逐漸得以了解，很容易想像得到，這樣的了解有著其實際的應用。

到目前爲止，對自然現象中「混沌」或「亂流」( turbulent ) 式時間發展的探討僅在開創階段，且由於實驗上的困難，以及理論發展的不夠完整，使對研究的進展緩慢。在缺乏圓滿的數學理論之下，電腦在編譯數據上扮演著重要的角色。

現在，我們來看混沌現象的一些例子，特別是流體的亂流行爲。爲此，我們要用到一個連續型的時間  $t$ ，而不再跟前面那樣是離散的了。

## Lorenz吸引子，以及氣象預測

爲了要定義連續時間變化下的可微分動力系統，我們將方程組(1)換成微分方程組

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_1(t) &= G_1(x_1(t), \dots, x_m(t)) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt} x_m(t) &= G_m(x_1(t), \dots, x_m(t)) \end{aligned} \tag{4}$$

假如  $G_1, G_2, \dots, G_m$  滿足某些特定的條件（像具有連續偏導數等），當初始條件  $x_1(0), \dots, x_m(0)$  給定後，方程組(4)唯一地決定出時間  $t$  的函數



$x_1(t), \dots, x_m(t)$ 。因此，正如方程組(1)定義出離散時間型的確定性發展，方程組(4)則代表了一個連續型的確定性時間發展。

我們來舉一個  $m = 3$  的例子，記  $x_1(t) = x$ ， $x_2(t) = y$ ， $x_3(t) = z$ ，考慮微分方程組

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz\end{aligned}\tag{5}$$

其中  $\sigma = 10$ ， $b = 8/3$ ， $r = 28$ 。令初始條件為  $(0, 0, 0)$ ，圖 3 展現由，對應此組方程式之解的點所構成的軌線 (trajectory)。我們再次得到一個奇異吸引子，事實上，可以確實證明它對初始條件具有敏感的依賴性。

圖 3 中的吸引子稱為 Lorenz 吸引子，這個名字是因在 MIT 氣象學系的 Edward Lorenz 教授而來的，事實上，此組方程的確是 Lorenz 首先提出並加以研究的<sup>[4]</sup>。這些方程式近似地描述出在底部加熱之水平流體裝置內狀態，下層的溫暖液體徐徐上升，形成對流。如果在底部的加熱足夠強烈，這種對流呈現很不規則的亂流行為。這個現象出現在地球的大氣層中，並由於它具有對流初始條件的敏感依賴性，可以相信氣象學家不可能很精確地預測一段長時間以後的大氣狀態。因此，Lorenz 的工作對天氣報告的不可靠性給出學理性的根據。

## 亂流：理論物理中一個尚未解決的重大問題

很容易的，譬如打開浴缸或污水槽的塞子，就得到亂流現象。但亂流的本質却充滿了神祕感與爭論性。

原則上我們還可以利用形如(4)的方程組描述黏性 (viscous) 流體的行為，只是此時的  $m$  要取成無限大，這是由於流體的每個瞬時狀態須要用到無

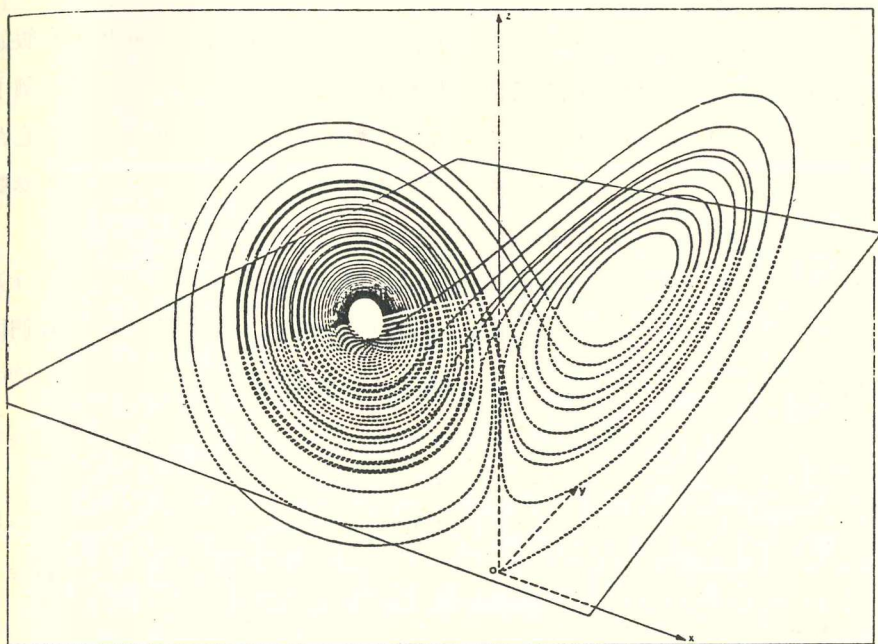


圖3 Lorenz 吸引子 這幅美麗的圖畫是由Berkeley的Oscar Lanford所得到的，這也是一個新的奇異吸引子——Lorenz 吸引子，它是由下列之Lorenz 方程組的解逼近得來的：

$$\frac{dx}{dt} = -10x + 10y, \quad \frac{dy}{dt} = -xz + 28x - y, \quad \frac{dz}{dt} = xy - \frac{8}{3}z。$$

Lanford的解是以時間為 $t = 0$ 在原點 $(0, 0, 0)$ 出發的，它在右邊繞了一圈，再跑到左邊繞好幾圈，然後又回到右邊，這樣以一種很不規律的方式繼續下去。圖中展示了這個解所繞的前50圈，在 $z = 27$ 之平面以下的均以虛線表示。如果我們取在 $(0, 0, 0)$ 附近的另一個初始點，新得出的解會脫離原來的，且從左到右所繞的圈數也不會相同，這就是對於初始條件的敏感依賴性。Lorenz 方程是由大氣層對流的一個問題所引起的，Edward Lorenz 曾用對它的觀察所得解釋氣候預測的不精性。

限個變數方可描述得完全。在不會混淆的情況下，我們以 $X(t)$ 及 $G$ 分別表示 $X_1(t), X_2(t), \dots$ 及 $G_1, G_2, \dots$ 。那麼，方程組(4)可以寫成以下簡潔的形式

$$\frac{d}{dt}X(t) = G_{\mu}(X(t)) \quad (4)$$

在(6)中我們引入參數 $\mu$ ，指出作用於流體上之外在因素的強度。（假如沒有這種外在因素，黏性會使流體靜止，就不會有亂流了）。在塞子的例子中， $\mu$ 表示塞子打開的程度；在Lorenz的對流方程式裡， $\mu$ 就是 $r$ ，它跟流體裝置頂部與底部之間的溫差成正比。在很多流體動力學的問題中，參數 $\mu$ 都扮演著一個所謂Reynolds數的角色。

假如 $\mu = 0$ ，即缺少外在的作用，則流體趨向於一個靜止的狀態 $X(t) = X_0$ ，這對應著我們之動力系統內的一個吸引定點 $X_0$ 。當 $\mu$ 很小時，我們同樣得到一個穩定的狀態 $X(t) = X_{\mu}$ 。隨著 $\mu$ 的繼續增長，可以察覺到流體中一些週期振動，這個意思是，漸近地有

$$X(t) = f(\omega t)$$

其中 $f$ 為一週期 $2\pi$ 的函數， $\omega$ 是振動的頻率。這個狀態對應於連續型時間的一個週期吸引子，即一個「吸引的極限環」（attracting limit cycle）。當 $\mu$ 充分大的時候，流體的運動就呈現不規則的混沌現象：亂流在其中誕生了。

在1970年左右，當我對亂流開始感興趣的時候，數學家與物理學家並不知道Lorenz在1963年的那篇論文，當時最流行的亂流理論乃屬Moscow的Lev D. Landau<sup>[5]</sup>，根據此種理論，亂流的時間發展漸近地應為

$$X(t) = f_k(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_k t) \quad (7)$$

其中 $f_k$ 對每個坐標（角度）均為週期 $2\pi$ 的函數，而 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ 是互相獨立的頻率。形如(7)式中的這種（ $t$ 的）函數稱為擬週期（quasiperiodic）的，（可以看出其所對應的擬週期吸引子是一個 $k$ 維的環面）。每個擬週期函數皆有一非週期、不規則性態，像暗示著亂流的存在。不過，當輕微改變初始條件時，只是把 $\omega_1 t, \dots, \omega_k t$ 換成 $\omega_1 t + \alpha_1, \dots, \omega_k t + \alpha_k$ 而已，其中的 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 乃是很小的數，因此，並沒有對初始條件的敏感依賴性。

利用奇異吸引子來解釋亂流就有一種比較迷人的色彩，還有一個對擬週期吸引子不利的數學論點，就是它的鬆散性，我對這種鬆散性，即欠缺「結構穩定性」( structural stability ) 的注意，是開始於 René Thom 在 I.H.E.S. 的研討會上。將(6)式加上少許的擾動，可以摧毀擬週期性的吸引子，且當  $k \geq 3$  時，會得到一個奇異吸引子。我跟 Floris Takens 在 1971 年把這個結果寫成一篇文章<sup>[3]</sup>，且同時提出以奇異吸引子描述亂流的觀點。雖然，結構穩定性並沒有想像中的重要，但奇異吸引子與亂流却是一個幸運的結合。

現在讓我們看看在描述亂流方面，奇異吸引子究竟要比擬週期吸引子好在那裡。流體動力學的實驗中，並沒有直接測試到對初始條件敏感依賴性的存在。不過，我們可以把過某點的流速看成時間的函數，然後對其作頻率的分析。所謂頻率譜 ( frequency spectrum ) 是一個函數，將頻率對應到振幅的平方 ( 見圖 4 )<sup>[5]</sup>。對擬週期函數而言，頻率譜是由在頻率  $\omega_1, \dots, \omega_k$  及它們的整係數線性組合處形成的離散型尖峰所構成；相反的，若時間的發展為一個奇異吸引子所操縱，則我們會得到一個連續型的頻率譜。

結合一大批互相獨立之頻率，透過極限步驟的模擬，一般人「才」相信亂流的頻率譜是連續型的。最近 ( 1974-75 )，Bell 實驗室的 Guenter Ahlers，以及 New York 州立大學的 Jerry Gollub 和 Harry Swinney 等做了一連串優美的實驗<sup>[6]</sup>，指出情況已有了改變。當系統中的參數  $\mu$  增加時，並沒有逐漸累積一大批互相獨立的離散頻率，亂流很迅速地就轉移到具有連續型頻率譜之特性。因此，奇異吸引子的出現，巧妙地說明了亂流的行爲。

## 其他混沌現象：到處都是亂流

注意到在沒有摩擦力的力學系統 ( 保守系統， conservation system ) 中，不會有吸引子的產生，更談不上奇異吸引子了。事實上，力學中的 Liouville 定理告訴我們，這種情況下，相空間 ( phase space ) 的時間發展會保持體積，這跟在吸引子附近發生的體積收縮情況相衝突。另一方面，保守

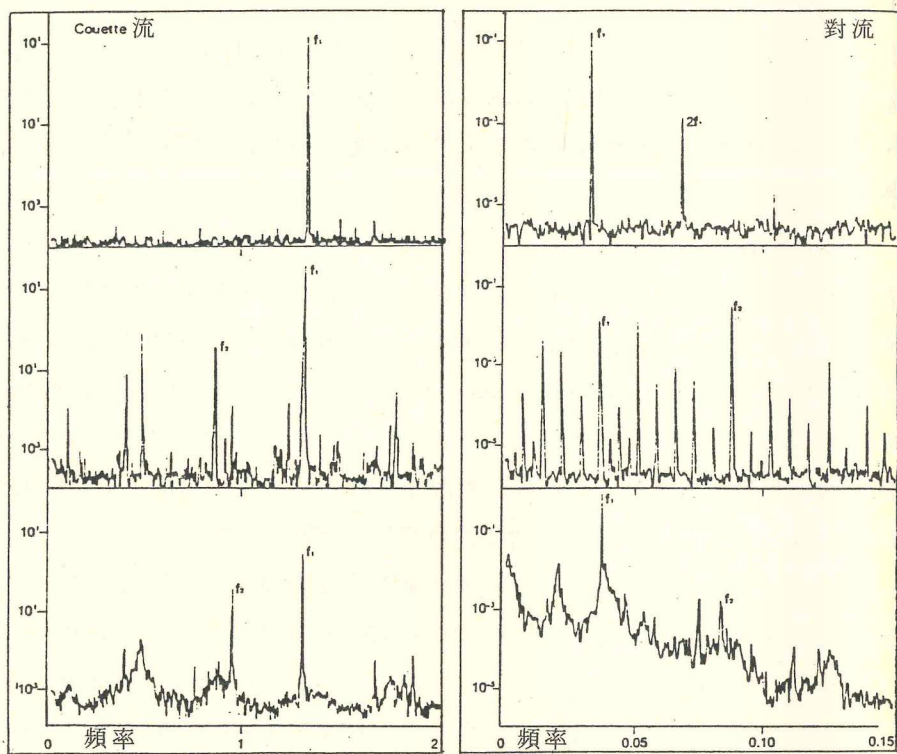


圖 4 頻率譜 一個現象隨時間的變化，無論是否具有週期性，都可作頻率的分析。對每一個頻率，對應到其振幅的平方，從而得到所謂的「頻率譜」。左邊的是由 R. Fenstermacher 對 Couette 流（在兩個共軸的圓柱之間填入液體，而裡面的圓柱作定速的旋轉）之測量而得到。右邊的則是由 S. Benson 對一對流裝置測量得來的。

不同的頻率譜代表了所對應的不同旋轉速度（Couette 流）或加熱的強度（對流）。最上面的頻率譜包含有孤立的頂峰，這是個週期性的系統；中間的頻率譜具有好幾個互相獨立的頻率，它是擬週期性的；最底下的展示了一個連續頻率譜的一系列頂峰，它表示有奇異吸引子的產生。

系統却也常現對原始條件的敏感依賴性。

只有在逸散系統 (dissipative system) 中才會出現奇異吸引子，此時一些較「高級」的能量 (如機械能、電能或化學能等) 會轉換成熱能<sup>[7]</sup>。其實必須一直提供能量到系統中，它才會表現較有意義的行為，否則就歸於靜止。

週期性的化學反應已經得到深入的了解，我曾經在 1971 年問過這方面的一位專家，是否能夠找出一些隨時間變化而產生混沌現象的化學反應。他答覆說，果真如此，他會將實驗報告丟掉，且承認實驗失敗。很不幸的，事情已起了變化，如今我們已擁有一些非週期性的化學反應例子。

地球的磁場地可能提供了一個奇異吸引子；每經過一段沒有一定規律的時間，地球磁場的方向會南北反向一次。在過去的四百萬年中，這種現象最少出現了 16 次。地球物理學家曾經寫下了「動力方程」，它那混沌的解可以描述磁場方向的不規律改變。不過，到目前還沒有一個滿意的定量 (quantitatively) 理論。

生態學家也研究了一些在人口動態中的非週期性模型。如果  $m$  個族群在第  $t + 1$  年的數量  $x_1(t + 1), \dots, x_m(t + 1)$  可利用方程組(1)由在第  $t$  年的數量所決定，那奇異吸引子就很可能發生。事實上，當  $m = 1$  時，方程式

$$x(t + 1) = R x(t)(1 - x(t))$$

就提供了一個非週期性的行為。

很容易想像的，在經濟學中也少不了奇異吸引子的一份，這其中的週期性現象已爲人所熟悉 (經濟循環，economic cycles)。事實上，假如在總體經濟發展的方程中包含有一個描述像技術發展水平的參數  $\mu$ ；類似於流體動力學中的，可以推測當  $\mu$  還小時，經濟處在穩定狀況，當  $\mu$  增加後，週期性與擬週期性的循環相繼出現，當  $\mu$  足夠大時，就產生帶有對原始條件敏感依賴性的混沌現象。這種講法雖較含糊，但結論是頗有建設性的，當然，再經過詳細的分析後，或許更有用處。

作爲這些例子的一個總結，我要提出一個跟大家都有切身關係的動力系

統：心臟。正常的心律是週期性的，但一些非週期性的病態（如心室纖維硬化）會使它趨於死亡的靜止。利用電腦對各種心律動態的數學模型進行研究，很顯然會在藥物調理上有很大的幫助。

前面我們所討論的那些應用裡，都有一個技術上的嚴重問題。如何提供同樣的實驗狀況呢？如何去做精確的測量呢？無論怎樣，在某些問題上承認奇異吸引子的角色，實為觀念上的一大躍進。動力系統中非週期性起伏不一定表示實驗遭受外界隨機的神祕力量所破壞；說不定它代表了一個奇異吸引子的出現，這正是我們須要去了解的。

我還沒有談到奇異吸引子的美：這一堆曲線，這一團雲霧般的點，有時像燦爛的煙火或銀河，有時則教人感到驚嘆與不安。這是一個極待探討的領域，從中會發現它與萬物的和諧性。

### 參考文獻

1. M. Hénon : A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Comm. Math. Phys.* 50(1976)69-77  
S. D. Feit : Characteristic exponents and strange attractor. *Comm. Math. Phys.* 61(1978)249-260.  
J. H. Curry : On the Hénon transformation. *Comm. Math Phys.* 68(1979)129-140.
2. S. Smale : Differentiable dynamical systems *B.A.M.S.* 73(1967)747-817.
3. D. Ruelle : On the nature of turbulence  
F. Takens *Comm. Math. Phys.* 20(1971)167-192,  
23(1971)343-344.  
S. Newhouse : Occurrence of strange Axiom A attractors  
F. Takens near quasiperiodic flows on  $T^m$ ,  $m \geq 3$ ,  
*Comm. Math. Phys.* 64(1978)35-40.
4. E. N. Lorenz : Deterministic nonperiodic flow

J. Atmos. Sci. 20(1963)130-141.

5. L. D. Landau : Fluid mechanics  
E. M. Lifshitz Pergamon, Oxford, 1959.
6. H. L. Swinney : The transition to turbulence  
J. P. Gollub Phy. Today. 31(1978)41-49.
7. I. Prigogine : Introduction to thermodynamics of irreversible processes. Wiley. New York. 1962.
8. R. May : Simple mathematical models with very complicated dynamics.  
Nature, 261(1976)459-467.

## 譯 註

- (1) 有一篇寫得很通俗的文章：  
G. Taubes : The mathematics of chaos, Discover, Sept(1984)  
30-39, 科學月刊(75-2)120-125

- (2) 最好手上還有一片 PHASER，可以馬上看到 Hénon 吸引子和 Lorenz 吸引子。

- (3) 在 Hénon 的原文中，

$$\begin{aligned} A &= (-1.33, 0.42) & B &= (1.32, 0.133) \\ C &= (1.245, -0.14) & D &= (-1.06, -0.5) \end{aligned}$$

- (4)  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|df^n(p)\|)^{1/n}$

$$\lambda = \log a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|df^n(p)\|$$

由遍歷理論中的一個定理知道，存在一個對  $f$  不變的機率測度  $\mu$ ，使得  $f$  是遍歷的，故上面的  $a$ ， $\lambda$  均為常數 ( $\mu - a.e$ )，而且

$$d(x'_i, x_i) = e^{\lambda i} d(x'_0, x_0), \mu - a.e$$

- (5) 頻率譜是一種平均變異量的分析，所謂振幅的大小，可想成受該頻率影響之狀態的多寡。



## 4. 阿貝爾定理

指導老師：林福來

作者：葉新材

在所有每一項皆為可解析函數的函數級數中，冪級數是最簡單，同時是最重要的一種。一般的冪級數可寫為

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

其中  $a, c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$  為複常數， $z$  為複變數。對於一個冪級數，最重要和最基本的問題是它在那裏會收斂？在那裏會發散？我們若想找出一個冪級數的收斂範圍，那麼就要利用以下的定理了。

【阿貝爾第一定理】 (Abel's First Theorem)

設  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$  為一冪級數，則存在

$R \geq 0$  ( $R$  可能為  $+\infty$ ) 使得下面各項成立：

(1) 若  $R = 0$ ，則冪級數  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在  $z = 0$  唯一一點收斂。

(2) 若  $R > 0$ ：

① 當  $|z| < R$  時，則冪級數  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  為絕對收斂。並且對於任一

$0 \leq \rho < R$ ，冪級數  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在  $\{z : |z| \leq \rho\}$  為均勻收斂。

② 當  $|z| > R$  時，則冪級數  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  為發散。

(3) 若  $R = +\infty$ ，則冪級數  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在整個複數平面皆為絕對收斂。

我們可以從阿達馬公式 (Hadamard's Formula) 求出  $R$  的數值：

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

註：(1) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$  存在，則  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$ 。

(2)  $R$  與圓  $|z| = R$  分別稱為冪級數  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的收斂半徑和收斂圓。

(3) 阿貝爾第一定理並沒有說明一個冪級數在其收斂圓上的斂散性，而事實上，冪級數在收斂圓上收斂和發散情況可分為以下三種：

① 在收斂圓上每一點皆為發散。

例：冪級數  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  在其收斂圓  $|z| = 1$  上每一點皆為發散。

因為，若  $z_0$  為圓  $|z| = 1$  上任一點，則  $|z_0| = 1$ ，故  $|z_0^n| = 1, \forall n \in N$ 。

級數  $\sum_{n=0}^{\infty} z_0^n$  顯然為發散。

② 在收斂圓上一些點為收斂，在另外一些點為發散。

例：冪級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  的收斂半徑為 1

我們可利用笛里西列特試驗 (Dirichlet Test) 證明冪級數

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  除了在  $z = 1$  外，在收斂圓上其他每一點皆為收斂。

當  $z = 1$  時， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  為調和級數，故為發散。

③ 在收斂圓上每一點皆為收斂

例：冪級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$  在收斂圓  $|z| = 1$  上每一點皆為絕對收斂。

因為，當  $|z| = 1$  時， $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  為收斂級數，故

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$  為絕對收斂。

阿貝爾第一定理告訴我們一個冪級數在其收斂圓內為絕對收斂，在收斂圓外為發散，並且在收斂圓內任一緊緻子集  $D$  上皆為均勻收斂。因為，對於收斂圓內任一緊緻集  $D$ ，必存在一個  $\rho'$  且  $0 < \rho' < R$  使得  $D$  包含在閉圓盤  $|z| \leq \rho'$  裏，由阿貝爾第一定理知，冪級數  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在  $\{z: |z| \leq \rho'\}$  為均勻收斂，故知冪級數  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在  $D$  上為均勻收斂。既然冪級數  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在其收斂圓  $|z| = R$  上的一些點可能為發散級數，那麼它在閉圓盤  $|z| \leq R$  未必為均勻收斂，但若它在其收斂圓上的某一點為絕對收斂，則它在閉圓盤  $|z| \leq R$  必為均勻收斂。

若  $|z| < R$ ，而  $R$  為冪級數  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的收斂半徑，令  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 。對於收斂圓內任一緊緻子集  $D$ ，因為冪級數  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的每一項皆為連續函數，並且冪級數  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在  $D$  上為均勻收斂，故其極限函數  $f(z)$  在  $D$  上為連續。因此， $f(z)$  在收斂圓內為連續。由於冪級數  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的每一項皆為在複數平

面上可解析函數，我們更可證明  $f(z)$  在收斂圓內為一個可解析函數，而其導

函數可從原冪級數逐項微分所得，即  $f'(z) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ ，其

中冪級數  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$  的收斂半徑相同。因為  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ，由阿

達馬公式知，冪級數  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$  的收斂半徑顯然相同。若  $|z| < R$

，令  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ ，重覆以上的討論， $g(z)$  在收斂圓內為可解析。

我們可以證明逐項微分對原冪級數的收斂半徑沒有影響。我們更進一步知道，冪級數  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  經過逐項微分後，除了它的和在收斂圓內可解析的性質依然保持外，即  $g(z)$  在收斂圓內也為可解析，它在收斂圓內任一緊緻子集上的均勻收斂性質也保持，那麼在收斂圓上也是如此嗎？很可惜的，下面的例子就說明了我們的猜想是錯誤的。

例：冪級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$  在其收斂圓  $|z| = 1$  上為均勻收斂，但冪級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$

在  $z = 1$  為發散級數，故在收斂圓  $|z| = 1$  上不為均勻收斂。

冪級數  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的和  $f(z)$  在其收斂圓內為連續函數，我們進一步探討

$f(z)$  在收斂圓上的連續性，現在我們面對的困難就是：一個冪級數在其收斂

圓上有些點可能是發散。如果我們知道冪級數  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在其收斂圓上的一點

$z_0$  收斂，那麼在甚麼情況下，才能保證：當  $z$  趨近於  $z_0$  時， $f(z)$  會收斂於

$f(z_0)$ 。阿貝爾第二定理 (Abel's Second Theorem)，或稱為阿貝爾極限

定理 (Abel's Limit Theorem) 就是探討這一個問題的定理，在拉爾斯·

亞爾費爾斯 (Lars V. Ahlfors) 的複數分析 (Complex Analysis) 一書

中對阿貝爾第二定理有以下的敘述：

【阿貝爾第二定理】：(Abel's Second Theorem)

假如  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  收斂，當  $z$  趨近於 1 而且  $\frac{|1-z|}{1-|z|}$  保持為有界時，則

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  收斂於  $f(1)$ 。

若  $c_0 + c_1\omega + c_2\omega^2 + \dots + c_n\omega^n + \dots$  為一般收斂圓為  $|\omega| = R$  的冪級數，且在收斂圓上一點  $\omega_0$  收斂，我們可以假設  $R = 1$  且  $\omega_0 = 1$ ，因為線性

變換  $z = L(\omega) = \frac{\omega}{\omega_0}$  可將它轉變成一個新的冪級數，其形式為

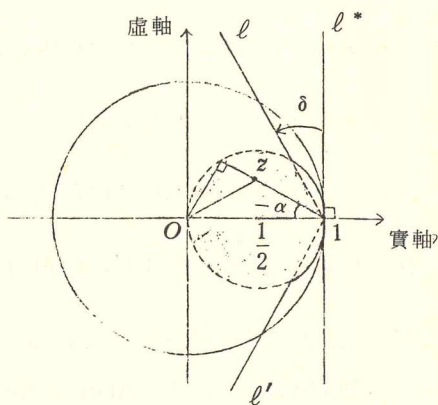
$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

而其收斂半徑為 1，並且將  $\omega = \omega_0$  映至  $z = 1$ 。

從阿貝爾第二定理知，若我們能適當的控制  $\frac{|1-z|}{1-|z|}$  使其保持在有界的情況下，而使  $z$  趨近於 1 時， $f(z)$  則會收斂於  $f(1)$ 。我們現在需要解決的問題，是如何去控制  $\frac{|1-z|}{1-|z|}$  使其

保持有界。林福來老師就這個問題提供了以下的方法：

〔步驟一〕 在  $z = 1$  作一直線  $l^*$  與實軸垂直，然後從  $z = 1$  作一直線  $l$  經過收斂圓  $|z| = 1$  且與  $l^*$  相交一個角  $\delta > 0$ ，



圖一

再作  $\ell$  對於實軸的對稱線  $\ell'$ ，最後作一個以  $\overline{O1}$  為直徑的圓與圓  $|z|=1$  相切於  $z=1$ ，如圖一。設  $D$  為圖一陰影部分所示區域， $D$  叫做以  $z=1$  為頂點的“Stolze angle”。

[求證]  $\forall z \in D$ ， $z = 1 - re^{i\alpha}$ ，其中  $0 < r < 1$ ， $|\alpha| < \frac{\pi}{2} - \delta$ 。

設  $z$  為  $D$  中任一點，

則  $0 < |1-z| < 1$  且  $|\text{Arg}(1-z)| < \frac{\pi}{2} - \delta$ ， $\text{Arg} \omega$  為

$\omega$  的主幅角 ( $-\pi \leq \text{Arg} \omega < \pi$ )

故  $1-z = |1-z| e^{i \text{Arg}(1-z)}$

$$= r e^{i\alpha}，其中 0 < r < 1，|\alpha| < \frac{\pi}{2} - \delta。$$

即  $z = 1 - r e^{i\alpha}$ 。

[步驟二] 設  $\{z_n\}$  為  $D$  中任意一數列

[求證] 數列  $\left\{ \frac{|1-z_n|}{1-|z_n|} \right\}$  有上界

因為  $z_n \in D$ ， $\forall n \in N$ ，

故  $z_n = 1 - r_n e^{i\alpha_n}$ ，其中  $0 < r_n < 1$ ， $|\alpha_n| < \frac{\pi}{2} - \delta$ ，

$\forall n \in N$ 。

$$= 1 - r_n \cos \alpha_n - i r_n \sin \alpha_n$$

$$|z_n|^2 = (1 - r_n \cos \alpha_n)^2 + r_n^2 \sin^2 \alpha_n$$

$$= 1 + r_n^2 - 2r_n \cos \alpha_n$$

$$|z_n| = (1 + r_n^2 - 2r_n \cos \alpha_n)^{1/2}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - k + 1\right)}{k!} (r_n^2 - 2r_n \cos \alpha_n)$$

$$(\because |r_n^2 - 2r_n \cos \alpha_n| < 1)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} (r_n^2 - 2r_n \cos \alpha_n) \\ + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - k + 1\right)}{k!} (r_n^2 - 2r_n \cos \alpha_n)^k$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1 - |z_n|}{|1 - z_n|} &= \frac{1 - |z_n|}{r_n} \\ &= \cos \alpha_n - \frac{1}{2} r_n \\ &\quad - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - k + 1\right)}{k!} \\ &\quad (r_n^2 - 2r_n \cos \alpha_n)^{k-1} (r_n - 2 \cos \alpha_n) \\ &= \frac{2 \cos \alpha_n - r_n}{2} \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdots \left(k - 1 - \frac{1}{2}\right)}{k!} \\ &\quad r_n^{k-1} (2 \cos \alpha_n - r_n)^k \\ &\geq \frac{2 \cos \alpha_n - r_n}{2} \\ &\quad \left( \because 2 \cos \alpha_n - r_n = \frac{1 - |z_n|^2}{r_n} > 0 \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{|1 - z_n|}{1 - |z_n|} \leq \frac{2}{2 \cos \alpha_n - r_n}$$

因爲  $r_n = |1 - z_n| \leq \cos \alpha_n$ ，即  $\cos \alpha_n - r_n \geq 0$ ，

$$\text{故 } \frac{|1 - z_n|}{1 - |z_n|} \leq \frac{2}{\cos \alpha_n}$$

$$\leq \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)} \quad (\because |\alpha_n| < \frac{\pi}{2} - \delta)$$

$$= \frac{2}{\sin \delta}$$

因此，數列  $\left\{\frac{|1-z_n|}{1-|z_n|}\right\}$  有上界。

只要把  $z$  限制在  $D$  上， $\frac{|1-z|}{1-|z|}$  必然保持有界，我們現在就可利用以上的結果來證明阿貝爾第二定理了。

〔步驟三〕 設  $\{z_k\}$  為  $D$  上任意一數列且  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 1$

〔求證〕  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = f(1)$

不失一般性，我們可假設  $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ ，因為我們可隨

意加一個常數至  $a_0$  使其和為零。

令  $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ ， $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \text{則 } s_n(z) &= a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \text{ 其中 } |z| < 1 \\ &= s_0 + (s_1 - s_0)z + \cdots + (s_n - s_{n-1})z^n \\ &= s_0(1-z) + s_1(z-z^2) + \cdots \\ &\quad + s_{n-1}(z^{n-1} - z^n) + s_n z^n \\ &= (1-z)(s_0 + s_1 z + \cdots + s_{n-1} z^{n-1}) + s_n z^n \end{aligned}$$

因為  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n z^n = 0$ ，

$$\text{故 } f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z) = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n。$$

因存在  $M > 0$  使得  $\frac{|1-z_k|}{1-|z_k|} \leq M \quad \forall k \in N$



$$\text{且 } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \text{ 使得 } n \geq m \Rightarrow |s_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$n \geq m \Rightarrow$$

$$|(1-z_k) \sum_{n=m}^{\infty} s_n z_k^n| \leq |1-z_k| \sum_{n=m}^{\infty} |s_n| |z_k|^n$$

$$< \frac{\varepsilon}{2M} |1-z_k| \sum_{n=0}^{\infty} |z_k|^n$$

$$= \frac{\varepsilon}{2M} \frac{|1-z_k|}{1-|z_k|}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore |f(z_k)| \leq |1-z_k| \sum_{n=0}^{m-1} |s_n| |z_k|^n + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< |1-z_k| \sum_{n=0}^{m-1} |s_n| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(\because |z_k| < 1, \forall k \in \mathbb{N})$$

另一方面，因為  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 1$ ，故對同一  $\varepsilon$ ，存在一個

$$k_0 \in \mathbb{N} \text{ 使得 } k \geq k_0 \Rightarrow |1-z_k| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} |s_n|}$$

$$\therefore k \geq k_0 \Rightarrow |f(z_k) - f(1)| = |f(z_k)| < \varepsilon$$

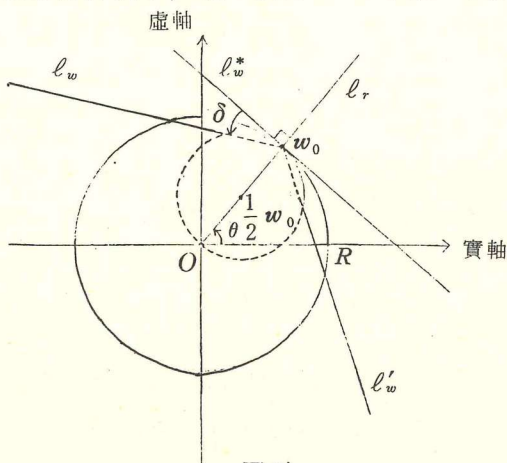
$$\text{即 } \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = f(1)$$

線性變換  $w = L^{-1}(z) = w_0 z$  將冪級數  $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$  轉變回原冪級數  $c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + \cdots + c_n w^n + \cdots$ ，並且將  $z = 1$  映至

$w = w_0$ 。若  $|w| < R$ ，令  $h(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ ，並設  $w_0 = R e^{i\theta}$ ，其中  $\theta$  為一固定實數。那麼，阿貝爾第二定理的一般敘述可寫為：

【定理】 設冪級數  $c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + \cdots + c_n w^n + \cdots$  的收斂半徑為  $R$  且在其收斂圓上的一點  $w = w_0$  為收斂級數，則在  $\frac{|w_0 - w|}{R - |w|}$  保持為有界的情況下，當  $w$  趨近於  $w_0$  時， $h(w)$  會收斂於  $h(w_0)$ 。

【證】 因線性變換  $w = L^{-1}(z) = w_0 z$  在複數平面上為 1-1 且映成的保角映像，並且有保圓的性質，故對每一個以  $w = w_0$  為頂點之 Stolz angle  $D'$ ，存在唯一以  $z = 1$  為頂點之 Stolz angle  $D$  (圖一陰影部分所示區域) 使得  $L^{-1}(z)$  將  $D$  映至  $D'$ ，如圖二。



圖二

$D'$  為圖中陰影部分所示區域， $D' = L^{-1}(D)$

$$l_r = L^{-1}(\text{正實軸})$$

$$l_w^* = L^{-1}(l^*)$$

$$l_w = L^{-1}(l)$$

$$l_w' = L^{-1}(l')$$

若  $w$  為  $D'$  中任意一點，則存在一點  $z \in D$  使得  $w = w_0 z$ 。因爲  $z$  可表為  $z = 1 - r e^{i\alpha}$ ，其中  $0 < r < 1$ ， $|\alpha| < \frac{\pi}{2} - \delta$ ，故

$$\begin{aligned} w &= w_0 - w_0 r e^{i\alpha} = w_0 - R r e^{i(\alpha+\theta)} \\ \therefore w_0 - w &= R r e^{i(\alpha+\theta)} = r' e^{i\alpha'} \end{aligned}$$

其中  $0 < r' < R$ ， $|\alpha' - \theta| < \frac{\pi}{2} - \delta$ 。

設  $\{w_n\}$  為  $D'$  中任意一數列，則存在一個在  $D$  中的數列  $\{z_n\}$  使得  $w_n = w_0 z_n$ ， $\forall n \in N$ 。

$$\begin{aligned} \therefore \frac{|w_0 - w_n|}{R - |w_n|} &= \frac{|w_0 - w_0 z_n|}{R - |w_0 z_n|} \\ &= \frac{|w_0| |1 - z_n|}{R - |w_0| |z_n|} \\ &= \frac{|1 - z_n|}{1 - |z_n|} \quad (\because |w_0| = R) \end{aligned}$$

故數列  $\left\{ \frac{|w_0 - w_n|}{R - |w_n|} \right\}$  有上界。

因此，只要把  $w$  限制在  $D'$  上， $\frac{|w_0 - w|}{R - |w|}$  必然保持有界。

我們現在可利用亞爾費爾斯證明之推廣，來證明此一般性定理。

設  $\{w_k\}$  為  $D'$  中任意一數列且  $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = w_0$ ，

[求證]： $\lim_{k \rightarrow \infty} h(w_k) = h(w_0)$

不失一般性，我們可假設  $h(w_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w_0^n = 0$ ，

令  $t_n = c_0 + c_1 w_0 + \cdots + c_n w_0^n$ ， $n = 0, 1, 2, \dots$

$t_n(w) = c_0 + c_1 w + \cdots + c_n w^n$

$$\begin{aligned}
&= t_0 + (t_1 - t_0) \frac{w}{w_0} + \cdots + (t_n - t_{n-1}) \left(\frac{w}{w_0}\right)^n \\
&= t_0 \left(1 - \frac{w}{w_0}\right) + t_1 \left[\frac{w}{w_0} - \left(\frac{w}{w_0}\right)^2\right] + \cdots \\
&\quad + t_{n-1} \left[\left(\frac{w}{w_0}\right)^{n-1} - \left(\frac{w}{w_0}\right)^n\right] + t_n \left(\frac{w}{w_0}\right)^n \\
&= \left(1 - \frac{w}{w_0}\right) \left[t_0 + t_1 \left(\frac{w}{w_0}\right) + \cdots + t_{n-1} \left(\frac{w}{w_0}\right)^{n-1}\right] \\
&\quad + t_n \left(\frac{w}{w_0}\right)^n
\end{aligned}$$

對於收斂圓內任一點  $w$ ， $\left|\frac{w}{w_0}\right| \equiv \frac{|w|}{R} < 1$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{w}{w_0}\right)^n = 0$$

$$\text{且 } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w_0^n = 0, \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \left(\frac{w}{w_0}\right)^n = 0。$$

$$\text{因此, } h(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n(w) = \left(1 - \frac{w}{w_0}\right) \sum_{n=0}^{\infty} t_n \left(\frac{w}{w_0}\right)^n。$$

仿照步驟三之證明，可得  $\lim_{k \rightarrow \infty} h(w_k) = h(w_0)。$

最後，列舉一些例子說明阿貝爾第二定理。

【例】 冪級數  $z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \cdots$  的收斂半徑為 1

$$\text{當 } |z| < 1 \text{ 時, } \log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \cdots$$

，這裏  $\log(1+z)$  是在  $\log 1 = 0$  的一個分枝上。

因為右邊的冪級數在  $z = 1$  為收斂級數，故設  $D$  為以  $z = 1$  為頂點之任一 Stolz angle。

依阿貝爾第二定理， $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in D}} \log(1+z) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

$$\text{即 } \log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

【例】：冪級數  $z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots$  的收斂半徑為 1

當  $|z| < 1$  時， $\tan^{-1} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots$ ，這裏

$\tan^{-1} z$  是在  $\tan^{-1} 0 = 0$  的一個分枝上。

因為右邊的冪級數在  $z = 1$  為收斂級數，故設  $D$  為以  $z = 1$  為頂點之任一 Stolz angle。

依阿貝爾第二定理， $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in D}} \tan^{-1} z = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

$$\text{即 } \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

---

---

■爸爸問：「如果平面坐標上，頂點坐標都是格子點（整數）的多邊形，就叫做格子點多邊形。則格子點多邊形的面積是…」

小明接著說：「我知道。它的面積剛好是  $\frac{1}{2}b + C - 1$ ，其中  $b$  是指格子多邊形邊上的所有格子點個數， $C$  是指格子多邊形內部所有格子點數。」

妹妹一臉茫然問：「為什麼？」

大家想一想小明的答案是否正確？



$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

則(1)式便可記成  $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ ，也就是

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

線性微分方程式  $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$  是所有微分方程式中，最簡單，最基本的一類，本篇主要在於討論  $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$  的解，因為  $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$  的解  $\mathbf{x}(t)$  與矩陣  $A$  有密切的關係。因此，在下一節將先討論一些向量空間與線性代數的結果，然後再回到線性微分方程式來。

## 二、向量空間與線性代數

我們可以把  $(R^n, R)$  視為  $(C^n, C)$  的子空間，如此，矩陣  $A$  可視為  $(C^n, C)$  的一線性變換。解微分方程式  $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$  時， $A$  的形式愈簡單愈容易解得  $\mathbf{x}(t)$ ，定理一，便是化  $A$  成較簡單形式的一種方法。

### 【定理一】

如果  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_r$  是矩陣  $A$  的相異固有值且  $\det(A - \lambda t) = (\lambda_1 - t)^{n_1} (\lambda_2 - t)^{n_2} (\lambda_3 - t)^{n_3} \cdots (\lambda_r - t)^{n_r}$  則存在可逆矩陣  $P$  使得  $A = pdp^{-1}$ ，其中  $d$  是如下的矩陣





$$(1) \text{ 若 } \|A\| = K \text{ 則 } |Ax| \leq K|x| \quad x \in C^n$$

$$(2) \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

$$(3) \|A^m\| \leq \|A\|^m$$

現在，已知  $(L(C^n), C, \|\cdot\|)$  是一個賦範空間。如果  $A$  是  $n \times n$  階的矩陣（或  $A \in L(C^n)$ ）我們定義

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

我們首先檢定  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  是否有意義，假設  $\|A\| = a \geq 0$  則由前述知

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k = a^k \circ$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$$

$\therefore$  由定理二，知道  $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  存在（也就是  $e^A \in L(C^n)$ ）

下面將推論  $e^A$  的一些運算。

### 【定理三】

$$(1) A = pjp^{-1} \Rightarrow e^A = pe^j p^{-1}$$

$$(2) AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$$

$$(3) e^{-A} = (e^A)^{-1}$$

### 【證明】

$$(1) e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(pjp^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{pj^k p^{-1}}{k!} = p \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k}{k!} \right) p^{-1} \\ = pe^j p^{-1}$$

$$(2) \therefore (A+B)^k = k! \sum_{j+l=k} \frac{A^j}{j!} \times \frac{B^l}{l!} \quad (AB=BA)$$

$$\begin{aligned} \therefore e^{A+B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j+l=k} \frac{A^j}{j!} \times \frac{B^l}{l!} \right) \\ &= \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l}{l!} \right) = e^A e^B \end{aligned}$$

$$(3) \quad \because (-A)A = -A^2 = A(-A) \quad \therefore \text{由(2)} \quad e^{-A}e^A = e^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = I$$

### 三、線性微分方程式的解 ( $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ ) 的求解)

由第二節的討論，我們知道  $e^A$  是一個  $n \times n$  階的矩陣，那  $e^{tA}$  可想成  $R \rightarrow C^{n^2}$  的函數。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tA} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{tA}e^{hA} - e^{tA}}{h} = e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - I}{h} \\ &= e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(hA)^k}{k!} - I}{h} = e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(hA)^k}{k!} - I}{h} \\ &= e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(hA)^k}{k!}}{h} = e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(hA)^{k-1} A}{k!} \\ &= e^{tA} A \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(hA)^{k-1}}{k!} \\ &= e^{tA} A \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(hA)^{k-1}}{k!} + I \right) \\ &= e^{tA} AI = e^{tA} A \quad (\text{注意 } e^{tA}A = Ae^{tA}) \end{aligned}$$

#### 【定理四】

若  $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$  且  $\mathbf{x}(0) = K \in R^n$

則  $\mathbf{x}(t) = e^{tA}K$

【證明】

$$\therefore \frac{d e^{tA}K}{dt} = e^{tA}AK = Ae^{tA}K = A(e^{tA}K)$$

即  $e^{tA}K$  為  $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$  的一解

若  $x_0(t)$  為  $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$  的解

令  $\mathbf{y}_0(t) = e^{-tA}\mathbf{x}(t)$

$$\begin{aligned} \text{則 } \mathbf{u}'_0(t) &= (e^{-tA})\mathbf{x}(t) + e^{-tA}\mathbf{x}'(t) \\ &= -Ae^{-tA}\mathbf{x}(t) + e^{-tA}(A\mathbf{x}(t)) \\ &= -Ae^{-tA}\mathbf{x}(t) + Ae^{-tA}\mathbf{x}(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore \mathbf{y}_0(t) = \text{constant} = \mathbf{y}_0(0) = e^0\mathbf{x}(0) = K$

即  $e^{-tA}\mathbf{x}(t) = K \Rightarrow \mathbf{x}(t) = e^{tA}K$

故  $e^{tA}K$  為  $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$  的唯一解。

由第二節，知道  $A$  可表成  $pjp^{-1}$ ，因此  $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$  的解

$$e^{tA}K = e^{t p j p^{-1}} K = e^{p t j p^{-1}} K = p e^{t j} p^{-1} K$$

故只要能算出  $e^{tj}$  的矩陣來，便可求解線性微分方程式  $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ 。

【例 1】 設  $\mathbf{x}(t) : R \rightarrow R^2$ ， $\mathbf{x}(0) = (1, 1)$ ，且

$$x'_1(t) = 2x_1(t)$$

$$x'_2(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

試求  $\mathbf{x}(t)$ 。

$$\text{【解】} \therefore \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

$$\therefore \mathbf{x}(t) = e^t \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= e^{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix}} e^{\begin{bmatrix} 2t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix}^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} 2t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}^k}{k!} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{2t} \\ te^{2t} + e^t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{x}(t) = (e^{2t}, te^{2t} + e^t)$$

【例2】 試解調和微分方程式  $\mathbf{x} + P^2\mathbf{x} = 0$  ( $\mathbf{x}(t) : R \rightarrow R$ ),

$$\mathbf{x}(0) = 1, \mathbf{x}'(0) = 1.$$

【解】：設  $Y(t) = (\mathbf{x}(t), y(t))$  (令  $X'(t) = y(t)$ )

$$\therefore \mathbf{x}'(t) = y(t)$$

$$y'(t) = \mathbf{x}''(t) = \mathbf{x}(t) = -P^2 X(t)$$

$$\therefore Y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -P^2 & 0 \end{bmatrix} Y(t)$$

$$\text{又} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -P^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ P_i & -P_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & -P_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2P} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2P} \end{bmatrix}$$

( $\because P_i, -P_i$  是  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -P^2 & 0 \end{bmatrix}$  的固有值,  $\begin{pmatrix} 1 \\ P_i \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ -P_i \end{pmatrix}$  爲其對應固有向量)

$$\begin{aligned}
 \therefore Y(t) &= e^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ P_i & -P_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & -P_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{-i}{2P} \\ \frac{1}{2} \frac{i}{2P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ P_i & -P_i \end{bmatrix} e^t \begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & -P_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{-i}{2P} \\ \frac{1}{2} \frac{i}{2P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ P_i & -P_i \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} P_i i & 0 \\ 0 & -P_i i \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{-i}{2P} \\ \frac{1}{2} \frac{i}{2P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ P_i & -P_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{P_i i t} & 0 \\ 0 & e^{-P_i i t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{-i}{2P} \\ \frac{1}{2} \frac{i}{2P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ P_i & -P_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos Pt + i \sin Pt & 0 \\ 0 & \cos Pt - i \sin Pt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{-i}{2P} \\ \frac{1}{2} \frac{i}{2P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos Pt + \frac{1}{P} \sin Pt \\ -P \sin Pt + \cos Pt \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\therefore x(t) = \cos Pt + \frac{1}{P} \sin Pt$$

【例3】 解  $\begin{cases} x_1' = 5x_1 + 3x_2 \\ x_2' = -6x_1 - 4x_2 \end{cases}, (x_1(0), x_2(0)) = (u_1, u_2)$

【解】  $\because \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

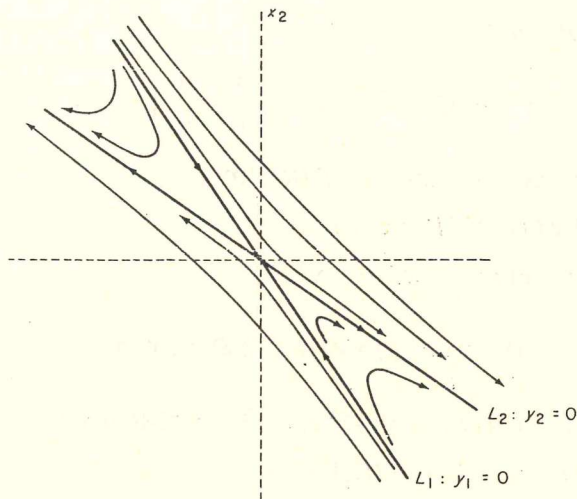
又  $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore \mathbf{x}(t) = e^{t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} 2t & 0 \\ 0 & -t \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{bmatrix} e^{2t}(2u_1 + u_2) - e^{-t}(u_1 + u_2) \\ -e^{2t}(2u_1 + u_2) + 2e^{-t}(u_1 + u_2) \end{bmatrix}$



隨著  $(u_1, u_2)$  值的不同，可得到許多不同的解。上圖是  $(u_1, u_2)$  不同值所產生的軌跡。

#### 四、 $2 \times 2$ 階線性微分方程式的分類

在  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$  的線性方程式中， $2 \times 2$  階（即  $A$  是  $2 \times 2$  矩陣）是最基本的，由定理一，我們可知道，只要  $2 \times 2$  階會做則大部分的線性微分方程式均可迎刃而解。

$$\begin{aligned} \text{設線性微分方程式爲} \quad & x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ & x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \end{aligned}$$

$$\text{即 } \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(0) = (x_0, y_0)$$

（ $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, x_0, y_0$  均是實數）

(-) 情形一

$A$  的固有值為實數且異號，這樣的方程式，一般稱為 Saddle，存在一可逆矩陣  $P$ ，使得

$$A = PBP^{-1} \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad \lambda < 0 < \mu$$

$$\text{即 } \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \text{ 爲 } \dot{\mathbf{x}}(t) = PBP^{-1}\mathbf{x}(t)$$

$$\Rightarrow P^{-1}\dot{\mathbf{x}}(t) = B P^{-1}\mathbf{x}(t)$$

$$\Rightarrow (P^{-1}\dot{\mathbf{x}}(t)) = B(P^{-1}\mathbf{x}(t))$$

經由  $\mathbf{y}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t)$  的變換後（令  $P^{-1}(\mathbf{x}(0)) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ）

可得  $\dot{\mathbf{y}}(t) = B\mathbf{y}(t)$  的線性微分方程式，可解得  $y_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$ ，  
 $y_2(t) = c_2 e^{\mu t}$ ，圖形 FIGA。

前一節的例 3，便是此種情形的例子。

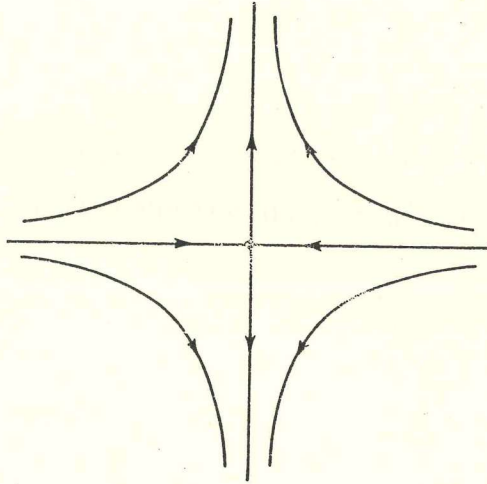


FIG. A. Saddle:  $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \lambda < 0 < \mu$ .

(二) 情形二

$A$  的固有值為複數且實部均小於 0，這種方程式稱為 sink。因為

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0 \end{aligned}$$

的二根是  $A$  的固有值，如果二根的實部是負數，又可分為下列四種情形。

(1) [情形 1]：二固有值是相等的負實數  $\lambda$ ，且具有二個獨立的固有向量。

根據對角化原理，存在可逆矩陣  $P$ ，使得

$$A = PBP^{-1}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

由  $\mathbf{y}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t)$  的代換 (令  $P^{-1}(\mathbf{x}(0)) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ )

可得  $\dot{\mathbf{y}}(t) = B\mathbf{y}(t)$



故一般解爲  $y_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$   
 $y_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$

圖形：FIG. B，習慣上，稱它爲 Focus。因爲

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (c_1 e^{\lambda t}, c_2 e^{\lambda t}) = (0, 0) (\because \lambda < 0)$$

因此  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P^{-1} \mathbf{y}(t) = (0, 0)$  (如圖箭號所指)

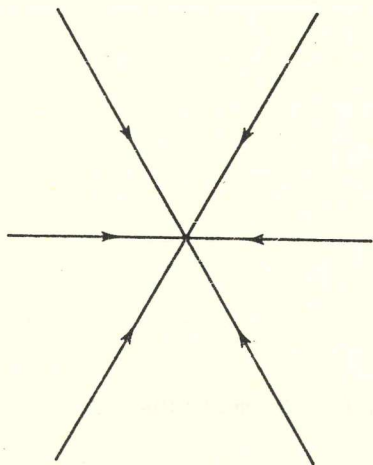


FIG. B. Focus:  $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \lambda < 0.$

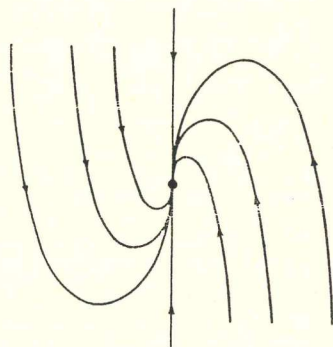


FIG. D. Improper node:  $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}, \lambda < 0.$

(2) [情形 2]：二固有值是相等的負實數  $\lambda$ ，但僅有一固有向量。  
 由定理一，可知，存在可逆矩陣  $P$ ，使

$$A = PBP^{-1} \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

由  $\mathbf{y}(t) = P^{-1} \mathbf{x}(t)$  的代換 (令  $P^{-1}(x(0)) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ )

得

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = B\mathbf{y}(t)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= e^{tB} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = e^{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\
&= e^{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix}} e^{\begin{bmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\
&= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix}^k}{k!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix}^k}{k!} \right) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\
&= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} \\ c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

圖形：FIG.C，稱為 Improper node

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (c_1 e^{\lambda t}, c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}) = (0, 0) \quad (\because \lambda < 0)$$

因此  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P^{-1} \mathbf{x}(t) = (0, 0)$  (如箭號所指)

(3) [情形3]：二固有值為相異負實數  $\lambda, \mu$ 。

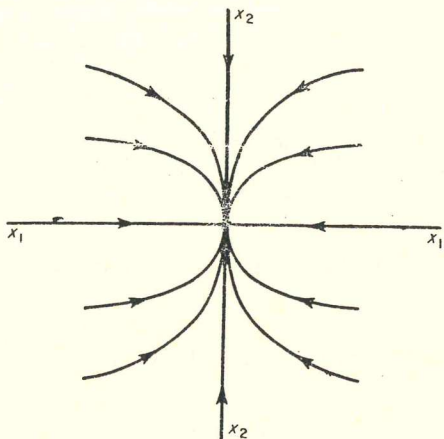


FIG. C. Node:  $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \lambda < \mu < 0$ .

此種情形，因存在二固有向量（對應於  $\lambda$  及  $\mu$  的）。所以，存在可逆矩陣  $P$ ，使得

$$A = PBP^{-1} \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

由  $\mathbf{y}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t)$  代換（令  $P^{-1}(\mathbf{x}(0)) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ ）

得  $\dot{\mathbf{y}}(t) = B\mathbf{y}(t)$ ，解為

$$\mathbf{y}(t) = (c_1 e^{\lambda t}, c_2 e^{\mu t})$$

同理可證得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = (0, 0)$

圖形：FIG. C，稱為 Node。

(4) [情形 4]：二固有值為  $a \pm bi$ ， $a < 0$ ， $b \neq 0$  時，稱為 Spiral Sink。

設  $\vec{x} + i\vec{y}$  是  $a + bi$  的固有向量，則  $A(\vec{x} + i\vec{y}) = (a + bi)(\vec{x} + i\vec{y})$

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= a\vec{x} - b\vec{y} \\ A\vec{y} &= b\vec{x} + a\vec{y} \end{aligned}$$

若取  $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ （直放）則  $A = P \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} P^{-1}$

因此  $\dot{\mathbf{x}}(t) = P \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{x}(t)$

$$(P^{-1} \mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{x}(t)$$

取  $\mathbf{y}(t) = P^{-1} \mathbf{x}(t)$ （令  $P^{-1}(\mathbf{x}(0)) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ ）

得  $\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mathbf{y}(t)$

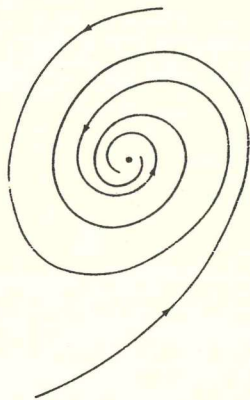


FIG. E. Spiral sink:  $B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ,  $b > 0 > a$ .

如果視  $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$  成  $a + bi$  則  $(a + bi)^k$  與  $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^k$  正好對應

(例如:  $(a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$ ,

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{bmatrix})$$

故  $\mathbf{y}(t) = e^{t \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

$$= e^{\begin{bmatrix} at & -bt \\ bt & at \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} at & -bt \\ bt & at \end{bmatrix}^k}{k!} \right) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at + bti)^k}{k!} \right) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$= e^{at + bti} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} e^{at} \cos bt & -e^{at} \sin bt \\ e^{at} \sin bt & e^{at} \cos bt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\
&= e^{at} \begin{bmatrix} c_1 \cos bt - c_2 \sin bt \\ c_1 \sin bt + c_2 \cos bt \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

圖形 FIG. E 稱為 Spiral Sink。

$$\begin{aligned}
\text{因爲 } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} (c_1 \cos bt - c_2 \sin bt, c_1 \sin bt + c_2 \cos bt) \\
&= (0, 0) \quad (\because a < 0)
\end{aligned}$$

所以  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\mathbf{y}(t) = (0, 0)$  (箭頭所指的方向)

(三) 情形三

$A$  的固有值為複數且實部大於 0，此種情形，討論方式與情形二一樣，圖形亦相同，所不同，僅箭號指向剛好相反，也就是  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t)| = \infty$ 。

(四) 情形四

$A$  的固有值是純虛數  $\pm bi$ ，同情形二，Case 4，存在可逆矩陣  $P$  使得

$$A = P \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

設  $\mathbf{y}(t) = P^{-1} \mathbf{x}(t)$  (令  $\mathbf{y}(0) = P^{-1}(\mathbf{x}(0)) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ )

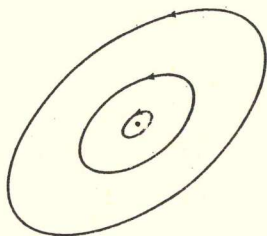


FIG. F. Center:  $B = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$ ,  $b > 0$ .

得

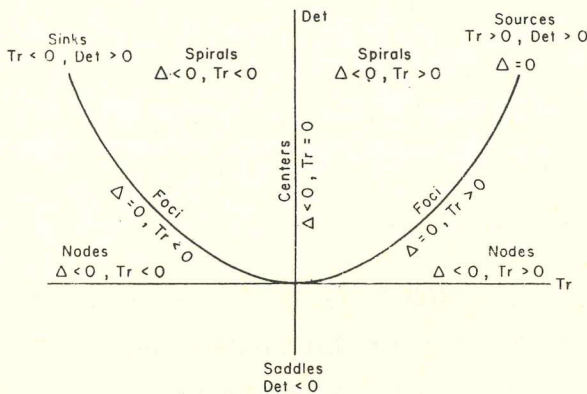
$$\mathbf{y}(t) = e^{ot} \begin{bmatrix} c_1 \cos bt - c_2 \sin bt \\ c_1 \sin bt + c_2 \cos bt \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 \cos bt - c_2 \sin bt \\ c_1 \sin bt + c_2 \cos bt \end{bmatrix}$$

且可得  $y_1^2(t) + y_2^2(t) = c_1^2 + c_2^2$  (圓)，但對應於  $(x_1(t), x_2(t))$  時，可能是橢圓，故圖 FIGF 稱為 Center 為橢圓軌跡。

最後，設矩陣  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  的固有多項式為  $\lambda^2 - \text{Tr}A\lambda + \text{Det}A = 0$

且  $\Delta = (\text{Tr}A)^2 - 4\text{Det}A$ 。可將前面討論的分類情形，由下圖看出，其中  $\text{Tr}A$  表二固有值的和， $\text{Det}A$  表二固有值的積， $\Delta$  表二固有值為實數或複數。



### 參考資料

MORRIS W. HIRSCH/STEPHEN SMALE, DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMICAL SYSTEMS, AND LINEAR ALGEBRA.

ACADEMIC PRESS, New York, San Francisco, London.

(六藝出版社翻版)，第一章～第六章。

## 6. 淺談微分方程式解的存在性

指導老師：顏啓麟

作者：王彩蓮

Banach 的定點定理 (fixed point theorem) 或叫縮距寫像定理 (contraction mapping theorem) 是於 1922 年由波蘭大數學家 Banach 將逐次逼近法中所蘊涵的思想加以一般化而得的。我們的目的是想利用此定理來證明一階微分方程式解的存在性，再推廣至  $n$  階的微分方程。

【Banach 定點定理】：設  $(X, d)$  為完備的距離空間，而  $A: X \rightarrow X$  為縮距寫像 (即存在  $0 \leq l < 1$ ，使得  $d(Ax, Ay) \leq ld(x, y) \forall x, y \in X$ )，則找得到唯一的點  $x_0 \in X$ ，滿足  $Ax_0 = x_0$ 。這點可以如此求到：

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n(x), \quad x \in X \text{ 爲任意!}$$

Banach 定點定理是有關逐次逼近 (successive approximation) 理論方面的一個很成功的結果，許多討論方程式解的存在性及唯一性的證明都是引用此定理。(只要適當地造一個距離空間及其上的函數即可！)

例如考慮一階微分方程式  $y' = f(x, y)$ ， $y(x_0) = k$  之解的存在性。

【Picard 定理】：設  $f(x, y)$  在矩形區域

$$R = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - k| \leq b\}$$

上連續，且滿足 Lipschitz 條件：即存在常數  $K > 0$ ，使得當

$$(x, y_1), (x, y_2) \in R \text{ 時，恒有 } |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|,$$

則此時微分方程恒有唯一的解。

【證明】：首先注意：

(1) 微分方程式  $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = k \end{cases}$  的解  $y = \varphi(x)$  是等價於積分方程式

$$\varphi(x) = k + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \text{ 的成立。}$$

(2)  $f(R)$  爲緊緻集，故存在常數  $M > 0$ ，使得當  $(x, y) \in R$  時，恒有  $|f(x, y)| \leq M$ 。

令  $0 < \alpha < \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K} \right\}$ ，定義集合  $X$  與  $X$  上的距離函數  $d$  如下：

$$X \equiv \left\{ \varphi : [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \rightarrow [k - b, k + b] \mid \varphi \text{ 爲連續且滿足} \right. \\ \left. \varphi(x_0) = k \right\}$$

$$d(\varphi_1, \varphi_2) \equiv \sup \left\{ |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| : x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \right\}$$

則  $(X, d)$  爲完備的距離空間。再定義  $X$  上的函數  $A$  如下：

$$A\varphi(x) \equiv k + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt, \quad \varphi \in X$$

由於

$$(1) \quad A\varphi(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, \varphi(t)) dt = y_0, \text{ 且當 } |x - x_0| \leq \alpha$$

時，可得：

$$\textcircled{1} \quad |\varphi(x) - k| \leq b, \text{ 故 } f(x, \varphi(x)) \text{ 爲連續，因此 } A\varphi \text{ 爲連續。}$$

$$\textcircled{2} \quad |A\varphi(x) - k| = \left| \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, \varphi(t))| dt \right| \\ \leq \left| \int_{x_0}^x M dt \right| \\ = M |x - x_0| \leq M\alpha \leq b$$

$\therefore A\varphi \in X$  (由 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 得！)

$$\textcircled{3} \quad |A\varphi_1(x) - A\varphi_2(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))| dt \right|$$



$$\leq K \left| \int_{x_0}^x |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| dt \right| \leq K |x - x_0| d(\varphi_1, \varphi_2) \leq K\alpha d(\varphi_1, \varphi_2)$$

令  $0 \leq \beta = K\alpha < 1$  則  $d(A\varphi_1, A\varphi_2) \leq \beta d(\varphi_1, \varphi_2)$

滿足了定點定理的條件，故知  $A$  有唯一的點  $\varphi \in X$ ，滿足  $\varphi(x) = A\varphi(x)$

$= k + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$ ，所以  $y = \varphi(x)$  就是微分方程式唯一的解。

其實將原方程改寫為  $y(x) = k + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$ ，做出近似函數

列  $y_n(x) = k + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$ （一般取

$y_0(x) \equiv k$ ！）則可得  $\{y_n\}$  為 Cauchy 函數序列，令  $y = \lim y_n$  就是微分方程唯一的解，這也就是 Banach 定點定理所提供的一個求解的逐次逼近法。

Picard 定理亦可推廣至聯立微分方程組。考慮一階聯立微分方程組  $x'_j = f_j(t, x_1, \dots, x_n)$ ， $x_j(t_0) = k_j$ ， $j = 1, 2, \dots, n$ 。解的存在性。

【定理】：設  $f_j (j = 1, 2, \dots, n)$  在

$$R = \{(t, x_1, \dots, x_n) \mid |t - t_0| \leq a, |x_i - k_i| \leq b, 1 \leq i \leq n\}$$

上連續，且滿足 Lipschitz 條件：即存在常數  $L > 0$ ，使得當

$(t, x_1, \dots, x_n), (t, y_1, \dots, y_n) \in R$  時，恒有

$$|f_j(t, x_1, \dots, x_n) - f_j(t, y_1, \dots, y_n)| \leq L (|x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|)$$

$V_j$ ，則此聯立微分方程組恒有唯一的解。

其實只要令  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ， $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ ， $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ ，則原式可改寫為  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ ， $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{k}$ ，又  $\mathbf{f}$  在“矩形”區域  $R = \{(t, \mathbf{x}) \mid |t - t_0| \leq a, \|\mathbf{x} - \mathbf{k}\|_\infty \leq b\}$  上連續，且當  $(t, \mathbf{X}), (t, \mathbf{Y}) \in R$  時，恒有  $|f_j(t, \mathbf{X}) - f_j(t, \mathbf{Y})| \leq nL \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_\infty$ ， $V_j$ 。因此可知此聯立微分方程組解存在。

其次，我們考慮  $n$  階微分方程  $x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$ ，

$x^{(i-1)}(t_0) = k_i, 1 \leq i \leq n$ , 解存在性的問題。(將此方程式改寫爲一階聯立微分方程組！)

令  $x_1 = x, x_2 = x', \dots, x_n = x^{(n-1)}$ , 則原微分方程式等價於方程組

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= f(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}, \quad x_i(t_0) = k_i, 1 \leq i \leq n.$$

因此若  $f$  在  $R = \{(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \mid |t - t_0| \leq a, |x^{(i-1)} - k_i| \leq b, 1 \leq i \leq n\}$  上連續, 且對  $\mathbf{X} = (x, x', \dots, x^{(n-1)})$  滿足 Lipschitz 條件, 則此方程組之解存在, 即原微分方程式之解存在。

特別地:  $n$  階線性微分方程式  $x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = b(t)$ ,  $a_i, b$  在區間  $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  上連續,  $x^{(i-1)}(t_0) = k_i, 1 \leq i \leq n$ , 之解必存在。(因爲此時  $f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) = b(t) - a_n(t)x - \dots - a_1(t)x^{(n-1)}$  在  $I$  上連續, 且  $|f(t, \mathbf{X}) - f(t, \mathbf{Y})| = |f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) - f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})|$

$$\leq \sum_{j=1}^n |a_{n-j+1}(t)| |x^{(j-1)} - y^{(j-1)}| \leq K \sum_{j=1}^n |x^{(j-1)} - y^{(j-1)}| \leq nK \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_\infty$$

, 其中  $K = \max_{1 \leq i \leq n} \{|a_i(t)| : t \in I\}$  )。

### 【參考資料】

1. 數學分析導引(下): 凡異出版社編輯部, P.112。
2. 理論分析(上): 林義雄、林紹雄著, P.178。
3. ALBERT L. RABENSTEIN: Introduction To Ordinary Differential Equations, P.454.

## 7. 布林代數與電路設計

指導老師：楊壬孝

數五丙：鄭英豪

$\Sigma$ 人常常問的一個問題是：「數學有什麼用？」，另一個普遍的問題是：「人家都說唸數學的人都很容易地可以唸電腦，可是我怎麼沒有這種感覺？」

其實，數學一向被稱為「科學之母」，只是我們很少會去想這話中的道理。在這裡，我們把「代數學」中一個極淺顯但是很重要的東西「布林代數」( Boolean algebra) 做一個簡單的應用，或許可以表現出一些「數學的魅力」。

### 一、布林代數的性質：

【定義】： $B$  是一個非空集合， $\cap$  (wedge) 及  $\cup$  (vee) 為  $B$  上兩個二元運算，滿足：

- (1)  $\cap$  及  $\cup$  均滿足交換律
- (2)  $\cap$  對  $\cup$  可分配，且  $\cup$  對  $\cap$  可分配
- (3)  $\cap$  及  $\cup$  均有單位元素 (分別以  $1, 0$  表示)
- (4)  $B$  中之元素均有餘元素 (也就是對  $B$  中之元素  $a$ ，均有  $\bar{a} \in B$  使得  $a \cup \bar{a} = 1$ ，且  $a \cap \bar{a} = 0$ )。

則我們稱  $(B, \cap, \cup)$  為一個布林代數。

【例】  $X$  為非空集，若令  $\cap$  表交集， $\cup$  表聯集，且對  $a \in X$ ， $\bar{a}$  表  $a$  之餘集。則我們可以很容易地看出  $(P(X), \cap, \cup)$  為一布林代數；此時可取  $0 = \phi$ ， $1 = X$ 。

下面我們介紹一個很重要的例子。

【例2】 設  $B = \{0, 1\}$ ， $\cap = \cdot$ ， $\cup = +$  定義如下表：

$+$	$0$	$1$	$\cdot$	$0$	$1$
$0$	$0$	$1$	$0$	$0$	$0$
$1$	$1$	$1$	$1$	$0$	$1$

並定義餘元素如下：

$$\overline{0} = 1, \overline{1} = 0$$

則  $(B, \cdot, +)$  成一布林代數。

很明顯地， $0 = 0$ ， $1 = 1$ 。

以下我們將布林代數的一些性質提出，對以後的討論很有幫助，證明部分予以省略，有興趣的讀者不妨自己作，或者查閱有關布林代數之資料。

【性質】：(1)  $\cap$  及  $\cup$  之單位元素唯一

(2) 餘元素唯一

$$(3) \quad \overline{0} = 1, \overline{1} = 0$$

$$(4) \quad a \cap \overline{a} = 0, a \cup \overline{a} = 1$$

$$(5) \quad 0 \cap a = 0, 1 \cup a = 1$$

$$(6) \quad \overline{\overline{a}} = a$$

$$(7) \quad a \cup a = a, a \cap a = a$$

$$(8) \quad (a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$$

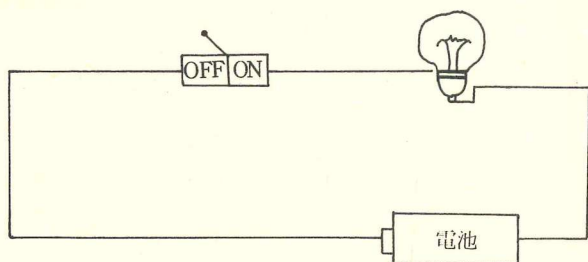
$$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$$

$$(9) \quad \overline{(a \cup b)} = \overline{a} \cap \overline{b}$$

$$\overline{(a \cap b)} = \overline{a} \cup \overline{b} \text{ 笛摩根法則 (DeMorgan's Law)}$$

## 二、電路模型：

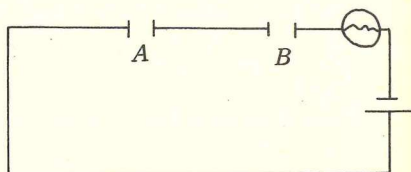
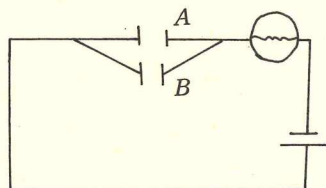
動手做一個如下圖的電路裝置：



如果把開關扳到“ON”的位置，燈泡就會亮；如果是扳到“OFF”的位置，燈泡就不亮。

依照這個實驗，我們令  $a$  表示開關處的電流（或電壓）狀態；如果燈泡亮了我們令  $a = 1$ ，如果燈泡不亮，我們令  $a = 0$ ，如此一來，在一個電路中的電流狀態（是否夠成通路），我們便可用 0 與 1 表示。

更進一步地，如果使用兩個開關，分別並聯、串聯如下圖：（為了方便，我們做了圖形上的簡化）



並以下表表示  $A$ ， $B$  開關之電流狀態與燈泡發光之情形：

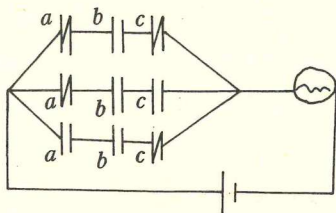
並	$A$ 0	$B$ 1
$A$ 0	0	1
$B$ 1	1	1

串	$A$ 0	$B$ 1
$B$ 0	0	0
$A$ 1	0	1

我們不得不以十二萬分的興奮接受這個結果，它和我們例 2 的布林代數是一樣的！

既然這個世界是這般美好，當然，我們會拿出我們的法寶「布林代數」，來解決電路問題！於是這個世界就在  $\Sigma$  人的努力下，愈來愈美好。

【例】 考慮一個如下圖的電路裝置：

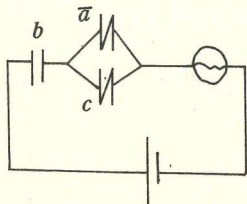


其中“ $\parallel$ ”表示相反作用，也就是像餘元素的作用。我們想簡化這個裝置，因為它太煩雜又麻煩，但是，要怎麼作呢？

仿照前面的作法，我們可以把這個電路表示成： $\bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + ab\bar{c}$ （爲了方便，以 $ab$ 表示 $a \cdot b$ ）由布林代數的性質；

$$\begin{aligned} & \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + ab\bar{c} \\ &= \bar{a}b(\bar{c} + c) + ab\bar{c} \\ &= \bar{a}b + ab\bar{c} \\ &= b(\bar{a} + a\bar{c}) \\ &= b(\bar{a} + \bar{c}) \end{aligned}$$

如此一來就可以把這個電路簡化成下圖：



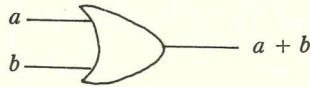
瞧！這是個多麼簡潔有力的結果！數學的功力在此展露無遺。

### 三、邏輯電路：

前面介紹了並聯與串聯的電路模型，並用了相反器的觀念。現在，我們來看看什麼叫邏輯電路；並再一次展示布林代數的威力。

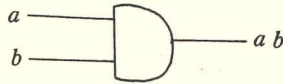
首先看看幾個邏輯電路的符號：

(1)



這個我們稱為或閘 ( or gate ) 作用是 “ + ”

(2)

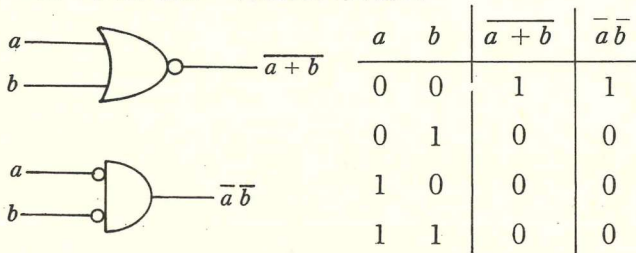


這個稱為且閘 ( and gate ) 作用是 “ . ”

(3)  $a \longrightarrow \text{NOT gate} \longrightarrow \bar{a}$  或者 ( 與其它閘聯用時 ) 僅以  $\text{---} \circ \text{---}$  表示  
 這個稱為反閘 ( not gate ) 作用是 “ - ”。

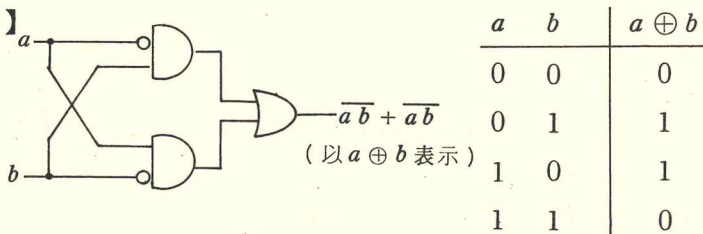
這三個基本元件組合後，便可作出許多很好的結果。

【例 1】：如下圖兩電路，右邊為其真值表



從真值表中知道  $a + b = \overline{\overline{a} \overline{b}}$ ，當然，這個事實我們早就知道了！

【例 2】



從真值表中，細心一點的讀者會發現， $a \oplus b$  的作用與二進位的加法有些相似，只是少了進位而已，往後我們將會介紹，在電子計算機的加法器中， $a \oplus b$  扮演什麼樣的角色！

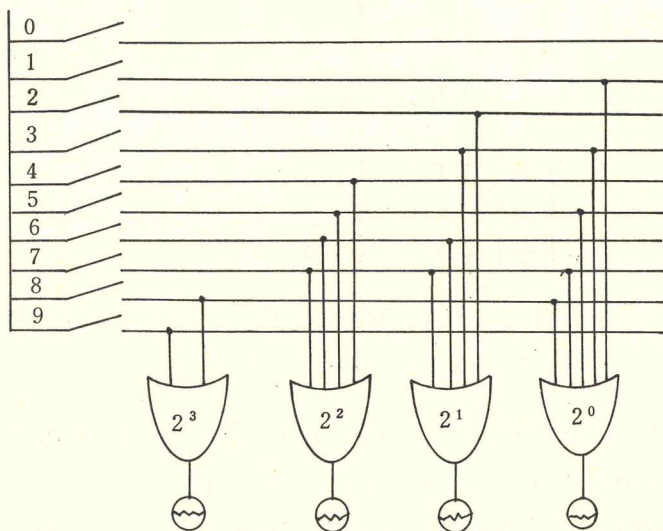
【例3】：十進位轉二進位編碼器 (Decimal-to-binary encoder)

考慮一個鍵盤，上面有0到9十個數字，我們希望打進一個數字後，會出現這個數字的二進位表示法，那麼它的電路要如何設計呢？

我們把0到9的二進位表示法列如下表：

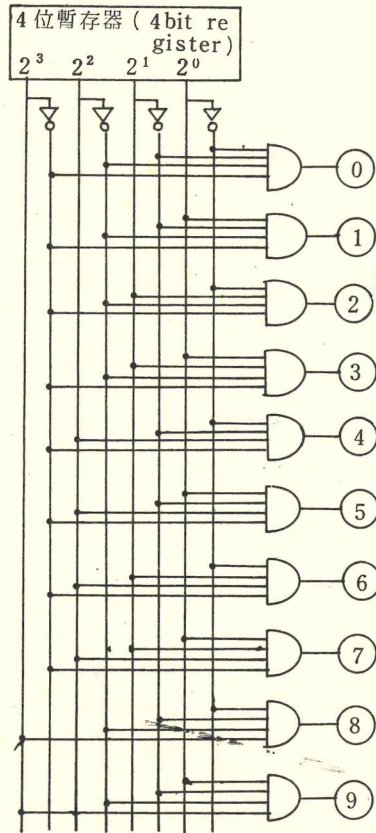
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001

現在，我們利用四個燈泡來表示上列之二進位表示中每一位數的狀態，若是1，燈泡就亮，若是0，燈泡就不亮。在這裡，因為每個位置的燈泡因輸入值的不同而有不同的狀態，且像 $2^0$ 的燈泡在輸入1, 3, 5, 7, 9時皆會亮，所以在基本上，我們要用或閘，我們畫出它的電路圖如下：



也就是一個數的二進位表示法中，那幾位是1，便用接頭・聯結。假如輸入5， $2^2$ 與 $2^0$ 的燈泡會亮，而 $2^3$ 與 $2^1$ 的燈泡就不亮，結果就是0101。但是，如果要設計一個二進位轉十進位的解碼器 (Binary-to-decimal decoder) 情況就會複雜得多，這裡就必須使用且閘。我們把它的電路圖畫如下圖：





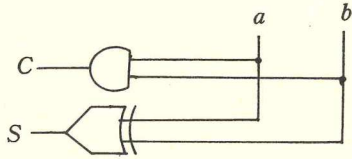
其實就是把二進位數換算成十進位數的原理而已。如果輸入 0110，⑥的燈泡就會亮，表示二進位數 0110 就代表十進位中的 6。


【例 4】：半加器 (Half Adder) *HA* 與全加器 (Full Adder) *FA* 在二進位的加法中， $0 + 0 = 0$ ， $1 + 0 = 1$ ， $0 + 1 = 1$ ， $1 + 1 = 10$ ，如果我們稱第一位數為 *S* (sum) 第二位數 (也就是進位數) 為 *C* (carry)，那麼它的運算表就如下：

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>C</i>	<i>S</i>
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

在這裡，如果我們把進位和第一位數分開來看可以發現， $C = ab$  而  $S = a \oplus b$ 。

所以我們可以把電路圖畫如下：

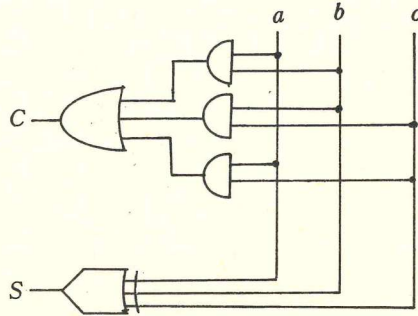


我們用  的符號表示  $a \oplus b$  的電路

這個我們稱為半加器。

在前述的加法中出現了進位，使我們感覺半加器無法真正滿足二進位加法；一旦出現進位，半加器便無法繼續作加法運算，所以我們必須把進位的加法也放進去，使它作三位的加法，全加器的真值表與電路圖如下：

$a$	$b$	$c$	$C$	$S$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

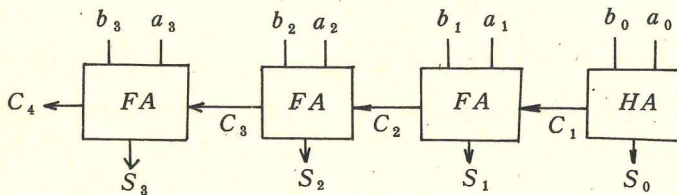


這裡  $S = a \oplus b \oplus c = abc + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c$

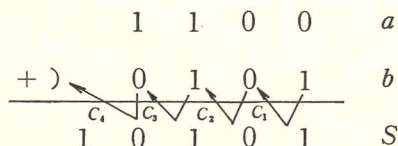
$$C = ab + bc + ca$$

至於為什麼，我們在電路設計的單元中再作解釋。

有了全加器與半加器後，就可以設計一個完整的二進位加法電路，它的構造如下：



例如



這樣一來，電算機中的加法便一目瞭然了。

#### 四、電路設計：

光是會解釋電路是不夠的， $\Sigma$ 人應有「增進人類全體之生活」的胸襟，用數學來美化世界的眼光。以下我們便要介紹如何使用布林代數來簡化或創造我們所需的電路。

在設計一個電路之前，當然要把這個電路的每一個狀況與每一個結果掌握住，然後把它畫成真值表。所以，我們的工作便是如何把一個真值表，表示成“+”與“·”的結合，而且最簡。

例如下表的電路結果，我們用右邊的真值表來看：

a	b	Y	
0	0	1	
0	1	0	→
1	0	1	
1	1	0	

0	0	1
0	1	0
1	1	0

當然，在這個例子中我們可以直接由觀察知道， $Y = \bar{b}$ ，但是對於比較複雜的電路就無法處理了。所以我們將使用一些布林代數的運算法則來幫助我們處理這種問題。

##### (1) 真值表轉換標準矩陣

在上例中，我們將真值表轉換成矩陣的形式，於是很容易地解決了我們的問題；現在的困擾是，矩陣中 0 與 1 的排列要如何決定呢？我們用下面的例子來說明：

【例1】：

$a$	$b$	$Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

(0)  
(1)  
(2)  
(3)

→

$\bar{a}$	$b$	$0$	$1$
$a$	$\bar{b}$	1	0
$a$	$b$	1	0

標準排列表

$\bar{b}$	$b$
0	1
$\bar{a}$	0
$a$	1

(0) (1)  
(2) (3)

【例2】：

$a$	$b$	$c$	$Y$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

(0)  
(1)  
(2)  
(3)  
(4)  
(5)  
(6)  
(7)

→

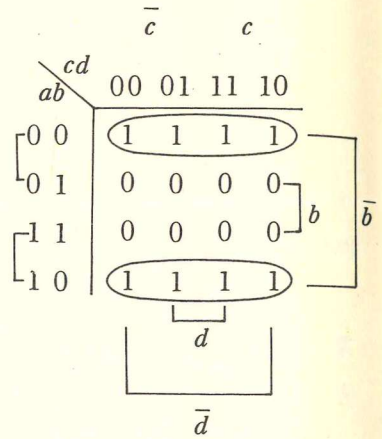
$\bar{a}$	$\bar{c}$	$c$	$0$	$1$
$a$	$c$	$\bar{b}$	1	1
$a$	$\bar{c}$	$b$	0	0
$a$	$c$	$\bar{b}$	1	1
$a$	$\bar{c}$	$b$	0	0
$a$	$c$	$\bar{b}$	1	1
$a$	$\bar{c}$	$b$	0	0
$a$	$c$	$\bar{b}$	1	1

標準排列表

$\bar{a}$	$0$	$0$	(0)	(1)
$\bar{a}$	$0$	$1$	(2)	(3)
$a$	$1$	$1$	(6)	(7)
$a$	$1$	$0$	(4)	(5)

【例3】：

$a$	$b$	$c$	$d$	$Y$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0



標準排列表

	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	T	6
11	C	D	F	E
10	8	9	B	A

順序的編排其實就是真值表左邊二進位數的順序。

(2) 代數運算

步驟一：將每一行或每一列中含 2<sup>n</sup> 個 1 的最長群圈出來。

步驟二：重複步驟一直至所有的 1 都被圈出。

步驟三：將每一圈中所對應的運算用 “ · ” 聯結。

步驟四：不同圈的運算以 “ + ” 聯結。

步驟五：簡化。

現在用上面三個例子來解釋：

在例 1 中，含 1 群只有一個，對應  $\bar{b}$ ，所以  $Y = \bar{b}$ 。

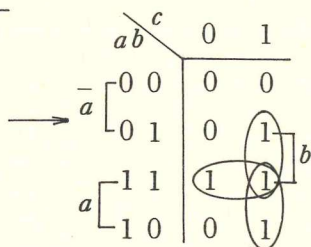
在例 2 中，含 1 群有兩個，分別對應於  $\bar{a}\bar{b}$  與  $a\bar{b}$ ，所以  $Y = \bar{a}\bar{b} + a\bar{b} = \bar{b}$ 。

在例 3 中，含 1 群有兩個，分別對應於  $\bar{a}\bar{b}$  與  $a\bar{b}$ ，所以  $Y = \bar{a}\bar{b} + a\bar{b} = \bar{b}$ 。

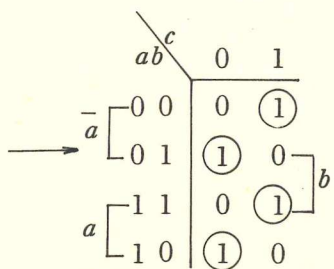
現在再看看幾個例子，同時也練習看看。

【例 1】：

$a$	$b$	$c$	$C$	$S$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1



$$C = ab + bc + ac$$



$$\begin{aligned}
 S &= \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}c + abc \\
 &= \bar{a}(\bar{b}c + b\bar{c}) + a(\bar{b}c + bc) \\
 &= \bar{a}(b \oplus c) + a(\overline{b\bar{c} + bc}) \\
 &= \bar{a}(b \oplus c) + a(\overline{b \oplus c}) \\
 &= a \oplus (b \oplus c)
 \end{aligned}$$

這個例子說明了全加器的電路運算。

【例 2】：有一會議由四人參加，會中設有表決機一部，每人手邊有按鈕一枚，表決時若贊成者即按鈕表示，表決結果由三個燈顯示；若多數贊成則  $S$  燈亮，若多數反對則  $F$  燈亮，若雙方平手則  $E$  燈亮，現在要考慮如何設計這部表決機的電路。

首先我們把真值表列出：

$a$	$b$	$c$	$d$	$S$	$F$	$E$
0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

然後轉換成標準矩陣：

$S$  爲：

		$cd$		$c$			
				00	01	11	10
$\bar{a}$	0	0	0	0	0		
	1	0	0	1	0		
$a$	1	1	0	1	1		
	0	1	0	1	0		

所以  $S = abd + bcd + acd + acb$

F 爲：

$ab \backslash cd$		$c$			
		00	01	11	10
$a$	0	0	1	0	1
	0	1	0	0	0
	1	1	0	0	0
	1	0	1	0	0

$\underbrace{\hspace{10em}}_d$

所以  $F = \bar{a}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c} + b\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{d}$

E 爲：

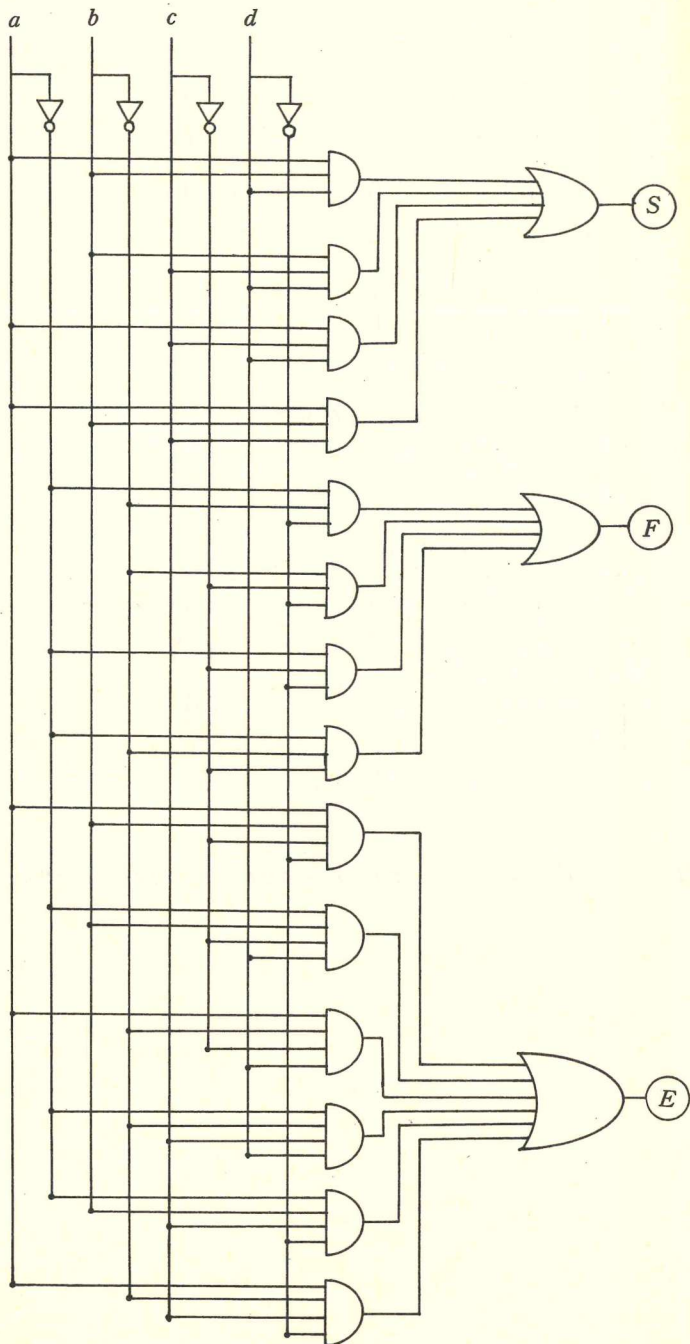
$ab \backslash cd$		$c$			
		00	01	11	10
$a$	0	0	0	1	0
	0	1	0	1	1
	1	1	1	0	0
	1	0	0	1	1

$\underbrace{\hspace{10em}}_d$

所以  $E = ab\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}\bar{d}$



繪成電路圖如下：



經過這些討論，我們就可以得到我們所要的電路。因此，電路設計本身就不是怎麼太難的事了。

## 五、結 論：

從上面四個單元的內容中，我們可以看出布林代數的威力，也印證了數學的好用；在資訊工業日漸發達的今日，計算機的速度與記憶的容量一直是科學家們努力求突破的重點，而其基本，便是電路設計的問題。

我們發現這個時代性的問題其實與數學上的問題是一樣的，這個事實足以告訴 $\Sigma$ 人，「我們的時代來臨了」；同時也告訴我們「數學是科學之母」的精神。

### 【參考資料】

1. Abstract and Linear algebra, Burton, 協進圖書有限公司。
2. 離散數學初步，福林來譯，國立編譯館。
3. 布林代數淺說，彭源昌譯，徐氏基金會。
4. Logic Design and Computer Organization, Morton H. Lewis
5. Digital Computer Electronics, Albert Paul Malvino.

---

---

■  $A \times B = B, B \times C = AC, C \times D = BC, D \times E = CH, E \times F = DK, F \times H = CJ,$   
 $H \times J = KJ, J \times K = E, K \times L = L, A \times L = L。$

每個字母均代表 0, 1, 2, ..., 9 等不同整數，且 AC 代表一二位數其十位數字為 A，個位數字為 C，餘類推。

求每個字母所代表的數字。

## 8. Kronecker定理的一維情況及其應用

指導老師：王惠中

作者：T.M.C.

大一、大二同學對於Kronecker這個名詞或許是陌生的，但，這並不影響您對本文的了解度；Kronecker在代數上的貢獻相信修過高代者必讚歎不已。筆者希冀以Kronecker在數論幾何上的貢獻，引發諸位對數論幾何興趣。事情發生在1884年，波蘭數學家Kronecker在他的著作Berliner Sitzungsberichte中提出並證明Kronecker定理，定理內容如下：

若 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ ，1線性獨立，

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 為 $k$ 個實數，

$N, \varepsilon$ 為任意正數

則必存在整數 $n > N, P_1, P_2, \dots, P_m$

使得 $|n\theta_m - P_m - \alpha_m| < \varepsilon$  ( $m = 1, 2, \dots, k$ )

限於篇幅及筆者所學，本文僅就其一維情形加以詳細證明，未引撞球問題結尾。現在，請發揮您高度數學頭腦，走入Kronecker的數論世界！

### I. 引理 (Dirichlet's 定理)

任給 $\theta \in R, \varepsilon > 0$ ，則必存在 $n, p \in Z$ ，使得 $|n\theta - p| < \varepsilon$ 。

【證明】：(1)  $\theta \in Q$

則存在 $a, b \neq 0 \in Z, (a, b) = 1$ ，使得 $\theta = \frac{a}{b}$ 。

此時，取 $n = b, p = a$

則 $n\theta - p = 0$ ，故此引理顯然成立。

(2)  $\theta \in R - Q$

令  $\{\theta\} = \theta - [\theta]$ ,  $[\theta]$  表  $\theta$  取高斯。

$C_n = n\{\theta\} - b_n$ , 其中  $b_n$  表  $n\{\theta\}$  取高斯部分  
則可縮小原問題至考慮:  $\{C_n\}$  數列中是否存在元素相  
當接近 0, 1 ..... (\*)

將數線上以 0, 1 為端點之線段連接成一圓, 使 0, 1  
重合。

則此圓之周長為 1, 且  $\{C_n\}$  中之元素均落在此圓上。  
為方便起見, 令  $C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1}, \dots$  按逆時鐘順序  
依序排列。

將  $\{C_n\}$  分類成:

$$O_1 \text{ (第一圈)}: C_n \in O_1 \Leftrightarrow 0 \leq n\{\theta\} < 1$$

$$O_2 \text{ (第二圈)}: C_n \in O_2 \Leftrightarrow 1 \leq n\{\theta\} < 2$$

⋮

$$O_k \text{ (第 } k \text{ 圈)}: C_n \in O_k \Leftrightarrow k-1 \leq n\{\theta\} < k$$

⋮

$$\text{則: ① } \{C_n\}_{n=1}^{\infty} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} O_k$$

$$\text{② } \forall i \neq j, C_i \neq C_j$$

∵ 若  $C_i = C_j$

$$\text{則 } i\{\theta\} - b_i = j\{\theta\} - b_j$$

$$\Leftrightarrow (i-j)\{\theta\} = b_i - b_j$$

$$\text{但 } b_i - b_j \in \mathbb{Q}, \{\theta\} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

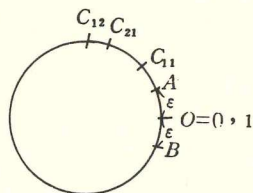
所以  $i = j$

③  $\forall C_i \in O_k$ , 則必存在  $C_j \in O_{k+1}$ , 使得

$$l(\widehat{C_i C_j}) < \frac{1}{2^k \{\theta\}}, \forall k \in \mathbb{N},$$

$$i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{1}{\{\theta\}} \right\rfloor, \text{ 其中 } l(\widehat{C_i C_j}) \text{ 表 } \widehat{C_i C_j}$$

之長度



$\forall \varepsilon > 0$ ,

令  $I = \widehat{AB}$ , 其中  $A$ 、 $B$  為周長 1 之圓上與  $O$  距離為  $\varepsilon$  之二相異點

$O_k = \{C_{k1}, C_{k2}, \dots, C_{km}\}$ , 其中  $C_{k1} < C_{k2} < \dots < C_{km}$ ,

$\forall k \in N, m = \left[ \frac{1}{\{\theta\}} \right]$ 。

若  $\exists k \in N \in C_{k1} \in I$  或  $C_{km} \in I$ , 則(\*)顯然成立。

若  $\forall k \in N, C_{k1} \notin I$  且  $C_{km} \notin I$

考慮  $O_1, O_2$

$C_{21} \in \widehat{OC_{11}}$  或  $C_{21} \in \widehat{C_{11}C_{12}}$  (以下只考慮  $C_{21} \in \widehat{C_{11}C_{12}}$  情況即可)

若  $l(\widehat{C_{11}C_{21}}) = \frac{1}{2\{\theta\}}$ , 其中  $l(\widehat{C_{11}C_{21}})$  表  $\widehat{C_{11}C_{21}}$  之長度

則  $C_{ki} = C_{2i}, \forall k \geq 2, i = 1, 2, \dots, m = \left[ \frac{1}{\{\theta\}} \right]$

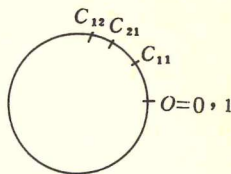
則  $\theta \in Q \rightarrow \leftarrow$

所以  $l(\widehat{C_{11}C_{21}}) < \frac{1}{2\{\theta\}}$  或  $l(\widehat{C_{11}C_{21}}) > \frac{1}{2\{\theta\}}$

若  $l(\widehat{C_{11}C_{21}}) < \frac{1}{2\{\theta\}}$  則得證

$$\text{若 } l(\widehat{C_{11}C_{21}}) > \frac{1}{2\{\theta\}}$$

$$\text{則 } l(\widehat{C_{21}C_{12}}) < \frac{1}{2\{\theta\}} \text{ 得證}$$



再依歸納法易得證  $\forall C_i \in O_k$ ,

則必存在  $C_j \in O_{k+1}$ ,

$$\text{使 } l(C_i C_j) < \frac{1}{2^k \{\theta\}}, \forall k \in N, i = 1, 2, \dots, \left[ \frac{1}{\{\theta\}} \right]$$

$$\text{由 } \textcircled{3} \text{ 知 } \forall k \in N, C_i \in O_k, \exists C_j \in O_{k+1} \in l(\widehat{C_i C_j}) < \frac{1}{2^k \{\theta\}} \dots \textcircled{4}$$

由阿基米得性質知,  $\exists n_0 \in N, \exists k > n_0$  時

$$\frac{1}{2^k \{\theta\}} < \varepsilon \dots \dots \dots (**)$$

由 (\*\*), (\*\*\*) 可證得 (\*) 之答案為肯定的。

## II. 在一維空間中的 Kronecker 定理

任給無理數  $\theta$ , 實數  $\alpha$ , 且  $N, \varepsilon$  為任意正數

則存在整數  $n, p$ , 使得  $n > N$  時  $|n\theta - p - \alpha| < \varepsilon$

【證明】：同上 Lemma 之證明(2)

## III. 系理

任給無理數  $\theta, n \in N$ , 且  $\{n\theta\} = n\theta - [n\theta], [n\theta]$  表示  $n\theta$  取高斯則  $\{n\theta\}$  稠密於  $[0, 1]$ 。

【證明】：令  $A = \{ \{n\theta\} \mid n \in N \}$

$$\because 0 \leq \{n\theta\} < 1, \forall n \in N$$

$$\therefore A \subset [0, 1], \text{ 故 } \bar{A} \subset [0, 1] \dots \dots \dots (*)$$

$$\forall y \in [0, 1]$$

由定理 II 知: 存在遞增序列  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset N, p \in Z$

使得  $|\{n_k \theta\} - p - y| \rightarrow 0$

則  $\{n_k \theta\} \rightarrow p + y$

$\therefore \{n_k \theta\} \subset [0, 1]$  且  $y \in [0, 1]$

$\therefore p = 0$

ie 存在  $A$  之子序列趨近於  $y$

故  $y \in A$  .....(\*\*)

由\*(\*\*)得  $A = [0, 1]$ ，故得證。

#### IV. 定理

任給  $\theta = \frac{b}{a}$ ， $a \neq 0$ ， $b \in Z$ ， $(a, b) = 1$  且  $\alpha \in Q - \{0\}$

則存在  $n, p \in Z$ ，使得  $n\theta - \alpha = p \Leftrightarrow \alpha = \frac{k}{a}$ ， $k \in Z$

【證明】：“ $\Rightarrow$ ” 令  $\alpha = \frac{d}{c}$ ， $c \neq 0$ ， $d \in Z$ ， $(c, d) = 1$

$$\therefore n\theta - \alpha \in Z$$

$$\therefore \frac{nb}{a} - \frac{d}{c} = \frac{nbc - ad}{ac} \in Z$$

$$\Rightarrow ac \mid nbc - ad$$

$$\Rightarrow c \mid ad$$

$$\Rightarrow c \mid a, \because (c, d) = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{k_1} a, k_1 \in Z$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{d}{c} = \frac{k_1 d}{a}, k_1 d \in Z$$

“ $\Leftarrow$ ” 顯然得證。

## V. 例子

一邊長為 1 之方形撞球枱  $ABCD$  (如圖)，球由  $A$  點發出，在無阻力的情況下，球走之路徑必呈循環性 (或週期性) 或稠密於此正方形區域。

【證明】：設球由  $A$  點發出後，撞到邊線的第一點為  $E$ ，

$$\text{令 } \angle EAB = \alpha$$

將撞球枱  $ABCD$  對  $CD$  鏡射，得  $A'B'CD$ ，接著將  $A'B'CD$  對  $A'B'$  鏡射，得  $A'B'C'D'$ 。再將  $A'B'C'D'$  對  $C'D'$  鏡射，得  $A''B''C'D'$ 。

繼續相同步驟，……

則可將問題簡化成： $n \tan \alpha$  為一有理數或稠密於  $AD, BC$

$$(1) \quad \tan \alpha \in \mathbb{Q}$$

則存在  $n \in \mathbb{N}$ ，使得  $n \tan \alpha \in \mathbb{N}$

則球進洞

$$(2) \quad \tan \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

由 III 知： $\forall n \in \mathbb{N}$ ， $(n \tan \alpha)$

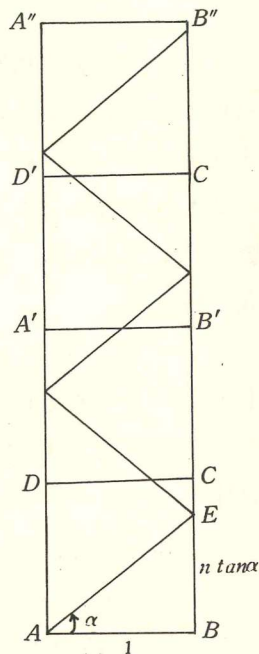
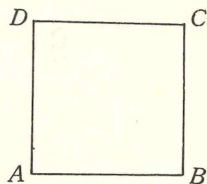
稠密於  $AD, BC$ 。

同理：若  $ABCD$  對  $AD$  鏡射，

一直鏡射下去，可得

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \tan \alpha) \text{ 稠密於 } AB, CD。$$

【注意】：若球是從  $AB$  間的一點發出，則考慮  $n \tan \alpha + k$  形式，再利用 IV 之結論可得相同之結果。



非常感謝王惠中老師、許志農學長的校閱、指導。



## 9. 尤拉公式及其逆定理

指導老師：趙文敏

作者：H.M.Y.

提到多面體，我們會很自然地聯想到尤拉公式 (Euler Formula)。假設  $V$  為多面體的頂點數， $E$  為多面體的稜數， $F$  為多面體的面數，則尤拉公式就是： $V - E + F = 2$ 。反之，若三個正整數  $V$ 、 $E$  與  $F$  滿足  $V - E + F = 2$ ，必定有一個多面體  $P$ ，使得  $V$ 、 $E$  與  $F$  分別是它的頂點數，稜數與面數嗎？本文的目的，就是要證明尤拉公式並討論它的逆定理。首先我們先定義一些名詞。

### 【定義(一)】 多邊形

多邊形是二維空間的部分集合。若  $K$  為一個多邊形，則必滿足下列三個條件。

- (1) 具有有限且恆正的面積。
- (2) 每一條外圍線段的端點恰好是兩條線段的公共端點。
- (3) 每一個多邊形都是連通的。(也就是多邊形內的任意二點  $x$  和  $y$ ，必可在多邊形內找到連接  $x$  和  $y$  的折線；多邊形邊上的任意二點  $x'$  和  $y'$ ，必可在多邊形邊上找到連接  $x'$  和  $y'$  的折線。

### 【定義(二)】 多面體

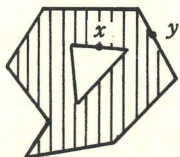
多面體是三維空間的部分集合。若  $K$  是一個多面體，則必滿足下列三個條件。

- (1) 具有有限且恆正的體積。
- (2) 多面體內（包括表面上的點）任意二點  $x$  和  $y$ ，必能在多面體內部（包括多面體表面上的點），找到連接  $x$  和  $y$  的折線。
- (3) 多面體的外部表面是有限個多邊形的聯集。若二面有公共點，則公共點是一點或構成一線段。若三個或三個以上的面有公共點，則公共點是一點。

二個面（faces）相交的線段，叫做多面體的稜（edges）。稜與稜的交點叫做多面體的頂點（vertices）。

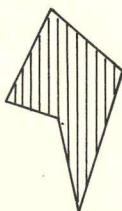
爲了使讀者熟悉多面體與多邊形的定義，我們舉例如下：

【例 1】



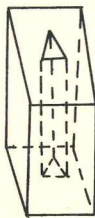
斜線部分不是多邊形。因爲在多邊形邊上二點  $x$  和  $y$ ，在邊上找不到連接  $x$  和  $y$  的折線。所以沒有滿足條件(3)。

【例 2】



斜線部分是多邊形。

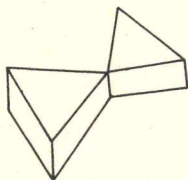
【例 3】



此圖爲一個多面體。

【例 4】

圖形不是多面體。因為超過二個面共有同一條稜，沒有滿足條件(3)。



相信讀者對多面體已有了基本的概念。不妨想一想下面 2 個問題，已知一個多面體  $K$ ，若切除某一角，是否仍為多面體？又假設 2 個多面體，擇其大小相同的兩個拼湊起來，是否亦為多面體？只要你們稍微思索一下，不難發現這兩個答案都是正確的。由此看來多面體似乎變化太大又複雜，到底多面體間有無相同的性質或某種關係、規則可尋？尤拉經過細心的觀察與研究，發現了多面體的面、稜與頂點數之間有一個十分簡單的公式如下：

$$\text{頂點數} - \text{稜數} + \text{面數} = 2$$

這就是有名的尤拉公式。在證明尤拉公式之前，先讓我們來看幾個預備定理。

【引理 1】

若  $A$  是由平面上有限個多邊形的聯集所成的一個連通集合，如圖(一)，則任意兩頂點間加一條位於某多邊形內部的對角線後，其(頂點數 - 稜數 + 面數)值不變。注意：此處的面數是指多邊形的個數

【求證】

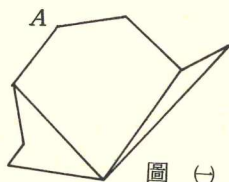


圖 (一)

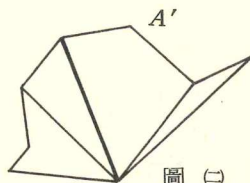


圖 (二)

設  $A'$  是  $A$  加一條對角線後所成的圖形。

且  $V$ 、 $E$ 、 $F$  分別為圖  $A$  的頂點數、稜數、面數。

$V'$ 、 $E'$ 、 $F'$  分別為圖  $A'$  的頂點數、稜數、面數。

則由圖(一)與圖(二)不難看出：

$$V' = V, \quad E' = E + 1, \quad F' = F + 1$$

所以，可得  $V' - E' + F' = V - (E + 1) + (F + 1) = V - E + F$ 。

### 【引理 2】

若  $A$  是由平面上有限個三角形的聯集所成的一個連通集合，則去掉一個三角形後，其（頂點數－稜數＋面數）值不變。注意：此處的面數是指三角形的個數。

### 【求證】

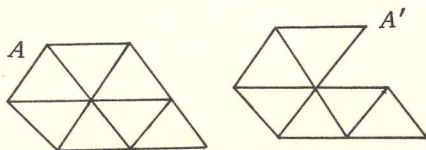
要去掉一個三角形，只須將該三角形所獨有的邊去掉即可。所以，可分成兩種情形：去掉一邊，或去掉二邊及其公共點。

設  $A'$  是由  $A$  去掉一個三角形所得的圖形。

且  $V$ 、 $E$ 、 $F$  分別為圖  $A$  的頂點數、稜數、面數。

$V'$ 、 $E'$ 、 $F'$  分別為圖  $A'$  的頂點數、稜數、面數。

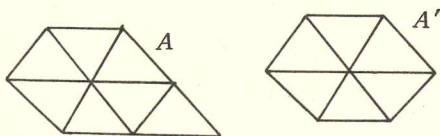
(1) 若只去掉一邊，如圖



則可得  $V' = V, E' = E - 1, F' = F - 1$ 。

所以，可得  $V' - E' + F' = V - (E - 1) + (F - 1) = V - E + F$ 。

(2) 若去掉二邊及其公共點，如圖



則可得  $V' = V - 1, E' = E - 2, F' = F - 1$ ，

$$V' - E' + F' = (V - 1) - (E - 2) + (F - 1) = V - E + F。$$

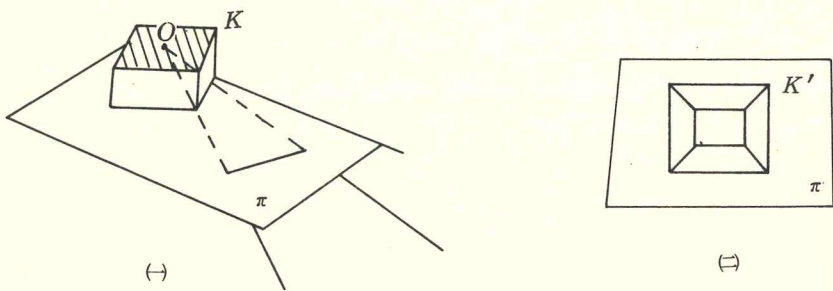
【尤拉公式】 (Euler Formula)

對任一多面體  $K$ ，若  $V$ 、 $E$  與  $F$  分別為多面體  $K$  之頂點數、稜數與面數，則恆有  $V - E + F = 2$ 。

【求證】

已知  $K$  為一個多面體，考慮多面體  $K$  表面所有的頂點、稜、面。任意選一個面，去掉它，但留下其稜，使得剩餘的多面體形狀有如杯子。

因為多面體的稜數是有限，所以一定可在去掉的面的外側找到一個點  $O$ ，使得包含每條稜的直線都不通過  $O$ 。如此一來， $O$  點與所有頂點的連線都不會重合。因為多面體的頂點數是有限，所以可找到一個平面  $\pi$ ，使得  $O$  點與每個頂點的連線都與平面  $\pi$  不平行。以  $O$  為射影中心，將去掉一面後的多面體  $K$  射影在平面  $\pi$  上，就可得出一個由有限個多邊形的聯集所成的連通集合  $K'$ 。如圖。



$K$  與  $K'$  的頂點數、稜數與面數關係如下。

若  $K'$  的頂點數、稜數與面數分別為  $V'$ 、 $E'$  與  $F'$ ，則

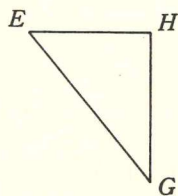
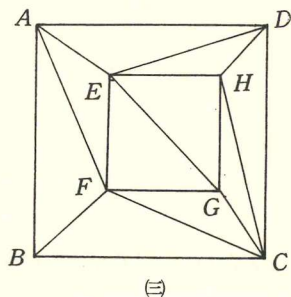
$$V' = V, E' = E, F' = F - 1$$

因此，只要證明  $V' - E' + F' = 1$ ，即得  $V - E + F = 2$ 。

利用位於多邊形內部的對角線，可將  $K'$  分割成若干個三角形，如圖(三)。假設  $V_1$ 、 $E_1$  與  $F_1$  分別為分割後之圖形的頂點數、稜數與面數，則依

引理 1，可得  $V_1 - E_1 + F_1 = V' - E' + F'$ 。  
 逐步將分割後的圖形由外而內去掉三角形，最後我們只剩下一個三角形，如  $\triangle EHG$ 。

依引理 2，在去掉三角形的過程中，每個圖形的（頂點數 - 稜數 + 面數）都等於  $V_1 - E_1 + F_1$ 。



$$\triangle EHG \text{ 的頂點數 } V_2 = 3$$

$$\text{稜數 } E_2 = 3$$

$$\text{面數 } F_2 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{所以，可得 } V' - E' + F' &= V_1 - E_1 + F_1 \\ &= V_2 - E_2 + F_2 \\ &= 1。 \end{aligned}$$

由上述尤拉公式，我們可知：任何一個多面體，它的（頂點數 - 稜數 + 面數）等於 2。若把問題反過來看，當三數  $V$ 、 $E$  與  $F$  滿足  $V - E + F = 2$  時，是否存在一個以  $V$  為頂點數，以  $E$  為稜數， $F$  為面數的多面體呢？這就是所謂尤拉公式的逆向探討。下面我們就是要討論這個問題。事實上，上述的反面敘述並不正確，我們必須再加上適當的條件，這個反面敘述才會成立。史特尼茲 (Steinitz) 在 1906 年回答了這個問題。首先我們先看下面這個式子。

$$V + 4 \leq 2F \leq 4V - 8 \tag{1}$$

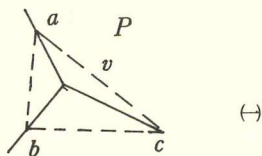
這是說明面的數目不小於頂點數的  $\frac{1}{2}$  倍加上 2，也不大於頂點數的 2 倍減去 4。讀者可以將 (1) 式移項，經過簡短地運算後可得到另一個式子：

$$F + 4 \leq 2V \leq 4F - 8 \tag{2}$$

兩式子的表示法雖然不同，但是基本上意義是相同的。“ $V + 4 \leq 2F \leq 4V - 8$ ” 這個式子就是我們前面所提到的適當條件。

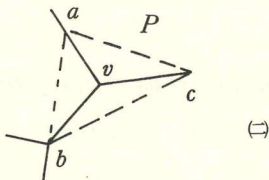
在介紹史特尼茲定理之前，先談談欲造一個多面體的「切除法」。切除法以切除部位的不同，可類分成下列三種。

【 a. 類型 A 】 如圖



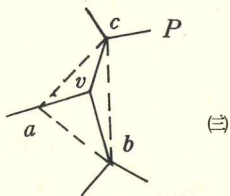
設  $P$  為一個多面體，且  $v$  是  $P$  的一個恰有三個稜的頂點，在那三個稜上任意選三點  $a, b, c$ ，要注意的是  $a, b, c$  這三點均不能是多面體  $P$  的頂點。如此沿著虛線部份切除，我們稱為類型 A 切除法。這樣切除後所得的新多面體比原來的  $P$  多了二個頂點，一個面，三個稜。（簡記： $[2V^*, 3E^*, 1F^*]$ ）

【 b. 類型 B 】 如圖



在頂點  $v$  的三條稜上，任意選三點  $a, b, c$ ，其中只有一點  $b$  是多面體  $P$  的頂點，而其餘二點不是。沿著圖形上虛線的部分切除，這種切除方式我們稱為類型 B 切除法。切除後所得新多面體比原來的多面體  $P$  多了一個頂點，一個面，二個稜。（簡記： $[1V^*, 2E^*, 1F^*]$ ）

【 c. 類型 C 】 如圖



同前，但  $a, b, c$  三點中有二點必須是原多面體  $P$  的頂點，而其連線段不是  $P$  的稜。這種切除方式稱為類型 C 切除法。切除後得到的新多面體比原多

面體多了一個面，一個稜，頂點沒有增加。（簡記 $[1E^*, 1F^*]$ ）

現在我們來介紹史特尼茲定理。

【史特尼茲定理】（Steinitz）

假設 $V$ ， $E$ 和 $F$ 是三個正整數，則有一個多面體的頂點數為 $V$ 、稜數為 $E$ 、且面數為 $F$ 的充要條件為下面的二個關係式成立

$$\begin{aligned}V - E + F &= 2, \\V + 4 &\leq 2F \leq 4V - 8.\end{aligned}$$

【求證】

( $\Rightarrow$ )

(I) 假如有一個多面體 $K$ ，它的頂點數為 $V$ ，稜數為 $E$ ，面數為 $F$ ，則依尤拉公式，必有 $V - E + F = 2 \cdots \cdots (1)$ 前面證過。

(II) 現在我們欲證 $V + 4 \leq 2F \leq 4V - 8$ 。

在多面體中，至少有三條稜共一個頂點。現在我們假設多面體 $K$ 中都是三條稜共一個頂點，然後將頂點數 $V$ 乘以3，得 $3V$ 。又因為每條稜都重複算了一次，所以 $3V = 2E$ 。但是事實上，同一個頂點的稜數不止三條，因此前式該改成 $3V \leq 2E$ 。同理，一個面至少有三條稜。如果我們假設一個面恰有三條稜，則不難得到 $3F = 2E$ （因為每條稜都重複多算了一次）。而事實上一個面的稜數大於或等於3，所以 $3F \leq 2E$ 。再綜合前面的尤拉公式，我們共有

$$V - E + F = 2 \Rightarrow 4 + 2E = 2V + 2F$$

$$3V \leq 2E$$

$$3F \leq 2E$$

$$\Rightarrow 4 + 3V \leq 4 + 2E = 2V + 2F$$

$$\Rightarrow 4 + 3F \leq 4 + 2E = 2V + 2F$$

$$4 + V \leq 2F$$

移項可得

$$4 + F \leq 2V \Rightarrow F \leq 2V - 4 \Rightarrow 2F \leq 4V - 8$$



最後得  $4 + V \leq 2F \leq 4V - 8$ 。

( $\Leftarrow$ ) 假設  $V - E + F = 2$  且  $4 + V \leq 2F \leq 4V - 8$  成立。

欲證存在一個多面體，它的頂點數為  $V$ ，稜數為  $E$ ，面數為  $F$ 。

證明方法為由一個正四面體（頂點數為四，面數為四，稜數為六）經過有限次的切除，最後得到題目所要的多面體。

(I) 設  $V \geq F$

在這種情況，切除方式是：先經  $2F - V - 4$  次類型 B 切除法，再經過  $V - F$  次類型 A 切除法。（ $\because 2F \geq V + 4$  且  $V \geq F$ ， $\therefore 2F - V - 4 \geq 0$ ， $V - F \geq 0$ ）。

類型 B [  $1V^*$ ,  $2E^*$ ,  $1F^*$  ] 類型 A [  $2V^*$ ,  $3E^*$ ,  $1F^*$  ]  
切除後新多面體的面數為  $(2F - V - 4) \times 1 + (V - F) \times 1 + 4 = F$ ，  
新多面體的頂點數為  $(2F - V - 4) \times 1 + (V - F) \times 2 + 4 = V$ ，  
新多面體的稜數為  $(2F - V - 4) \times 2 + (V - F) \times 3 + 6$   
 $= V + F - 2 = E$ 。

(II) 設  $F > V$

先經一次類型 B 切除法，再一次類型 C 切除法，如此交替切除各  $F - V$  次。（ $\because F > V$ ， $\Rightarrow F - V > 0$ ）

此法是合理的，因為正四面體經過類型 B 切除後，必有多於三邊的面，那麼就可以使用類型 C 切除法。最後再將切除後的多面體，以類型 B 切除共  $(2V - F - 4)$  次（ $\because 2F \leq 4V - 8 \Rightarrow F \leq 2V - 4 \Rightarrow 2V - F - 4 \geq 0$ ）

類型 B : [  $1V^*$ ,  $2E^*$ ,  $1F^*$  ] + 類型 C : [  $1E^*$ ,  $1F^*$  ]

$= [ 1V^*$ ,  $3E^*$ ,  $2F^*$  ]  $(F - V)$  次

類型 B : [  $1V^*$ ,  $2E^*$ ,  $1F^*$  ]

$(2V - F - 4)$  次

切除後的多面體的頂點數為  $(F - V) \times 1 + (2V - F - 4) \times 1 + 4 = V$ ，

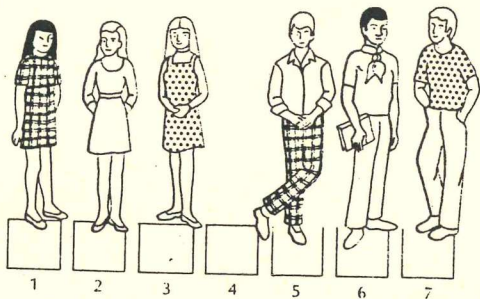
切除後的多面體的稜數為  $(F - V) \times 3 + (2V - F - 4) \times 2 + 6$

$= F + V - 2 = E$ ，

切除後的多面體的面數為  $(F - V) \times 2 + (2V - F - 4) \times 1 + 4 = F$ 。

由 (I)(II) 可知：若  $V - E + F = 2$ ， $V + 4 \leq 2F \leq 4V - 8$  成立，則必有一個多面體，它的面數為  $F$ ，稜數為  $E$ ，頂點數為  $V$ 。

■一年一度的新鮮人迎新舞會終於來臨了。由於男女孩都太保守害羞了，承辦人員絞盡腦汁想了一個辦法：他從男女孩中很有意思地各選了三個人，排列如圖。當他一聲令下，這些男女孩就依循一定的遊戲規則移動，直到穿蘇格蘭布的兩個人，穿圓點花布的兩個人以及衣服上沒有花色的兩個人都在一起。規則如右：他每喊一次，只能一個人向左（右）移動一步，或跳過緊臨左（右）邊的那個人。注意男孩只能向左移動，而女孩只能向右。聰明的Σ人，您如何在他喊六次或少於六次口令後，使穿同樣花色的人配成對？



## 編 後 語

爲增進 $\Sigma$ 人對師大數學的親和力，因此本期各篇均重於簡明扼要，內容所及包羅萬象，舉凡數學教育、分析、微分方程、機率論、代數、數論、幾何等無所不包，篇篇精華、字字珠璣，均爲作者嘔心瀝血之作，並請系上老師專門指導，有待各位讀者細細品味。其中值得一提的是，去年十二月自英國 James Cook 大學專程繞半個地球來訪的「卜思博士」—她是林福來老師在劍橋大學的朋友，我們很榮幸有機會能與他們共同探討數學教育有關問題，並將討論結果摘錄成「探索數學教育—訪卜思博士」一文。

很高興第 21 期師大數學終於出刊了，感謝諸位大師的踴躍投稿以及有關老師的校閱指正，更感謝趙文敏老師、許志農學長的多方協助，使得本期師數順利出刊。最後，懇切希望諸 $\Sigma$ 人多多關愛師數，並將您的學習研究心得公諸於世，遺惠後人。

楊環蜜  
陳彩媚 謹啓

---

---

發行人：陳昭地

出版者：國立臺灣師範大學數學學會

主編：陳彩媚 楊環蜜

封面：J.L.

印刷者：中大打字印刷有限公司

電話：9898686 9854497

出版日期：中華民國七十六年五月三十日

師大訓課刊登第 136 號

---

---

統一編號

06385750370