師大數學

15

慶祝建國七十年暨三十五屆校慶

系主任序

本系成立於民國三十五年八月，首由張儒林教授擔任系主任，當時僅有數學系一年級及二年制專修科一年級各一班，同學三十餘人，教授三位，助教一位，嗣由管公度、潘璞、李新民、康洪元、范傳坡、常法徽各教授輪掌系務，歷經各主任與同仁之群策群力，始具今日之規模。三十四年來本系之畢業系友，已逾貳仟叁佰餘人，多各有成就；其中具博士學位者逾一百四十人，僅獲碩士學位約百叁拾人，或執教於高等學府，或繼續高深研究，餘多服務於中等教育界，平時諄諄教學，誨人不倦，敦品篤行，懷抱熱忱，此實本校優良風氣之所致。

現本系有教師四十一人，學生方面日間部有十二班，夜間部五班，共有同學六百餘人，圖書兩萬餘册，雜誌百餘種；自六十四年夏遷於現址後，環境煥新，出國學成系友或返系服務，或時常返校互相砥礪，研究風氣已大弧度地提高；今日數學系之師生孜孜不息，無不為美好遠景而奮發。

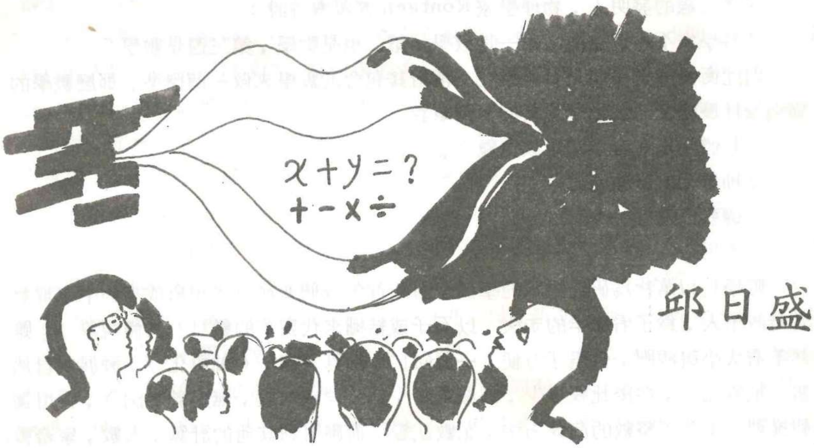
近來科學發展甚速，對數學之需要甚切，本系之任務更日益增大，除肩負數學教育之發展及中等數學教育之輔導外，亦兼具數學學術研究之重要任務。為增強研究風尚，本系於十四年前創辦師大數學年刊，以供師生發表教學及研究心得。切磋琢磨，提高學習及研究興趣，屢經負責同學之辛勞耕耘及師生系友之共同支持，漸茲茁壯，今後請更不吝珠璣，源源賜稿，則本刊必前程似錦，散發絢爛光芒，於此，敬表謝忱，更盼我師生系友善珍此片園地。

顏啓麟　謹識

七十年五月

目　　錄

漫談數學方法



邱日盛

序言：　最近常常接到，國中學生家長，對於國中數學教育的批評，而令人感覺，數學對於學生是一門特別難學的學問，除了有特別數學腦細胞的孩子以外，普通學生無法學好數學的樣子。確實，目前各國中的每次月考或期考中，不及格學生特別多，社會輿論也常提到這個問題。本文想介紹一下，有關數學教育的目的，以及數學的功能。在中小學課程中，數學科是一門重要學科。在學生的心目中，數學科被定爲重要學科，而非及格不可，而且不管將來考那一種學校，那一個系，數學是一定要考的學科，要升學，非把數學學好不可，好像數學是爲了升學才有用處，而誤解了數學教育眞正的目的。

一般人認爲數學成績好的學生必然是聰明的學生，因而各學科的成績都很好。固然數學成績好的學生，其智商不會很差，但智商高的學生不一定數學成績很好。學生學習數學的成果，當然因素很多，但是學生學習方法的得法與否，教師施教的情形，都會有影響。如學生對於數學方法有充分的認識，可能使其學習得到事半功倍的效果。

下列就，數學構造，數學精神，數學思想，數學方法等來討論這個問題。

(a)數學的構造。

我記得，在卅年前的教科書中寫著，“數學是研究數、量、圖形的學問”。雖然爲了學習的方便，中小學數學課程中，所處理的問題，可以說大部分是與數、量

、圖形有關，可是在高中的數學課程中，也已提到集合論，群論，數學所研究的對象也逐漸擴大到，印證康德（Cantor）的一句話，“數學是一個以萬物為其研究對象的學問，是人類心智自由的創造物”。

又X光線的發明人，物理學家Röntgen答覆與論說：

“科學家不可缺少的，第一是數學，第二也是數學，第三還是數學”。

因此衡量一個學問是否科學化，常用其包含的數學來做一個標準。那麼數學的構造是什麼哪？一般數學應具有下列象貌。

(1)具體現象（自然現象或直觀）。

(2)抽象化（或理想化）。

(3)邏輯推理。

(4)應用。

數學是以萬物為研究對象的學問，因此首先我們要從自然現象或事物中來取材。昔時牧羊人，為了看顧羊的走失，以石子或結繩來代表羊的數目（具體現象）。雖然羊有大小與瘦肥，但為了方便，一視同仁，都算一個，（抽象化），發展成自然數（抽象化），然後比較多少，加減乘除，（公理或公設，無定義名詞），再用邏輯推理，產生了整數的演算方法，記數法等，而應用到其他的計算，人數，家畜數，或其他記量等。又如想知，二物間的距離，以步伐數來測之，為了方便，定出一標準度量，來測量長度，且藉以計算面積，體積，容量等等。但表示物體的位置時，雖如地球有那麼大，數學的處理上，可以看做一點，細胞那麼小，有時還不能當一點看。沒有具體事實來做模型，我們無法定出數學出來，沒有理想化或抽象化的過程，數學做其推論，其研究也會更為複雜，更難以研究。發明家，艾廸生，雖然絕頂聰明，不知加法抽象化（太過聰明），老師不知其誤解，而認為艾廸生不會算 2＋2，是一個低能兒，令其退學，其實艾廸生所說有理，二杯水加二杯塩不會成為四杯。（這一點希望將來從事數學教育的本系同學注意）。經過邏輯推理後的數學可成為一完整的數學體系，但對於我們人類來說，數學的功能應該是在其應用上。沒有應用，數學不僅不能發揚光大，同時也不會有新的模式，做為第二階段的抽象化，推理，應用。數學的可貴處，應該在這四個構造，應用在各個科學的領域中。

(b) 數學精神。

學習數學過程中，能培養出來的精神，有上述構造中所產生的應用化的精神。如何將既得的知識，應用在日常生活中，研究工作上，或理論表現上，是數學從古至今的精神。這精神促使人類成了萬物之長。為了更進一步的應用，數學有其概念的不斷擴張以及更一般化的精神。如大家所熟知的，由自然數擴張到整數、有理數、實數、複數、四元數、向量、群、環體、束、Lie代數等等，就是從這個數學的更一般化及更擴張的產物。尤其在一領域中，不能得到更完善的處理時，數學就可

以創設一個新概念，新記號，新體系，化不能解的問題，轉變化能解，能使用，這個精神培養了創造能力，發明，發現的能力，使數學成了“科學之母”。數學有抽象化的過程，才能使其更一般化，學習數學時，我們到處可以體會到這個一般化，擴張化的精神，希望志於數學教育者特別留意這一點。

除了擴張化的精神以外，數學還擁有組織化，系統化的精神，不同地點，不同時代的人們，分別所發現的，幾何學的各種定理，經過歐幾里得整理，得了從少數的公理出發，一個接一個，以邏輯方法推出各各定理，成了嚴整有系統的歐几里得幾何學，充實了今日我們人類輝煌的生活。文化程度，日新月異的今天，萬物愈來愈複雜，系統化，組織化精神的活動，愈來愈需要，數學是組織能力極高的人們所創成的組織體，利用這個體材，數學一方面可以培育具有組織能力的頭腦，另一方面，也可以學到組織的方式與方法。例如簡單的整數乘法，單單三位整數乘二位整數，共有 81,000 題，我想沒有人曾經連續的計算過全部 81,000 題，也不需要做這麼多題。我們祇要了解整數加法，乘法九九，以及乘法原理，整數乘法就不會成問題。何況現今有電算機，在日常生活裏，更不需要人人會心算這個 81,000 題的乘法。又數學歸納法的推理，演算又可以將無窮多同類問題解法，不必一一做其特殊情形的演算。這個系統化，組織化的能力，也可以促進學生發明，發現的創造能力。

數學中又可以學習到應付複雜問題的精神，以簡單記號，或定義表現概念，使得問題間的關係更爲清澈。這就是所謂思想經濟化的精神。數化，圖形全等，相似，演算，函數，代數中的群，環，體等可以說是這個以簡御繁的思想經濟化的產物。

(c) 數學思想

由上述數學精神產生了數學的思想。前面提過，創造數學需要完全自由的思想。如果沒有自由思想，負數，複數不會產生，非歐幾何學絕不能出現，人類可能還處在中世紀時候的生活形態。十七世紀以後，各種新數學相繼出現，引進了自由民主的思想，促進了社會急速的進步，這種說法，應該不是數學家的誇言罷！

數學在應用面上，有對等思想，或同視思想。代數結構中的同構，量的數化，圖形的全等與相似，各種計算公式等等都可以說是，這思想的產物，不管是長度，重量，面積，體積，經過取一度量單位後，都能利用實數來做做演算，不同質料所成的物體，討論其形狀時，可以用同樣的幾何來加以解說，形狀不同的圓，多角形，在拓撲學上有同構（homeomorphic），雖然是整數的演算，在下列演算下可以具有普通演算下的結合律，交換律，零元素，相反元素的存在律，分配律等，其演算定義爲

$$a \oplus b = a + b - 1$$

$$a \odot b = a + b - ab$$

在這代數結構中，2乘3（2⊙3）成爲－1而非6。但它仍然成爲環(Ring)。

我認爲我們常常把數學的另一面忽略，使得學習數學變成索然無味的事情。其實數學裡面有很多地方可以培育優美感覺。計算過程的簡潔，幾何圖形的美麗是其一，又在千變萬化中仍然有萬世不變的數理性格嚴然的岐立。如凸多角形，此論其邊數，形狀如何，其外角的和爲一周角。由自然對數的底 e，圓周率 π，虛數單位 i 所組成的Euler公式

$$e^{2\pi i}=1 \qquad \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx=1$$

更使人驚訝其神秘性。法國碩士Poincar'e曾經說

"能夠發現數學理論的人，一定是對於數學中的秘序，調和，對稱，整齊，及神秘性的美感擁有感應的人，而且祇有這種人，才能做到發現"。

數學中，如果沒有美感，可能不會使很多數學家迷惑到不顧其寢食才是。又數學的構造遠較其他學科，雖然嚴密，但單純，數學問題的答案，是非分明，可以享受到完整的成就感，使人勤勉，積極，使得進取心增加，自信心加強。數學科成績好的學生，因爲常常得到這個完整的成就感，又有美感促使他對於各學科的學習欲望，使他在各方面都有所表現，絕不是單單靠其智商的高而已。

(d) 數學方法。

由以上的數學精神與思想，產生了以下三種數學方法。

(1)尋找與這課題的假設與終結，（即課題中所給的條件與所要求的事項），有密切關係的旣知定理與法則，再將這課題理想化，或抽象化，變成這些旣知定理與法則去探討其解決方法。

例如幾何命題的證明，作圖方法的探討；各種方程式解法的發現；"先會解最簡最易的一元一次方程式，其他方程式就想辦法使它變成一元一次方程式解它。例如聯立多元一次方程式，利用各種消去法，將它變成一元一次方程式，高次方程式，則利用因數分解，或利用代換，轉換，降低次數，歸就到一元一次方程式解之"；利用各種公式的計算，等等。這種數學方法在學校數學科裡都很重視的方法。

(2)如果一個問題含有種種不同的情形時，解決這問題時，我們先解決其最簡單，或最特殊的情形，然後對一般問題時，想辦法歸就這幾個特殊問題的合成，做爲解決問題的方法。

例如，想尋找同一弧所對圓周角與圓心角的關係時，我們先考慮，特殊的圓周角：其一邊爲這圓的直徑時，很快的可知，這圓周角爲圓心角的一半，然後再考慮，圓心在圓周角內，以及圓心在圓周角外的情形就可以得出圓周角爲其所對弧上的圓

心角的一半的關係。

又例如；複變函數論中的 z 的雙一次函數 $\dfrac{(az+b)}{(cz+d)}$ 的研究中，我們先討論 $f(z)=z+b$（平行移動），$f(z)=az$（相似移動，迴轉移動），$f(z)=\dfrac{1}{z}$（相反移動，對稱移動），然後一般的函數 $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$，將它分解爲

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{z+\dfrac{d}{c}}+\frac{a}{c}$$

則 $$f_1(z)=z'=z+\frac{d}{c}$$

$$f_2(z')=z''=\frac{1}{z'}$$

$$f_3(z'')=z'''=\frac{bc-ad}{c^2}z''$$

$$f_4(z''')=z'''+\frac{a}{c}$$

則 $$f(z)=f_4f_3f_2f_1(z)$$

這種方法，在數學中到處可見，對於尋找發現，發明的方針，法則時特別有用處。

(3)把不能解決的材料，變成能夠解決的方法（轉變不能爲可能的方法）。初等數學中的未知數的設置，文字數的設置，根號以及各種數學記號等等，微積分的利用部分積分，如

$$\int e^{ax}\cos mx\,dx$$

等的積分，可說是這方法的高度應用。數學領域的擴張也是以這種思想所推促的方法。數學上，因爲不可能的問題促使它發揚光大的例子到處可見。因爲初等幾何的角三等分的不可能，五次方程式不能以代數方法求根，使Galois理論出現，可見以目前的數學不能解決的問題，使智商高的人，覺得有挑戰性，每天用腦筋多加思考，有朝一日可能會開一新天地，對社會，對國家，對民族有更大，更好的貢獻。歐氏幾何學的平行線公理，有很多大數學家嘗試以其他公理來加以證明，但都歸於失敗，可是有這些大數學家的失敗，才有以後的非歐几里得幾何學的出現，我們的社會才有今天這麼進步，生活才有這麼舒服！

民國70年4月1日

於 師 大 數 學 系

最短郵遞路線電問題

指導老師：黃文達

數二丙　黃寶瑤

一、前言：

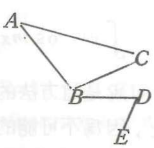
郵差先生每次送信，要走遍他所負責投遞範圍內的街道，完成任務後回到郵局，他應該怎樣走，路程才是最短的？換句話說，對於一個已給定的街道圖，我們欲尋求一種簡單而又經濟的方式，使得郵差先生走遍每一條街道，而且盡量減少重複的次數，完成最短路程的郵遞路綫。

關於這個問題，在數學上有一種〝奇偶點作業法〞，郵電部門可以用這個方法改善投遞制度，提高工作效率，在說明這個方法之前，對於網路術語，我們將作一簡單介紹，以便於往後的討論。

二、網路術語：

1. 網路：

由節點（A、B、C、D、E）及節點間的弧（AB、BD、………）所構成的圖形。如（圖一）

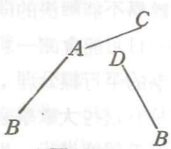


（圖一）

2. 脈絡：

在網路圖形中，若任何兩點，可用一個或數個弧連接，則此圖形稱爲脈絡。

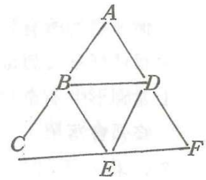
例如：（圖一）爲脈絡，（圖二）不爲脈絡。



（圖二）

3. 閉路脈絡：

如果一個脈絡，它的所有弧能排成一閉路，則稱此爲閉路脈絡。如（圖三）的脈絡可排成 $A-B-C-E-B-D-E-F-D-A$，故爲閉路脈絡。



（圖三）

4. 叉數：

在圖形中，到達某一個頂點的弧數，稱爲該頂點的叉數。

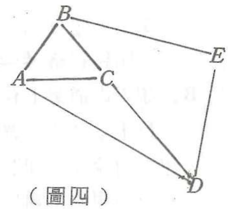
若叉數爲偶數，稱此頂點爲偶頂點。

若叉數爲奇數，稱此頂點爲奇頂點。

例如：圖四中。

到達頂點 A 的弧數爲 3，A 爲奇頂點。

到達頂點 E 的弧數爲 2，E 爲偶頂點。



（圖四）

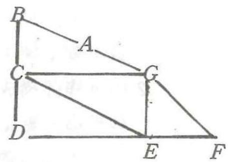
三、問題的產生與探討：

A、在什麼樣的街道圖中，可以找到理想的郵遞路線？（亦即每條街道只走過一次）

㈠假定（圖五）是一個投遞範圍內的街道圖，其中 A 是郵局，則郵差先生走下面的路線都是最短的：

$A\rightarrow B\rightarrow C\rightarrow D\rightarrow E\rightarrow F\rightarrow G\rightarrow C\rightarrow E\rightarrow G\rightarrow A$

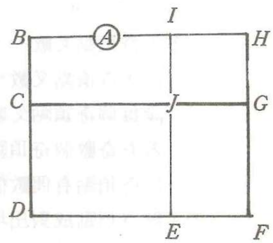
或 $A\rightarrow B\rightarrow C\rightarrow E\rightarrow G\rightarrow C\rightarrow D\rightarrow E\rightarrow F\rightarrow G\rightarrow A$



（圖五）

然而並不是在每個街道圖中，都能找到這麼理想的路線，例如在（圖六）中，不論怎麼走，總有一些路線必需重複，試問如何判斷一街道圖，是否有理想的郵遞路線。

㈡當一個脈絡的所有弧剛好可以排成一條閉路時，這個脈絡就有理想的郵遞路線。閉路脈絡具有兩大特點：①循環性②銜接性，所以我們可因此將上述性質推廣到更多條閉路的情形。亦即：在有限條閉路中，每條閉路至少和另外的一條閉路有公共點時，這有限條閉路可以銜接成一條新的閉路。



（圖六）

㈢怎樣的脈絡，才是閉路脈絡？

觀察（圖五）與（圖六）可知：圖五的頂點皆爲偶頂點，但圖六則不然，於是我們不禁要懷疑，是否閉路的產生與奇偶點的存在有關？

一個脈絡的所有弧要能排成一條閉路，這條閉路一定要經過所有的頂點。如果我們仔細回想奇頂點與偶頂點的定義時，就不難理解到：

1. 當圖形中有奇頂點存在時，此奇頂點有奇數條弧，不論如何進出，總有一條弧會落單；也就是說總有一條弧沒有被走到，此與走遍所有路線不符。

2. 如果某個頂點只經過一次，那麼一進一出，此頂點該有兩條弧；如果經過兩次，一進一出，一進一出，此頂點該有四條弧，所以不論經過幾次，總有偶數條弧，亦即此為偶頂點。

3. 由上述可知：

閉路脈絡 $\Longleftrightarrow$ 沒有奇頂點

B、如果街道圖上有奇頂點出現時，要走完所有的街道，勢必某些街道需走兩次以上，該如何調整，使得總路程為最短？

㈠在討論此一問題前，我們必需注意到一事實，那就是脈絡圖上的奇頂點是成對出現的，關於此一事實，我們將說明如下：

1. 頂點的奇偶性由它的叉數來決定，而叉數就是到達頂點處的弧數，如果在脈絡上去掉一條弧，那麼有兩個頂點的叉數就要各減少 1 ，其餘頂點的叉數不變，總叉數減少 2 。

2. 由 n 條弧構成的脈絡，它的總叉數是 $2n$：

觀於這一點，我們不妨倒回來想：

去掉弧數	減少的總叉數
1	$2 = 1 \times 2$
2	$4 = 2 \times 2$
3	$6 = 3 \times 2$
⋮	⋮
n	$n = n \times 2$

3. $\sum$奇頂點叉數$+\sum$偶頂點叉數$=$總叉數

$\therefore \sum$奇頂點叉數$= 2k$，$k \in N$

設每個奇頂點叉數為 $2k_i + 1$，$k_i \in N$

若有奇數個奇頂點（$2t+1$)，則（$2t+1$）（$2k_i+1$）$= 2k$ 為不可能，所以奇頂點有偶數個。

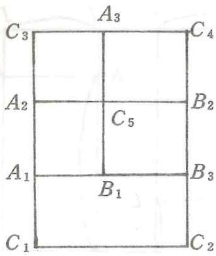
㈡了解奇頂點成對出現的性質後，我們可以放心的將奇頂點兩兩配對，著手以下三部份的調整工作：

1. 添弧於原絡中：

我們知道要構成閉路，必須全部頂點為偶頂點，所以我們打算在奇頂點與奇頂點之間添加一些弧，因為只有路兩端的頂點在添弧時才會改變奇偶性，

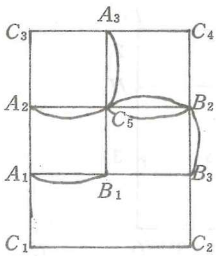
路中間的頂點每次要增加兩條弧，不會改變奇偶性，所以添弧後的脈絡沒有奇頂點。

例：（圖七）中，A_1、A_2、A_3、B_1、B_2、B_3 為奇頂點任意將其兩兩配對，並添弧於其上（A_1B_1、A_2B_2、A_3B_3）得（圖八），此時已經沒有奇頂點。



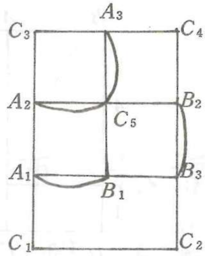
（圖七）

⇒



（圖八）

⇒



（圖九）

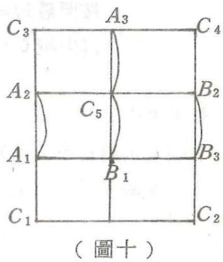
2. 刪去雙重的重複弧：

因為郵遞路線的長短決定於路線中重複部份的長短，（圖八）中，C_5B_2 間有雙重的重複弧，這兩條重複弧可以看成一個圈，把它們抹去後，圖形仍就沒有奇頂點，所以我們可以把雙重弧去掉→圖九。

3. 縮短距離：

觀察（圖九）中 $A_2A_1B_1C_5$：如果添弧於 A_2A_1、B_1C_5，不但不改變上述兩項性質，而且能夠縮短距離。因此在原脈絡上考慮所有的閉圈，把此閉圈上的所有弧分成兩類，其一為有添弧的路綫 α，其一為沒有添弧的路綫 β，如果 α 的路綫和大於 β 的路綫和，則把 α、β 兩組交換，使 β 組為有添弧的路綫，α 為沒有添弧的路綫，如此修改後的脈絡不但不會有奇頂點，而且距離也縮短了。

例：圖九中，設橫距＞縱距，則調整為（圖十），經檢驗各閉圈長度後，知（圖十）為最短郵遞路線。



（圖十）

四、結尾：

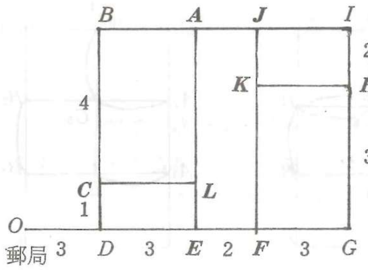
上面所敘述的方法一般稱為奇偶點作業法，我們再舉一個例子，以作為本篇的結束。

例：圖十一是一個矩形街道圖，道旁的數字是距離（單位是百米），郵差先生最常

走的路線是：郵局→D→E→F→G→H→K→H→I→J→K→F→K→J→A→L→E→L→C→L→A→B→C→D→郵局。這樣的走法能否改進？

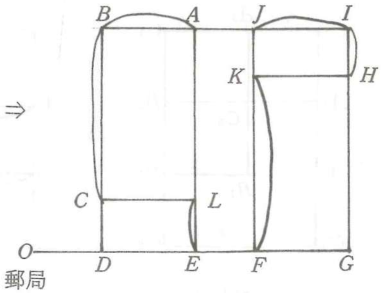
解：(Ⅰ) 檢查各頂點的叉數，得知圖十一有八個奇頂點 A、C、E、F、H、J、K、L。

(Ⅱ) 將奇頂點配成四對（AC、EL、FK、JH）並添弧得圖十二，每個頂點均為偶頂點。



（圖十一）

⇒



（圖十二）

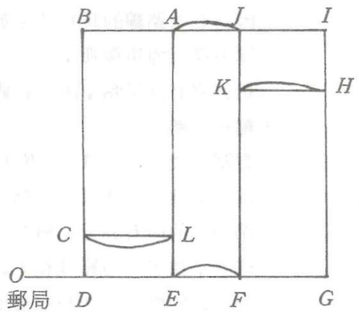
(Ⅲ) 縮短距離：

⇒ 圈$ABCLFFKHIJA$上，所添的弧長（1.6公里）超過圈長（2.6公里）的一半。於是交換此圈上的重複弧得圖（十三）經檢驗後，知圖十三為最短路綫。

(Ⅳ) 最短路線路程：5.8公里

郵差先生最常走的路綫：6.4公里。

按照最短郵遞路綫，每次送信可以少跑0.6公里。

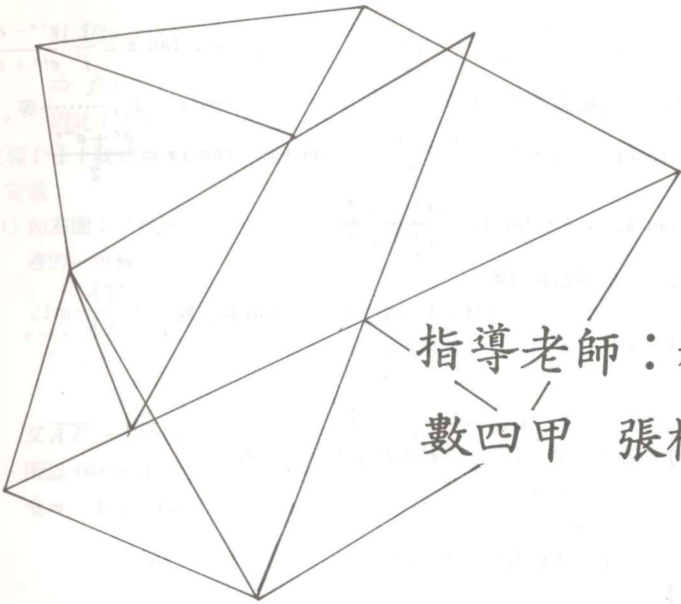


（圖十三）

參考書籍：

1. 線型規劃初步；凡異出版社。
2. 作業研究導論（上）；東華書局。（華梓譯）

三角函數與非歐幾何



指導老師：林福來

數四甲　張樹城

本文擬以解析的方法來看非歐幾何；進而比較非歐與歐氏幾何的關聯性。因此，我們將以三角函數爲出發點，引入非歐解析幾何。

在歐氏幾何中；我們以三角形相似的屬性引入了三角函數；但相似的屬性在非歐幾何中即行不通；雖然我們可仿歐氏的方法；在雙曲型幾何上建立另一套三角函數（如考慮雙曲非歐平面的極大圓，詳見[1]），但在橢圓型幾何中又不適用；因此，本文將引入另一三角函數的定義，其可完全在平面上演算；既適合雙曲型幾何，又適合橢圓型幾何；且在特殊的情況下；這些三角函數與一般歐氏的三角函數無異。另外，由此我們可導出非歐三角形的面積爲 K^2 乘上角盈或角虧；其中 K 爲常數；而藉著非歐三角公式與球面三角公式；我們更可推出球面三角形的面積公式（$\alpha+\beta+\gamma-\pi$）。有了這些後；我們即可步入非歐解析幾何；從而看出非歐距離與歐氏距離公式有何差異；最後，我們引出了" Klein Model"。

一、從極限觀念看三角函數：

(I) 在分析上；我們用級數來定 e^x 如下：

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots$$

而三角函數，則用以下諸方程式定之：

$$\sin x=\frac{e^{+ix}-e^{-ix}}{2i}\ ,\ \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\ ,\ \tan x=\frac{1}{i}\ \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}$$

這些函數均能滿足三角學上的公式，如 $\sin^2x+\cos^2x=1$ ，………等。

而 $\sin hx=-i\sin ix=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ ， $\cos hx=\cos ix=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$$\tan hx=-i\ \tan ix=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

則是熟知的雙曲線函數

以下：將以此二函數為發展點；引入非歐三角函數定義。

【引理 1 】 若 $f=R\to C$ 爲一連續函數，且滿足

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

則 $\exists\, r\in C_1\ \ni\ f(x)=rx$

【引理 2 】 若 $f=R\to C$ 爲一連續函數， $f\neq 0$ 且滿足

$$f(x+y)=f(x)\,f(y)$$

則 $\exists\, r\in C\ \ni\ f(x)=e^{rx}$

由上；我們證明下面定理：

【定理 1 】

(i) 若 $f(x)=\cos mx$ ， $m\in C$ ， $x\in R$ ，則

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

(ii) 反之；若 $f(x)$ 爲 x 之連續函數，且滿足上式；則

$$f(x)=\cos mx\ ,\ m\text{ 常數},\ m\in C\ ,\ (\ x\in R\ )$$

證明：(i) 依 $\cos mx$ 的定義推出即可。

(ii) 令 g ， h ： $R\to C$ 爲連續函數且滿足

$$g(x+y)=g(x)g(y),\ h(x+y)=h(x)h(y),\ \text{但 } g(x)=h(-x)$$

則由引理可知

$$g(x)=e^{imx},\ \ h(x)=e^{-imx};$$

再令 $f(x)=\dfrac{1}{2}(g(x)+h(x))$

因 $f(x+y)=\dfrac{1}{2}(g(x+y)+h(x+y))=\dfrac{1}{2}(g(x)g(y)+h(x)\,h(y))$

$$f(x-y)=\frac{1}{2}(g(x-y)+h(x-y))=\frac{1}{2}(g(x)g(-y)+h(x)\,h(-y))$$

$$=\frac{1}{2}(g(x)h(y)+h(x)\,g(y))$$

且 $2f(x)f(y)=\frac{1}{2}(g(x)+h(x))+(g(y)+h(y))$

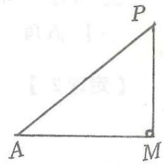
$\Rightarrow\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$

因此；$f(x)=\text{coo}\ mx$；（ m之值隨 $f(1)$而定 ）。

從【 定理 1 】；我們引入如下的定義：

(Ⅱ) 定義：

(i) 如右圖；A爲任一銳角；$\overline{MP}$爲自一邊上一點P至他邊的一垂線；則



$\lim\limits_{p\to A}\frac{\overline{AM}}{\overline{AP}}$爲角$A$的連續函數且滿足定理 1 ，因此；

$$\lim\frac{\overline{AM}}{\overline{AP}}=\cos mA$$

又$\overline{AP}>\overline{AM}$（因其關係與平行公設無關）

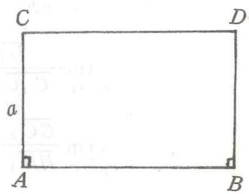
所以 $\cos mA<1$ ，因此$m\in R$；

令$m=1$ ，即得

$$\cos A=\lim_{p\to A}\frac{\overline{AM}}{\overline{AP}}$$

仿此；可定義 $\sin A=\lim\limits_{p\to A}\frac{\overline{MP}}{\overline{AP}}$

(ii) 如右圖；給$\overline{AC}=a$ ，作一薩氏四邊形，即$\angle A=\angle B=90°$ ，$\overline{AC}=\overline{BD}$。



頂角爲 $\angle C$ ，$\angle D$；則 $\lim\limits_{B\to A}\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$爲 a 的連續函數；且滿足定理 1；因此：

$$\lim_{B\to A}\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\text{coo}\ m\ a$$

在雙曲型幾何內；$\overline{CD}>\overline{AB}\Rightarrow m\in C$

可設$m=\frac{i}{K}$ ，$K\in R$；即得

(1) $\lim\limits_{B\to A}\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\cos\frac{ia}{K}=\cos h\frac{a}{K}$

在橢圓型幾何內：$\overline{CD}<\overline{AB}\Rightarrow m\in R$；

可設$m=\frac{1}{K}$；即得

(2) $\lim\limits_{B\to A}\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\cos\dfrac{a}{K}$

從(1)，(2)式中；當 $K\to\infty$

$\Rightarrow \lim\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=1$；而這就是歐氏幾何的矩形的結果。

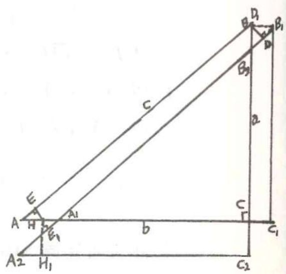
二、非歐三角公式

(I) 直角三角形（非歐）之邊角的基本公式：

【定理2】：直角三角形 ABC；$\angle C=\dfrac{\pi}{2}$；a，b，c 為邊長，如下圖：則

$$\cos mc=\cos ma\ \cos mb$$

證明：取 $\overline{AC}$ 上一短距離 $\overline{AA_1}$，並引 $\overline{AC}$ 至 C_1 使得 $\overline{AA_1}=\overline{CC_1}$，作 $A_1B_1C_1$ 與 ABC 相合，作 $\overline{A_1A_2}=\overline{B_1B_2}$，$\overline{CC_2}=\overline{BB_2}$ 使 $A_2B_2C_2$ 三角形與原三角形 ABC 逼近。再自 B_1 作 $\overline{B_1D_1}$ 與 $\overline{BC}$ 垂直，自 B 作 $\overline{BD}$ 垂直 $\overline{B_1B_2}$；又作 $\overline{HH_1}$ 為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{A_2C_2}$ 公垂線；$\overline{EE_1}$ 為 $\overline{AB}$ 與 $\overline{A_2B_2}$ 公垂線。



則 $\lim\limits_{A_1\to A}\dfrac{\overline{BD}}{\overline{EE_1}}=\cos mc$（由前討論）

$$\lim_{C_1\to C}\frac{\overline{B_1D_1}}{\overline{C_1C}}=\cos ma$$

$$\lim_{C_2\to C}\frac{\overline{CC_2}}{\overline{HH_1}}=\cos mb$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\cos mc}{\cos ma\ \cos mb}=\lim_{A_1\to A}\frac{\overline{BD}}{\overline{EE_1}}\cdot\frac{\overline{CC_1}}{\overline{B_1D_1}}\cdot\frac{\overline{H_1H}}{\overline{CC_2}}$$

$$=\lim_{A_1\to A}\frac{\overline{BD}}{\overline{EE_1}}\cdot\frac{\overline{AA_1}}{\overline{B_1D_1}}\cdot\frac{\overline{HH_1}}{\overline{BB_2}}\ (\overline{AA_1}=\overline{CC_1},\overline{CC_2}=\overline{BB_2})$$

$$=\lim_{A_1\to A}\frac{\overline{BD}}{\overline{BB_2}}\cdot\frac{\overline{AA_1}}{\overline{EE_1}}\cdot\frac{\overline{HH_1}}{\overline{A_1A_2}}\cdot\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_1D_1}}\ (\overline{A_1A_2}=\overline{B_1B_2})$$

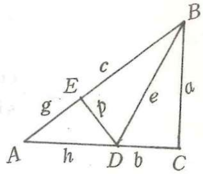
又 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 逼近

$$\Rightarrow \sin B=\lim\frac{\overline{BD}}{\overline{BB_2}}=\lim\frac{\overline{B_1D_1}}{\overline{B_1B_2}}\ ,\ \sin A=\lim\frac{\overline{HH_1}}{\overline{A_1A_2}}=\lim\frac{\overline{EE_1}}{\overline{AA_1}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos mc}{\cos ma \ \cos mb} = \sin B \cdot \frac{1}{\sin A} \cdot \sin A \cdot \frac{1}{\sin B} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \cos mc = \cos ma \ \cos mb$$

【定理3】 如右圖；$\angle C = \frac{\pi}{2}$，$\overline{AB} = c$，$\overline{BC} = a$，$\overline{AC} = b$



則 $\cos A = \cos ma \ \sin B$

$\cos B = \cos mb \ \sin A$

證明：於直角三角形BCD中

$$\cos m\ell = \cos ma \ \cos m(b-h) \quad (\text{由定理}2)$$

$$= \cos ma \ \cos mb \ \cos mh + \cos ma \ \sin mb \ \sin mh$$

$$= \cos c \ \cos mh + \cos ma \ \sin mb \ \sin mh \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

又於直角三角形BDE中：

$$\cos m\ell = \cos mp \ \cos m(c-q)$$

$$= \cos mp \ \cos mc \ \cos mq + \cos mp \ \sin mc \ \sin mq$$

$$= \cos mc \ \cos mh + \cos mp \ \sin mc \ \sin mq \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由(1)，(2)$\Rightarrow \cos ma \ \sin mb \ \sin mh = \cos mp \ \sin mc \ \sin mq$

又$\cos mc = \cos ma \ \cos mb$，$\cos mh = \cos mq \ \cos mp$

因此 $\dfrac{\tan mb}{\tan mc} = \dfrac{\tan mq}{\tan mh}$

當 $h \to 0 \Rightarrow q \to 0$

$$\Rightarrow \quad \lim \frac{\tan mq}{\tan mh} = \lim \frac{q}{h} = \cos A$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\tan mb}{\tan mc} = \cos A$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{\tan^2 mc - \tan^2 mb}{\tan^2 mc}$$

$$= \frac{\sin^2 mc - \tan^2 mb \ \cos^2 mc}{\sin^2 mc}$$

$$= \frac{1 - (1 + \tan^2 mb)\cos^2 mc}{\sin^2 mc}$$

$$= \frac{1 - \dfrac{\cos^2 mc}{\cos^2 mb}}{\sin^2 mc} = \frac{1 - \cos^2 ma}{\sin^2 mc} = \frac{\sin^2 ma}{\sin^2 mc}$$

$$\Rightarrow \sin A=\frac{\sin ma}{\sin mc}$$

同理 $\sin B=\dfrac{\sin mb}{\sin mc}$

$$\Rightarrow \frac{\cos A}{\sin B}=\frac{\dfrac{\tan mb}{\tan mc}}{\dfrac{\sin mb}{\sin mc}}=\frac{\cos mc}{\cos mb}=\cos ma \Rightarrow \cos A=\cos ma \sin B$$

同理 $\cos B=\cos mb \ \sin A$

討論：由上面定理的證明；我們歸類如下：

(i) 雙曲型：在上面公式中，令$m=\dfrac{i}{K}$，即得

*(1) $\sinh\dfrac{a}{K}=\sin A\sinh\dfrac{c}{K}$

*(2) $\sinh\dfrac{b}{K}=\sin B\sinh\dfrac{c}{K}$

(3) $\cosh\dfrac{c}{K}=\cot A\cot B$

(4) $\sinh\dfrac{a}{K}=\tanh\dfrac{b}{K}\cot B$

(5) $\sinh\dfrac{b}{K}=\tanh\dfrac{a}{K}\cot A$

*(6) $\cosh\dfrac{c}{K}=\cosh\dfrac{a}{K}\cosh\dfrac{b}{K}$

*(7) $\cos A=\cosh\dfrac{a}{K}\sin B$

*(8) $\cos B=\cosh\dfrac{b}{K}\sin A$

(9) $\tanh\dfrac{b}{K}=\tanh\dfrac{c}{K}\cos A$

(10) $\tanh\dfrac{a}{K}=\tanh\dfrac{c}{K}\cos B$

(ii) 橢圓型：以$m=\dfrac{1}{K}$代入

*(1) $\sin\dfrac{a}{K}=\sin A\sin\dfrac{c}{K}$

*(2) $\sin\dfrac{b}{K}=\sin B\sin\dfrac{c}{K}$

(3) $\cos\dfrac{c}{K}=\cot A\cot B$

(4) $\sin\dfrac{a}{K}=\tan\dfrac{b}{K}\cot B$

*(6) $\cos\dfrac{c}{K}=\cos\dfrac{a}{K}\cos\dfrac{b}{K}$

*(7) $\cos A=\cos\dfrac{a}{K}\ \sin B$

*(8) $\cos B=\cos\dfrac{b}{K}\ \sin A$

(9) $\tan\dfrac{b}{K}=\tan\dfrac{c}{K}\ \cos A$

(5) $\sin\frac{b}{K}=\tan\frac{c}{K}\ \cot A$ (10) $\tan\frac{a}{K}=\tan\frac{c}{K}\ \cos B$

由上觀之；非歐三角公式中邊與角有特殊關係；歐氏則無。

(Ⅱ) 任意三角形的公式；由上面討論 (i), (ii)；我們可推出如下的結果：

(i) 雙曲型：

(1) $$\frac{\sinh\frac{a}{K}}{\sin A}=\frac{\sinh\frac{b}{K}}{\sin B}=\frac{\sinh\frac{c}{K}}{\sin C}$$

(2) $$\cosh\frac{a}{K}=\cosh\frac{b}{K}\ \cosh\frac{c}{K}-\sinh\frac{b}{K}\ \sinh\frac{c}{K}\ \cos A$$

(3) $$\cos A=-\cos B\ \cos C+\sin B\ \sin C\ \cosh\frac{a}{K}$$

(ii) 橢圓型：

(1) $$\frac{\sin\frac{a}{K}}{\sin A}=\frac{\sin\frac{b}{K}}{\sin B}=\frac{\sin\frac{c}{K}}{\sin C}$$

(2) $$\cos\frac{a}{K}=\cos\frac{b}{K}\cos\frac{c}{K}+\sin\frac{b}{K}\sin\frac{c}{K}\cos A$$

(3) $$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\ \cos\frac{a}{K}$$

三、三種幾何的三角公式之比較：

(Ⅰ) 在雙曲型幾何上：

(i) 在二 (Ⅰ) 討論 (i) 中：

$$\sinh\frac{a}{K}=\sinh\frac{c}{K}\sin A$$

$$\Rightarrow\ \sin A=\frac{\sinh\frac{a}{K}}{\sin h\frac{c}{K}}=\frac{\frac{a}{K}+\frac{1}{3!}\ (\frac{a}{K})^3+\frac{1}{5!}(\frac{a}{K})^5+\cdots\cdots\cdots}{\frac{c}{K}+\frac{1}{3!}\ (\frac{c}{K})^3+\frac{1}{5!}\ (\frac{c}{K})^5+\cdots\cdots\cdots}$$

$$=\frac{a+\frac{1}{3!}\ (\frac{a^3}{K^2})+\frac{1}{5!}(\frac{a^5}{K^4})+\cdots\cdots\cdots}{c+\frac{1}{3!}(\frac{c^3}{K^2})+\frac{1}{5!}(\frac{c^5}{K^4})+\cdots\cdots\cdots}$$

當 $K \to \infty$, $\sin A \to \dfrac{a}{c}$

i,e $\sin A = \dfrac{a}{c}$ 同理 $\sin B = \dfrac{a}{c}$； $K \to \infty$

＊此恰與歐氏的三角函數相當。

(ii) $\cosh \dfrac{c}{K} = \cosh \dfrac{a}{K} \cosh \dfrac{b}{K}$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2!}\frac{c^2}{K^2} + \frac{1}{4!}\frac{c^4}{K^4} + \cdots\cdots\cdots$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2!}\frac{a^2}{K^2} + \frac{1}{4!}\frac{a^4}{K^4} + \cdots\cdots\cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2!}\frac{b^2}{K^2} + \frac{1}{4!}\frac{b^4}{K^4} + \cdots\cdots\right)$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2!}\frac{c^2}{K^2} + \frac{1}{4!}\frac{c^4}{K^4} + \cdots\cdots = 1 + \frac{a^2}{2!K^2} + \frac{b^2}{2!K^2} + \frac{a^2b^2}{4!K^4} + \cdots\cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1c^2}{2!K^2} + \frac{1}{4!}\frac{c^4}{K^4} + \cdots\cdots\cdots = \frac{a^2}{2!K^2} + \frac{b^2}{2!K^2} + \frac{a^2b^2}{4!K^4} + \cdots\cdots\cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2!}c^2 + \frac{1}{4!}\frac{c^4}{K^2} + \cdots\cdots\cdots = \frac{a^2}{2!} + \frac{b^2}{2!} + \frac{a^2b^2}{2!K^2} + \cdots\cdots\cdots$$

當 $K \to \infty \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

＊此即歐氏直角三角形的畢氏定理。

(iii) 同理 $K \to \infty$：

(1) $\dfrac{\sinh \frac{a}{K}}{\sin A} = \dfrac{\sinh \frac{b}{K}}{\sin B} = \dfrac{\sinh \frac{c}{K}}{\sin C}$

就變成歐氏的正弦定律：

$\Rightarrow$ (1)′ $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$

(2) $\cosh \dfrac{a}{K} = \cosh \dfrac{b}{K} \cosh \dfrac{c}{K} - \sinh \dfrac{b}{K} \sinh \dfrac{c}{K} \cos A$

就變成歐氏的餘弦定律：

$\Rightarrow$ (2)′ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

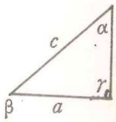
(3) $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cosh \dfrac{a}{K}$

$\Rightarrow$ (3)$'$ $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C$

(iv) 從另一個角度來說，$K \to \infty$，就是$\dfrac{a}{K} \to 0$，$\dfrac{b}{K} \to 0$，$\dfrac{c}{K} \to 0$。但$\dfrac{a}{K} \to 0$，$\dfrac{b}{K} \to 0$，$\dfrac{c}{K} \to 0$，不一定要求$K \to \infty$，只要$a \to 0$，$b \to 0$，$c \to 0$，亦可；如是，則三角形ABC即爲歐氏的三角形；由此可知，雙曲型的無窮小幾何學就是歐氏幾何學了。由這觀念；我們引出下面的問題：

(v) 雙曲型三角形的面積：

我們曉得在雙曲型幾何內，一三角形的面積A等於一常數λ，乘其角虧δ；$i \cdot e$ $A = \lambda \delta$。現就以上討論，來決定此一常數λ；不失一般性；我們就直角三角形來討論。



$$\delta = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$$

$$\begin{aligned}
\sin \delta &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) \\
&= \cos(\alpha + \beta) \\
&= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\
&= \frac{\tanh \frac{b}{K}}{\tanh \frac{c}{K}} \; \frac{\tanh \frac{a}{K}}{\tanh \frac{c}{K}} - \frac{\sinh \frac{a}{K}}{\sinh \frac{c}{K}} \; \frac{\sinh \frac{b}{K}}{\sinh \frac{c}{K}} \\
&= \frac{1}{\sinh^2 \frac{c}{K}} \left(\tanh \frac{a}{K} \tanh \frac{b}{K} \cosh^2 \frac{c}{K} - \sinh \frac{a}{K} \sinh \frac{b}{K} \right) \\
&= \frac{1}{\sinh^2 \frac{c}{K}} \left(\sinh \frac{a}{K} \sinh \frac{b}{K} \cosh \frac{c}{K} - \sinh \frac{a}{K} \sinh \frac{b}{K} \right) \\
&= \frac{\sinh \frac{a}{K} \sinh \frac{b}{K} \left(\cosh \frac{c}{K} - 1 \right)}{\sinh^2 \frac{c}{K}} \\
&= \frac{\sinh \frac{a}{K} \sinh \frac{b}{K} \left(\cosh \frac{c}{K} - 1 \right)}{\cosh^2 \frac{c}{K} - 1}
\end{aligned}$$

$$=\frac{\sinh\frac{a}{K}\sinh\frac{b}{K}}{1+\cosh\frac{c}{K}}$$

$$=\frac{\sinh\frac{a}{K}\sinh\frac{b}{K}}{1+\cosh\frac{a}{K}\cosh\frac{b}{K}}$$

當 a，$b\to 0$ $\sin\delta=\frac{\frac{b}{K}\cdot\frac{b}{K}}{1+1\cdot 1}=\frac{ab}{2K^2}$ 且 $\delta\to\frac{ab}{2K^2}$

令 $A=\lambda\delta$， 又 a，$b\to 0\Rightarrow A=\frac{1}{2}ab$

則 $\frac{A}{\frac{1}{2}ab}=\lambda\frac{\delta}{\frac{1}{2}ab}\Rightarrow\frac{A}{\frac{1}{2}ab}=\lambda\frac{\frac{ab}{2K^2}}{\frac{1}{2}ab}\to 1$

$$\Rightarrow\lambda=K^2$$

$i\cdot e$ $\alpha=K^2\delta$

由此；我們可得雙曲型三角形面積爲

$$\alpha=K^2(\pi-\alpha-\beta-\gamma)$$

同樣；橢圓型三角形面積爲

$$A=K^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$$

(Ⅱ) 橢圓型幾何＝其情形與(Ⅰ)同：

特別地；當 $K=1$；我們得到

(1)′ $\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$

(2)′ $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$

(3)′ $\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a$

即是所謂的球面三角學的公式。

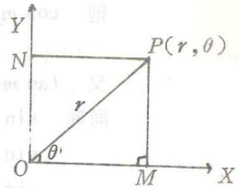
【註1】 由以上三角公式中，有一與平常三角公式顯著不同的——即是這些三角公式中角與邊的特殊關係。這也印證了，非歐幾何中三個內角即可決定一三角形；因而相似三角形也只有在歐氏幾何中才成立；特別地，球面三角形，只要知道三角形三個內角，就可以確定這個三角形了。

【註２】 球面三角公式我們可徑由平常的解析方法求得而橢圓型幾何的三角公式；即可由球面三角學公式挾入一個常數 k（週以邊爲參數的才加）而得；而由上的討論我們可知球面三角形的面積爲

$K=1$； $A=(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ 爲其內角

有了非歐三角學後；我們將仿歐氏引入非歐解析幾何。

四、非歐解析幾何



設 O 爲 X，Y 的垂足；從 P 向 X 作垂線 PM，向 Y 作垂線 $\overline{PN}$；$\overline{OM}=x$；$\overline{ON}=y$；$\overline{OP}=r$

因此如果在歐氏平面；則 P 極坐標爲

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

其中 $r^2=x^2+y^2$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$

如在非歐平面上呢？

由【定理３】的證明過程中，得到：

於直角三角形 OPM 中 $\tan mx=\tan mr\cos\theta$ ……(1)

於直角三角形 OPN 中 $\tan my=\tan mr\sin\theta$ ……(2)

$\tan^2 mx+\tan^2 my=\tan^2 mr$ ……(3)

$\Rightarrow$ $\tan\theta=\dfrac{\tan my}{\tan mx}$ ……(4)

$m=\dfrac{1}{k}$ 或 $\dfrac{i}{k}$；當 $k\to\infty$，(1)$\Rightarrow x=r\cos\theta$，(2)$\Rightarrow y=r\sin\theta$，

(4)(3)$\Rightarrow x^2+y^2=r^2$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$，

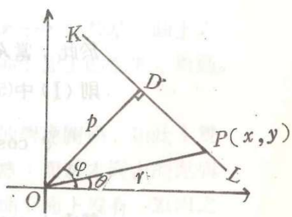
令 $\tan\theta=t$

(4)$\Rightarrow \tan my=t\tan mx\Rightarrow y=mx$；$k\to\infty$

$\Rightarrow$ 這即是歐氏幾何上過原點的直線方程式。

由(1)(2)(3)(4)導出非歐直線方程式：

(I) 直線方程式：



如右圖，$OD=p$，$OP=r$，$\angle POD=\varphi-\theta$，

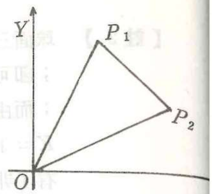
$\angle D=\dfrac{\pi}{2}$；

由(1)；於 DOP 中；$\tan mp=\tan mr\cos(\varphi-\theta)$

$\Rightarrow$ $\tan mp=\tan mr\cos\varphi\cos\theta+\tan mr\sin\varphi\sin\theta$

由(1)(2) $\Rightarrow$ $\tan mp=\tan mx\cos\varphi+\tan my\sin\varphi$ ……(5)

(5)式即爲直 LK 的方程式。



(Ⅱ) 二點間的距離。

設 $P_1(x_1, y_2)$ 與 $P_2(x_2, y_2)$ 爲任二點

其極坐標分別爲 $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2)$

在 $\triangle OP_1P_2$ 內，$OP_1 = r_1$，$OP_2 = r_2$，

$\angle P_2OP_1 = \theta_1 - \theta_2$

則 $\cos mP_1P_2 = \cos mr_1 \cos mr_2 + \sin mr_2 \sin mr_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$ ……(6)

文 $\tan mx_1 = \tan mr_1 \cos\theta_1 \Rightarrow \sin mr_1 \cos\theta_1 = \cos mr_1 \tan mx_1$

同理 $\sin mr_2 \cos\theta_2 = \cos mr_2 \tan mx_2$

$\sin mr_1 \sin\theta_1 = \cos mr_1 \tan my_1$

$\sin mr_2 \sin\theta_2 = \cos mr_2 \tan my_2$

把這些代入(6)

$$\cos mP_1P_2 = \cos mr_1 \cos mr_2 (1 + \tan mx_1 \tan mx_2 + \tan my_1 \tan my_2)$$

$$= \frac{1 + \tan mx_1 \tan mx_2 + \tan my_1 \tan my_2}{\sqrt{1 + \tan^2 mx_1 + \tan^2 my_1}\sqrt{1 + \tan^2 mx_2 + \tan^2 my_2}} \quad \cdots\cdots(7)$$

(Ⅲ) 三種幾何之比較，以雙曲型爲例

(i) 於雙曲型幾何中；設 $m = \frac{i}{K}$，我們引入新的坐標 ξ，η

使得 $$\xi = -iK \tan\frac{ix}{K} = K \tanh\frac{x}{K}$$

$$\eta = -iK \tan\frac{iy}{K} = K \tanh\frac{y}{K}$$

於此，當 $K \to \infty$，$(\xi, \eta) \to (x, y)$

則 (Ⅰ) 中(5)式成爲

$$\xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi = K \tan h\frac{p}{K} \quad 或 \quad a\xi + b\eta + c = 0$$

其中；$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$，　$\sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$K \tan h\frac{p}{K} = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad c^2 < K^2(a^2 + b^2)$$

而 (Ⅱ) 中(7)式成爲

$$\cosh\frac{\overline{P_1P_2}}{K}=\frac{K^2-\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2}{\sqrt{k^2-\xi_1^2-\eta_1^2}\ \sqrt{k^2-\xi_2^2-\eta_2^2}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

如前，對 cos h 展成級數；我們可得

$$P_1P_2=\sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2}$$

此卽歐氏的距離公式。

由(8)可得非歐圓的周長及其面積；我們不再深入討論（詳見[2]）

(ii) Klein Model　　雙曲型幾何在歐氏平面上的表象。

設 $P(\xi,\eta)$ 爲雙曲型平面上之任一點，其極坐標爲 (γ,θ)

由 (i) $\xi=K\tanh\frac{x}{K}=k\tanh\frac{r}{K}\cos\theta$

$$\eta=k\tanh\frac{y}{K}=k\tanh\frac{r}{K}\sin\theta$$

$$\xi^2+\eta^2=k^2\tan h^2\frac{r}{K}<k^2$$

假如我們視 (ξ,η) 爲歐氏平面上之笛卡爾坐標；則由上的方程關係可知；雙曲平面上一點 P，在歐氏平面上有一點 P' 與之對應；且 P' 在圓 $\xi^2+\eta^2=k^2$ 之內部。我們稱此圓爲基本圓。反之，若 (ξ,η) 爲歐氏平面上任一點坐標，解上式得

$$\cos\theta=\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}},\quad \sin\theta=\frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}},$$

$$r=\frac{k}{2}\log\frac{k+\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{k-\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$

若 $\xi^2+\eta^2<k^2$；則 r 不存在；若 $\xi^2+\eta^2=k^2$，則 $r\to\infty$，故基本圓上之點與雙曲平面之無限點對應，基本圓外之點則無雙曲平面上的點與之對應。

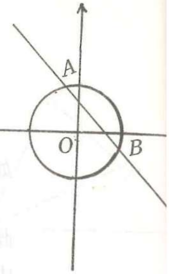
由上得到：

(a)我們得到一種雙曲平面與歐氏平面（基本圓）的對應關係。如此；雙曲平面上一點與歐氏基本圓內一點對應反之亦然；而基本圓上的點與雙曲平面之無限遠點對應。基本圓外之點，雙曲平面上沒有一點與之對應。卽可在歐氏的基本圓在研究雙曲非歐平面的性質。

(b)設歐氏平面上一直線；其方程爲

$$a\xi+b\eta+c=0$$

如下圖，由 (i) 討論；



假如；$c^2 < k^2(a^2+b^2)$

則 $\overleftrightarrow{AB}$ 在基本圓內之一線段AB，與雙曲平面內之一線相對應，A與B兩點相當於雙曲平面之無窮遠點；$i \cdot e$ 基本圓上AB可視為雙曲平面的一條直線，由此；我們即可很容易了解雙曲型的平行公設了。

(c) "Klein Model" 上的非歐距離。

令 $P_1P_2 = d$ ，$k^2-\xi_1^2-\eta_1^2 = f_{11}$

$k^2-\xi_2^2-\eta_2^2 = f_{22}$,

$k^2-\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2 = f_{12}$

則由前兩點距離公式，得

$$\cosh\frac{d}{K} = \frac{f_{12}}{\sqrt{f_{11}}\sqrt{f_{22}}}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{\frac{d}{K}}+e^{-\frac{d}{K}}}{2} = \frac{f_{12}}{\sqrt{f_{11}}\sqrt{f_{22}}} \Rightarrow d = k\log\frac{f_{12}\pm\sqrt{f_{12}^2-f_{11}f_{22}}}{\sqrt{f_{11}}\sqrt{f_{22}}}$$

$$\Rightarrow d = \pm\frac{k}{2}\log\frac{f_{12}+\sqrt{f_{12}^2-f_{11}f_{22}}}{f_{11}-\sqrt{f_{12}^2-f_{11}f_{22}}} \quad \cdots\cdots(9)$$

設$P_1(\xi_1, \eta_1)$，$P_2(\xi_2, \eta_2)$，RQ為$\overline{P_1P_2}$與基本圓的交點。再設$P(\xi, \eta)$為$\overline{P_1P_2}$之任何一點；

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda \quad (P_1P, PP_2 \text{ 為歐氏距離})$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2}}{\sqrt{(\xi-\xi_2)^2+(\eta-\eta_2)^2}} = \lambda \Rightarrow \xi = \frac{\xi_1+\lambda\xi_2}{1+\lambda},\ \eta = \frac{\eta_1+\lambda\eta_2}{1+\lambda}$$

將上式代入基本圓 $\xi^2+\eta^2 = k^2$

$$\left(\frac{\xi_1+\lambda\xi_2}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\eta_1+\lambda\eta_2}{1+\lambda}\right)^2 = k^2$$

$$\Rightarrow \xi_1^2+2\lambda\xi_1\xi_2+\lambda^2\xi_2^2+\eta_1^2+2\lambda\eta_1\eta_2+\lambda^2\eta_2^2 = k^2(1+\lambda)^2$$

$$\Rightarrow (k^2-\xi_2^2-\eta_2^2)\lambda^2+2\lambda(k^2-\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2)+k^2-\xi_1^2-\eta_1^2 = 0$$

$$\Rightarrow f_{22}\lambda^2+2f_{12}\lambda+f_{11} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{-f_{12}\pm\sqrt{f_{12}^2-f_{11}f_{22}}}{f_{22}}$$

$$令\ \lambda_2=\frac{\overline{P_1Q}}{\overline{QP_2}}=\frac{f_{12}-\sqrt{f_{12}^2-f_{12}f_{22}}}{-f_{22}}\ ;$$

$$\lambda_1=\frac{\overline{P_1R}}{\overline{RP_2}}=\frac{f_{12}+\sqrt{f_{12}^2-f_{11}f_{22}}}{-f_{22}}$$

則(9)式變成

$$d=\pm\frac{K}{2}\log\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\pm\frac{k}{2}\log\frac{\overline{P_1Q}}{\overline{QP_2}}\times\frac{\overline{P_1R}}{\overline{RP_2}}=\pm\frac{k}{2}\log(RQP_2P_1)$$

其中（RQP_2P_1）表交比

上式卽表雙曲型的非歐距離（P_1Q, P_1R, QP_2, RP_2皆爲歐氏距離）當P_1，P_2分別靠近R，Q時；$d\to\infty$，因此雖在歐氏上僅是一條有限線段；但它却是具有無窮的非歐距離。

五、結論：

經過這些討論後；我們知道了歐氏幾何實際上只是一個特殊性質；或者說是局部的；而今天，有很多經驗與事實能夠證明現實世界的幾何是非歐的。只是在我們的日常生活範圍內；差異很小；也就覺察不出。但 Einstein 在相對論中引用非歐幾何解釋重力場及天文學；而看出非歐幾何的簡潔性。但究竟以非歐幾何來解釋物理世界；在整體上是否較原來明顯呢？就讓我們拭目以待吧！

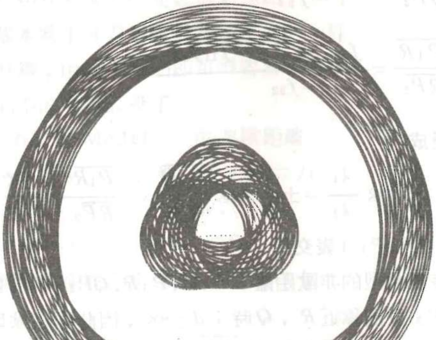
參考資料：

(1) 非歐派幾何學：陳藎民著，台灣商務印書館。

(2) 純粹幾何與非歐幾何：台灣商務印書館譯。

(3) Non-Euclidean Geometry, by KULCZYCKI.

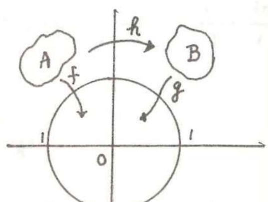
Mobius變換的分析



郭榮明 編
(63級系友)

摘 要

在十九世紀，黎曼（Riemann）知道解析函數（Analytic function）能在平面與平面之間建立起保角投映（Conformal Mapping）。而在1851年論文中，提出這樣的定理：兩個單連結區域（Simple Connected）A，B，若要做保角變換，只要將它們保角地投映到同一個圓形區域上，再將這兩個保角變換合成（$h = g^{-1}{}_{\circ} f$）即可（如圖1）。此黎曼投映定理，確立保角變換在數學上的地位。尤其在工程數學中，如研究位勢理論之邊界值問題時，可藉保角映像或保角變換，將複雜之區域，投映至簡單之區域，而加以分析，則事半功倍，效果卓著也。



（圖1）

Möbius 變換本身就是一種保角變換。在本篇中，可由Möbius 變換的討論中窺知保角變換的一些重要性質，如諧和函數，邊界值問題等。這在工程數學上佔有重大份量。

本篇在第一章中，可看出Möbius 變換是由

幾個基本變換合成。在分析這些變換，可得到Möbius 變換之重要性質——保圓性。在第二章，由交比形式討論到點的映像，由此使我們易於找出Möbius 變換。又Möbius 變換關係到兩平面之映射，因此，對於幾何性質，我們在第三節之對稱性及第四節保角變換，提出有關性質，然後用到第五節的映射情形。最後再舉出一個例子，說明利用Möbius 變換及保角性質，來討論Poission 積分公式。

簡 介

函數具有分子，分母同爲一次因子形式之分數式

如$w=f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ （$\triangle=ad-bc\neq 0$）

稱爲Möbius 變換。（爲紀念德國數學家A.F. Möbius 而命名）

爲一種線性變換，因具分式形式，故又稱雙線性變換（Bilinear transformation）

Möbius 變換，在代數方面，可構成羣（Group）。在幾何上，具有保圓性，在分析方面具有保角特性。

§ 1 Möbius變換的基本變換

Möbius 變換即爲線性變換。包括(1)平移：$w=z+B$ (2)旋轉伸縮：$w=Az$ (3)倒數變換：$w=\dfrac{1}{z}$。$w=f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $\triangle=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$ （a,b,c,d 均爲複數）

(i)若 $c=0$ 時， $w=f(z)=\alpha z+\beta$ （$\alpha=\dfrac{a}{d}$，$\beta=\dfrac{b}{d}$）

(ii)若 $c\neq 0$ 時， $w=f(z)=\dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c(cz+d)}$

令 $f_1(z)=cz+d$ （平移，旋轉）

$f_2(z)=\dfrac{a}{c}+(\dfrac{bc-ad}{c})z$ （平移，旋轉）

$f_3(z)=\dfrac{1}{z}$ （倒數）

則 $w=f(z)=\dfrac{a}{c}+(\dfrac{bc-ad}{c})\cdot\dfrac{1}{cz+d}=f_2(f_3(f_1(z)))$

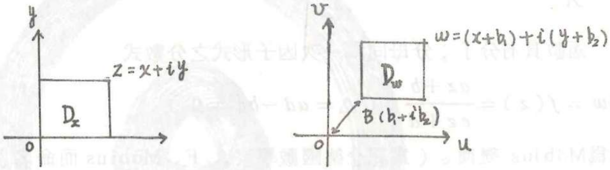
故 $f = f_2 \circ f_3 \circ f_1$

其幾何性質，分別討論於下：

(1)平移：$w = f(z) = z + B$

令 $w = u + iv \quad z = x + iy \quad B = b_1 + ib_2$

則 $w = u + iv = (x + b_1) + i(y + b_2)$



（圖1-1）

因 $f'(z) = 1$，放大率 $|f'(z)| = 1$，故 z 平面的任一面域（domain）D_z 保角映至 w的面域D_w（如圖1－1）

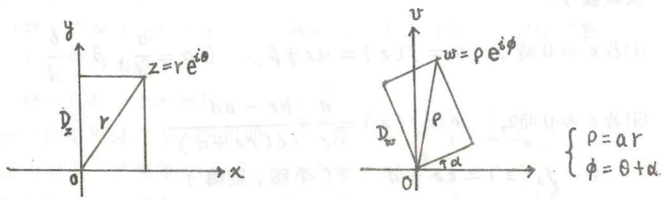
(2)旋轉伸縮：$w = f(z) = Az$

令$A = ae^{i\alpha}$，$z = \gamma e^{i\theta}$，$w = \rho e^{i\phi}$

則 $w = Az$ 可寫成 $\rho e^{i\phi} = a\gamma\ e^{i(\theta+\alpha)}$

$$\rho = a\gamma \qquad \phi = \theta + \alpha$$

因此 z 平面的一面域D_z 可保角映至 w 之面域D_w。而長度伸漲 a 倍（$a>1$）或收縮 a 倍（$a<1$），（$|f'(z)| = |A| = |ae^{i\alpha}| = |a|$）而且$D_w$ 旋轉 α 角度（如圖1－2）



（圖1-2）

(3)倒數變換（Reciprocal or inverse transformation）

$$: \quad w = f(z) = \frac{1}{z}$$

由極坐標，令 $w = \rho e^{i\phi}$，$z = \gamma e^{i\theta}$

則 $w=\rho e^{i\phi}=\dfrac{1}{\gamma e^{i\theta}}=\dfrac{1}{\gamma}e^{-i\theta}$，得 $\rho=\dfrac{1}{\gamma}$，$\phi=-\theta$

(a) 平面上一點 P，經倒數變換之情形

設 P 極坐標（γ，θ），O 原點，$OP=\gamma$

則可由下方法求出 $P'(\dfrac{1}{\gamma},\theta)$， $OP'=\dfrac{1}{\gamma}$

(i) 以 O 原心，$\gamma=1$，作單位圓 C

(ii) 自 P 作切線交圓於 T_1，T_2

(iii) 連絡 T_1T_2 交 OP 於 P'； 則 $OP'=\dfrac{1}{OP}=\dfrac{1}{\gamma}$

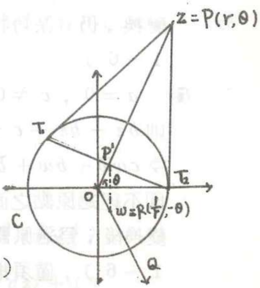
因 $\triangle OPT_1\sim\triangle OT_1P'\Rightarrow\dfrac{OT_1}{OP'}=\dfrac{OP}{OT_1}\Rightarrow(OP)(OP')=(OT_1)^2$

$=1$

故 $OP'=\dfrac{1}{OP}$

(iv) 再取輻角等於 $-\theta$ 之 OQ 線上，截取 $OR=OP'$

則得出 R，即為 P 之倒數變換點（圖1－3）



（圖1-3）

(b)在整個平面坐標點變換情形

(i) 實軸，虛軸；單位圓；$z=\pm1$ 點等之倒數變換，仍不變。

(ii) 其餘之點，可由(a)之討論，推出各對應區域的倒數變換。（如圖1－4）

(c) 平面上之圓或直線，經倒數變換之情形。

設方程式：$az\bar{z}+b\bar{z}+\bar{b}z+c=0$ （$a\neq0$，$c\in R$，$b\in C$）

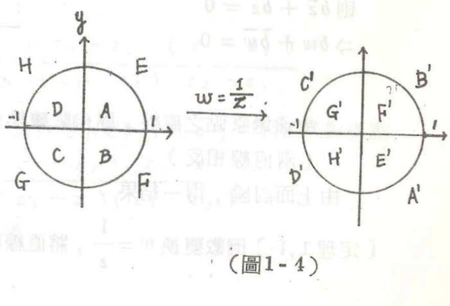
為一圓方程式，當 $c=0$ 時

此圓經過原點 $z=0$

當 $a=0$ 時

則方起式 $b\bar{z}+\bar{b}z+c=0$ 為一直線。

今分四種情形討論：



（圖1-4）

(i)　$a \neq 0$，$c \neq 0$

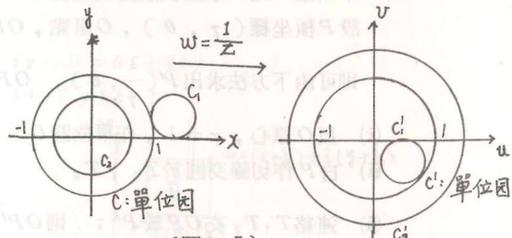
則 $az\bar{z}+b\bar{z}+\bar{b}z+c=0$

$\Rightarrow a+\frac{b}{z}+\frac{b}{z}+\frac{c}{z\circ\bar{z}}=0$

（由 $w=\frac{1}{z}$）

$\Rightarrow cww+bw+bw+a=0$

故一個不經過原點之圓，在倒數變換後，仍爲一個不經過原點之圓。（如圖１－５）



（圖1－5）

(ii)　$a \neq 0$，$c=0$

則 $az\bar{z}+b\bar{z}+\bar{b}z=0$

$\Rightarrow bw+\bar{b}\bar{w}+a=0$

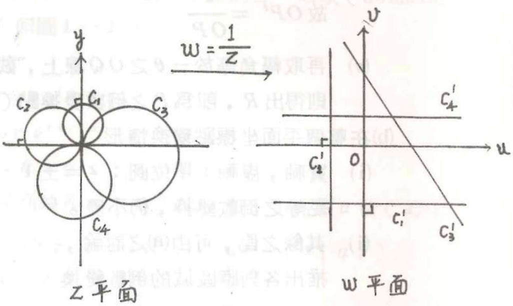
故過原點之圓，經倒數變換後，爲不經過原點的直線，且此變換，仍有保角特性。（如圖１－６）

(iii)　$a=0$，$c \neq 0$

則 $b\bar{z}+\bar{b}z+c=0$

$\Rightarrow cw\bar{w}+bw+\bar{b}\bar{w}=0$

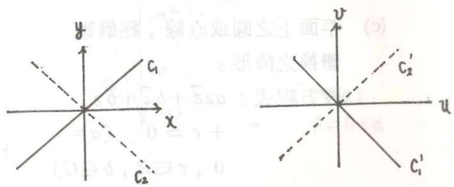
即不經過原點之直線，經倒數變換後，爲過原點的圓（如圖１－６），僅須把 z，w 平面互換即可。



(iv)　$a=0$，$c=0$

則 $b\bar{z}+\bar{b}z=0$

$\Rightarrow bw+\bar{b}\bar{w}=0$



故通過原點之直線，經倒數變換後，仍爲過原點的直線。（如圖１－７）（兩直線相反）

由上面討論，得一結果

〔定理1,1〕倒數變換 $w=\frac{1}{z}$，將直線與圓映到直線與圓。

因此Möbius 變換 $w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $\Delta \neq 0$

可由以上幾種變換之合成：$f = f_2 \circ f_3 \circ f_1$

故對 f 變換可獲相同的結果

〔定理1,2〕Möbius 變換將直線與圓映到直線與圓。

上面的性質，稱爲變換的保圓性。

§2 Möbius 變換與交比（Cross - Ratio）

交比定義： 設 A, B, C, D 四點共線，則 $\dfrac{CA}{CB} : \dfrac{DA}{DB}$ 稱爲此四點之交比。

以 (A, B, C, D) 表之，即 $(A, B, C, D) = \dfrac{CA}{CB} : \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{CA}{CB} \times \dfrac{DB}{DA}$

Möbius 變換：$w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$，雖寫成四個複常數，實際上祇由三個所

決定，即 $w = \dfrac{az+b}{cz+d} = \left(\dfrac{a}{c}\right)\dfrac{z+\dfrac{b}{a}}{z+\dfrac{d}{c}}$，由 $\left(\dfrac{a}{c}\right), \left(\dfrac{b}{a}\right), \left(\dfrac{d}{c}\right)$ 所決定。故一般

而論，可由三個已知條件，確定此Möbius 變換。

下面將敍述決定此Möbius 變換方法（用交比形式）

設 z 平面任兩點 z_i，z_j 在 W 平面之映像爲 w_i，w_j

則
$$w_i - w_j = \frac{az_i+b}{cz_i+d} - \frac{az_j+b}{cz_j+d} \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$
$$= \frac{(az_i+b)(cz_j+d) - (az_j+b)(cz_i+d)}{(cz_i+d)(cz_j+d)}$$
$$= \frac{(ad-bc)(z_i-z_j)}{(cz_i+d)(cz_j+d)}$$

故可得：$\dfrac{(w_1-w_2)(w_3-w_4)}{(w_1-w_4)(w_3-w_2)} = \dfrac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)(z_3-z_2)}$

取上式中 z_1, z_2, z_3 與 w_1, w_2, w_3 爲對應指定點，而 z，w 爲任意對應點

則由 $\dfrac{(w_1-w_2)(w_3-w)}{(w_1-w)(w_3-w_2)} = \dfrac{(z_1-z_2)(z_3-z)}{(z_1-z)(z_3-z_2)}$

解出 w，而得所需之Möbius 變換式

由以上所述，可得下之性質。

〔定理 2,1 〕兩複平面內之交叉比率（交比）值，在Möbius 變換下，恒爲不變量。

又函數 $w=f(z)$ 的固定點，就是滿足 $z=f(z)$ 的點 z

〔定理 2,2 〕：Möbius 變換不屬恒等，則最多有兩個固定點，如有三個以上固定點，則屬恒等。

〔證明〕：$w=f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$

(i) $c=0$（$d\neq 0$）時，$f(z)=\alpha z+\beta$，則 $f(\infty)=\infty$，∞是一固定點。

若 $\alpha\neq 1$，則必存在一固定點 $z=\dfrac{\beta}{1-\alpha}$。

若 $\alpha=1$，$\beta\neq 0$，則無固定點。但於 $\alpha\to 1$ 時 $z=\dfrac{\beta}{1-\alpha}\to\infty$，故 $f(z)=z+\beta$ 可視∞爲其相重固定點。

(ii) $c\neq 0$，$f(\infty)=\dfrac{a}{c}\neq\infty$，而 $f(\delta)=\infty\neq\delta$，此處 $\delta=-\dfrac{d}{c}$

但由 $z=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 解之，得 $z=\dfrac{(a-d)\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}=\dfrac{(a-d)\pm\sqrt{\triangle}}{2c}$

所以當① $(a-d)^2+4bc\neq 0$ 時，有相異兩固定點。

② $(a-d)^2+4bc=0$ 時，兩個固定點重合。

(iii) 如 $a=d\neq 0$，$b=c=0$，則$\Rightarrow$ $dz=az$，則變換爲恒等。

綜合以上敍述，吾人有下列結果。

〔定理 2,3 〕：z 平面三不同點 z_1，z_2，z_3 可變換爲 w 平面三不同點 w_1，w_2，w_3，可由唯一的Möbius 變換 $w=f(z)$ 完成；即

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

〔證明〕：$w=f(z)$ 爲唯一者

設 $w=g(z)$ 爲另一可使 z_1，z_2，z_3 變換爲 w_1，w_2，w_3 之Möbius變換式

則反變換式 $g^{-1}(w)$ 可使 w_1 轉換爲 z_1，w_2 爲 z_2，w_3 爲 z_3

結果 $H=g^{-1}(f(z))$ 使 z_1，z_2，z_3 自行轉換。即得三固定點。

由前面〔定理 2,2 〕，知 H 爲恒等變換，即 $g(z)=f(z)$。

§ 3 對稱性

〔定義 3,1 〕：兩個點 z_1，z_2 對於直線或圓 Γ 對稱，就是通過 z_1，z_2 之任意一圓或直線，都與 Γ 正交。

〔定義 3,2 〕：兩點 P，Q 對於以 O 爲圓心，R 爲半徑之圓，互爲反點（ inverse points ）就是 O - P - Q 三點共線，且 $(OP)\cdot(OQ)=R^2$

由上面定義，可得出下面性質

〔定理 3,1 〕：兩有限點 P，Q 對稱於圓 Γ，若且唯若 P，Q 對於圓 Γ 互爲反點。

〔證明〕：設 Γ 圓圓心 O； $OP=\gamma$，$OQ=\rho$，$OM=R$（半徑）（如圖3,1 ）

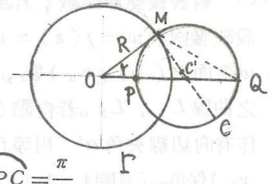
（⇐） 若 $\gamma\rho=R^2$

$\Rightarrow\dfrac{\gamma}{R}=\dfrac{R}{\rho}\quad\Rightarrow\triangle POM\sim\triangle MOQ$

$\Rightarrow\angle OMP=\angle OQM$

$\Rightarrow\angle OMO'=\angle OMP+\angle PMO'$

$\quad=\angle OQM+\angle PMO'=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{MPC}=\dfrac{\pi}{2}$



（圖3 - 1）

故 $OM\perp O'M$，由〔定義 3,1 〕知

過 P，Q 兩點之圓 C 與 Γ 正交，故 P，Q 對稱於 Γ

（⇒） 若 $OM\perp O'M$

$\Rightarrow\angle OMP=\angle OQM$

$\therefore\angle OPM=\angle PMQ+\angle OQM$

$\quad=\angle PMQ+\angle OMP$

$\quad=\angle OMQ$，故 $\triangle POM\sim\triangle MOQ$；故 $\dfrac{\gamma}{R}=\dfrac{R}{\rho}$，即 $\gamma\rho=R^2$

故 P，Q 對圓 Γ 互爲反點。

〔註〕：由上面性質知一圓 C 之圓心 z_0，且 $z_1=\infty$，則 z_0 與 z_1 對圓 C 爲對稱。

〔定理 3,2 〕：設 z_1，z_2 對於所給之直線或圓對稱，$w=f(z)$ 爲任意Möbius 變換。

則 $w_1=f(z_1)$；$w_2=f(z_2)$ 爲關於 $\Gamma'=f(\Gamma)$（仍爲直線與圓）之對稱點。

〔證明〕：設 C 是通過 w_1，w_2 的任意直線或圓。

只要證明C與Γ'正交即可。

由逆變換式$z=f^{-1}(w)$；則f^{-1}仍爲Möbius變換，（由定理4－1，因Möbius爲一對一變換）

且$f^{-1}(w_1)=z_1$，$f^{-1}(w_2)=z_2$，$f^{-1}(\Gamma')=\Gamma$

因$f^{-1}(c)=\Gamma_z$仍爲直線或圓，而且過z_1，z_2兩點

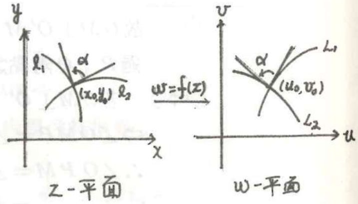
所以與Γ正交，但$w=f(z)$爲保角變換。

故只要Γ_z與Γ正交，則C與Γ'即爲正交。

§4 保角變換性質

對於複變數函數，若爲解析（Analytic）函數，其特性即爲保角特性。設映像函數$w=f(z)=u+iv$，$z=x+iy$，將z平面內點(x_0, y_0)映成w平面之(u_0, v_0)點，並將過(x_0, y_0)之曲線ℓ_1，ℓ_2映成過(u_0, v_0)之曲線L_1，L_2。若自點(x_0, y_0)所作有向切線之夾角α，與自點(u_0, v_0)所作有向切線夾角α'相等（方向，值均相等），則此映像函數$w=f(z)$在點(x_0, y_0)保角。（如圖4－1）

下面即討論有關幾個性質。



(圖4-1)

〔定義4－1〕：若$f(z)$爲一單值函數，在面域D中，均可微分，則稱$f(z)$在D中爲解析函數。

〔定理4－1〕：函數$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$能在面域（domain）D中解析的充要條件是四個偏微分u_x，v_x，u_y，v_y存在，連續，且滿足哥西一黎曼（Cauchy－Riemann）條件，即$u_x=v_y$；$u_y=-v_x \quad \forall z\in D$

〔證明〕：1°（⇨）令$z_0=x_0+iy_0\in D$

$$\text{則 } f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[f(z_0+h)-f(z_0)\right]$$

(i) 若h取實數α，則
$$f'(z_0)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\left[f(z_0+\alpha)-f(z_0)\right]=$$
$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\left[u(x_0+\alpha, y_0)-u(x_0,y_0)\right]$$
$$+\lim_{\alpha\to 0}\frac{i}{\alpha}\left[v(x_0+\alpha, y_0)-v(x_0,y_0)\right]$$

因 $f'(z_0)$ 存在，故　上式左項 $= u_x(x_0, y_0)$

上式右項 $= v_x(x_0, y_0)$

即 $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0)$

(ii)　同理取 $h = i\beta$，則 $f'(z_0) = \lim\limits_{\beta \to 0} \dfrac{1}{\beta i}[f(z_0 + i\beta) - f(z_0)]$

$$= (-i) \lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta}[u(x_0, y_0+\beta) - u(x_0, y_0)] + \lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta}[v(x_0, y_0+\beta) - v(x_0, y_0)]$$

$$= (-i) u_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0)$$

$\alpha \to 0$ 與 $\beta \to 0$　之極限必相等。

由(i)(ii)得 $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0)$

$= v_y(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0)$

故　$u_x = v_y$

$u_y = -v_x$

$2°$ ($\Leftarrow$)

考慮增量 $h = \alpha + i\beta$；則在點 $z = z_0 = x_0 + i y_0$ 的差商可化成

$$\frac{u(x_0+\alpha, y_0+\beta) - u(x_0, y_0)}{\alpha + i\beta} + i\frac{v(x_0+\alpha, y_0) - v(x_0, y_0)}{\alpha + i\beta}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+i\beta}\left\{\frac{1}{\alpha}[u(x_0+\alpha, y_0+\beta) - u(x_0, y_0+\beta)] + \frac{i}{\alpha}[v(x_0+\alpha, y_0+\beta) - v(x_0, y_0+\beta)]\right\} + \frac{\beta}{\alpha+i\beta}\left\{\frac{1}{\beta}[u(x_0, y_0+\beta) - u(x_0, y_0)] + \frac{i}{\beta}[v(x_0, y_0+\beta) - v(x_0, y_0)]\right\}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+i\beta}[u_x(x_0+\theta_1\alpha, y_0+\beta) + i v_x(x_0+\theta_2\alpha, y_0+\beta)]$$

$$+ \frac{\beta}{\alpha+i\beta}[u_y(x_0, y_0+\theta_3\beta) + i v_y(x_0, y_0+\theta_4\beta)]$$

式中 θ_i　$i = 1, 2, 3, 4$　$0 < \theta_i < 1$ 是利用中值定理 (Mean Value Thm) 得到的。

又因其偏導數在點 (x_0, y_0) 連續。故上式可寫成

$$=\frac{\alpha}{\alpha+i\beta}\left[u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)+\varepsilon_1\right]+\frac{\beta}{\alpha+i\beta}\left[u_y(x_0,y)+iv_y(x_0,y_0)+\varepsilon_2\right]$$

（此處 $\varepsilon_1\to 0$ ，$\varepsilon_2\to 0$ ，隨 $h=\alpha+i\beta\to 0$ ）

又由定理條件知偏導數滿足Cauchy - Riemann方程式，故上式再化簡爲

$$=u_x(x_0,y_0)+i\,v_x(x_0,y_0)+\frac{\alpha\varepsilon_1}{\alpha+i\beta}+\frac{\beta\varepsilon_2}{\alpha+i\beta}\left(\left|\frac{\alpha}{\alpha+i\beta}\right|<1,\ \left|\frac{\beta}{\alpha+i\beta}\right|<1\text{ ，且當 }h\to 0\text{ 則 }\varepsilon_1\to 0\text{ ，}\varepsilon_2\to 0\right)$$

$$=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)$$

$$=f'(z_0)$$

故 $f(z)$ 在 D 中可解析

〔註一〕 上述定理知一解析函數 $f(z)$，滿足Cauchy - Riemann方程式，若設 $f(z)$ 有二階連續的偏導數，則 $u_{xx}=v_{yx}=v_{xy}=-u_{yy}$

故 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ ，此式稱爲二維的Laplace方程式。

$u(x,y)$ 若爲此方程式之解，則稱 $u(x,y)$ 爲諧和函數（Harmonic function）

〔註二〕 上述定理的 $f'(z)=u_x+iv_x$

$\Rightarrow |f'(z)|^2=u_x^2+v_x^2$ 再由Cauchy - Riemann式

$\Rightarrow |f'(z)|^2=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}$ ；即爲由面域 D 到 w 平面變換，$u(x,y)$，$v(x,y)$ 之Jocobian行列式。

〔定義4－2〕：若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 之第一階偏導數存在，且連續，且滿足 $u_x^2+v_x^2\neq 0$，則 $f(z)$ 稱爲 P 函數。

由上面討論，吾人可得下面一個重要定理。

〔定理4－2〕：P 函數 $f(z)$ 在面域 D 中，爲保角變換的充要條件是 $f(z)$ 可解析，且 $f'(z)\neq 0$，$\forall z\in D$。

〔證明〕：1°（$\Leftarrow$）

設 $z=\lambda(t)$ 爲一連續曲線，且 $\lambda'(t_0)\neq 0$，$t_0\in[a,b]$

則 $\lambda(t)$ 在函數 $f(z)$ 之下的寫像爲

$$w=f(z)=f(\lambda(t))=F(t)$$

取 $\{t_n\}$ 爲 $[a, b]$ 中，收斂於 t_o 之點序列，令 $R_n = \dfrac{F(t_n)-F(t_o)}{t_n - t_o}$

由於 $R_n = \dfrac{F(t_n)-F(t_o)}{\lambda(t_n)-\lambda(t_o)} \cdot \dfrac{\lambda(t_n)-\lambda(t_o)}{t_n - t_o}$ （因 $\lambda'(t_o) \neq 0$，故在 t_o 之鄰域 $\lambda(t_n) \neq \lambda(t_o)$）

$$\Theta = \lim_{n\to\infty} Arg(R_n) = \lim_{n\to\infty} Arg\left(\frac{F(t_n)-F(t_o)}{\lambda(t_n)-\lambda(t_o)} \cdot \frac{\lambda(t_n)-\lambda(t_o)}{t_n - t_o}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} Arg\left(\frac{w_n - w_o}{z_n - z_o} \cdot \gamma_n\right) = \lim_{n\to\infty} Arg\left(\frac{w_n - w_o}{z_n - z_o}\right) + \lim_{n\to\infty} Arg\ \gamma_n$$

$$= Arg\ f'(z_o) + \theta$$

故 $\Theta - \theta = Arg\ f'(z_0) = \alpha =$ 常數

所以函數 $f(z)$ 爲保角變換

2°（⇨）

令 ℓ_1，ℓ_2 爲兩相交於 z_0 之連續曲線。

$\ell_1 : z_1(t) = x_1(t) + iy_1(t)$ $\ell_2 : z_2(t) = x_2(t) + iy_2(t)$

兩曲線間之夾角爲過 z_0，其相應之切線間之夾角。

設各切線與實軸正向所成之正角，分別爲 α_1 α_2

$$\tan\alpha_1 = \frac{y'_1(t_0)}{x'_1(t_0)} \qquad \tan\alpha_2 = \frac{y'_2(t_0)}{x'_2(t_0)}$$

在不失普遍性之情形下，選一恰當的參數值 $y'_1(t_0) = 0$，則 $\alpha_1 = 0$

於是兩曲線間的夾角 $\alpha = \alpha_2$，則 $w = f(z)$ 將曲線 ℓ_1，ℓ_2 分別映到 w 平面上的曲線 L_1，L_2 與實軸 u 所成之正向角分別爲 β_1，β_2，

$$\text{則 } \tan\beta_1 = \frac{v'(x_1, y_1)}{u'(x_1, y_1)} = \frac{v_x x'_1 + v_y y'_1}{u_x x'_1 + u_y y'_1} = \frac{v_x x'_1}{u_x x'_1} = \frac{v_x}{u_x}$$

$$\tan\beta_2 = \frac{v'(x_2, y_2)}{u'(x_2, y_2)} = \frac{v_x x'_2 + v_y y'_2}{u_x x'_2 + u_y y'_2}$$

$$= \frac{v_x + v_y \dfrac{y'_2}{x'_2}}{u_x + u_y \dfrac{y'_2}{x'_2}} = \frac{v_x + v_y \tan\alpha_2}{u_x + u_y \tan\alpha_2} = \frac{v_x + v_y \tan\alpha}{u_x + u_y \tan\alpha}$$

因 $f(z)$ 爲保角變換，故 $\beta_2 - \beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha$

$$\therefore \tan\alpha = \tan(\beta_2-\beta_1) = \frac{\tan\beta_2-\tan\beta_1}{1+\tan\beta_2\tan\beta_1} = \frac{\dfrac{v_x+v_y\tan\alpha}{u_x+u_y\tan\alpha}-\dfrac{v_x}{u_y}}{1+\left(\dfrac{v_x+v_y\tan\alpha}{u_x+u_y\tan\alpha}\right)\left(\dfrac{v_x}{u_y}\right)}$$

化簡上式可得：$(u_xu_y+v_xv_y)\tan\alpha-u_xv_y+v_xu_y+u_x^2+v_x^2=0$

因 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 為任意數，所以 $\begin{cases} u_xu_y+v_xv_y=0 \\ u_xv_y-v_xu_y=u_x^2+v_x^2 \end{cases}$

即 $\begin{cases} u_x(v_x+u_y)-v_x(u_x-v_y)=0 \\ v_x(v_x+u_y)+u_x(u_x-v_y)=0 \end{cases}$ ……………………… (4,1)式

上式為 v_x+u_y 及 u_x-v_y 的齊次線性微分方程式

而 $f(z)$ 為 P 函數 $\Rightarrow u_x^2-v_x^2\neq 0 \Rightarrow \triangle = \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = u_x^2+v_x^2\neq 0$

故前式（4，1）式僅有一解，即 $\begin{cases} v_x+u_y=0 \\ u_x-v_y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}$

由Cauchy - Riemann 條件式知 P 函數 $f(z)$ 為可解析

且因 $u_x^2+v_x^2\neq 0$，而 $f'(z)=u_x+iv_x$；故 $f'(z)\neq 0$ (Q,E,D)

由定理４－２，可知由解析（單值）函數 $w=f(z)$ 所定義的變換，除 $f'(z)=0$ 之點外，恒具保角之特性；稱 $f(z)$ 為保角變換。$f'(z_o)=0$ 之點 z_o 稱 $f(z)$ 之臨界點。

保角變換在工程數學上之所以重要原因之一，蓋為在某一複平面範圍內，Laplace 方程式 $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$ 之解答，經保角變換後，在另一複平面影像範圍內，仍能適合 Laplace 方程式。此即下面之定理

〔定理４－３〕：諧和函數 $\phi(x,y)$，經保角變換後，仍能保持為諧和函數，

即 $\phi(x,y)$ 為 $\nabla^2\phi=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$ 在 z 平面之解函數。

經保角變換 $w=f(z)$ 後，在 w 平面仍能適合：$\nabla^2\phi=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial v^2}=0$

〔證明〕：解析函數 $w=f(z)=u+iv$ 所定義之一一對應之保角變換。

則 z 平面內之諧和函數 $\phi(x,y)$ 成為 w 平面內之函數 $\phi(u,v)$

故有 $\begin{cases}\phi_x=\phi_u\cdot u_x+\phi_v\cdot v_x\\ \phi_y=\phi_u\cdot u_y+\phi_v\circ v_y\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}\phi_{xx}=\phi_u\cdot u_{xx}+u_x[\phi_{uu}\cdot u_x+\phi_{uv}v_x]+\phi_v\cdot v_{xx}+v_x[\phi_{vv}\\ \qquad\cdot v_x+\phi_{uv}\cdot u_x]\\ \phi_{yy}=\phi_u\cdot u_{yy}+u_y[\phi_{uu}\cdot u_y+\phi_{uv}\cdot v_y]+\phi_v\cdot v_{yy}+v_y[\phi_{vv}\\ \qquad\cdot v_y+\phi_{uv}\cdot u_y]\end{cases}$

合併得：$\phi_{xx}+\phi_{yy}=\phi_u[u_{xx}+u_{yy}]+\phi_{uu}[(u_x)^2+(u_y)^2]$
$\qquad+2\phi_{uv}[u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y]+\phi_v(v_{xx}+v_{yy})$
$\qquad+\phi_{vv}[(v_x)^2+(v_y)^2]$

解析函數的實部及虛部 u，v 爲諧和函數，故上式右邊之第一，第四項爲0又由Cauchy-Riemann方程式知右邊第三項爲0，得

$:\phi_{xx}+\phi_{yy}=\phi_{uu}[(u_x)^2+(v_x)^2]+\phi_{vv}[(u_x)^2+(v_x)^2]$
$=(\phi_{uu}+\phi_{vv})\cdot[(u_x)^2+(v_x)^2]$
$=(\phi_{uu}+\phi_{vv})\cdot|f'(z)|^2=0$ ；由保角變換條件
$|f'(z)|\neq 0$，

證得：$\dfrac{\partial^2\phi}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial v^2}=0$

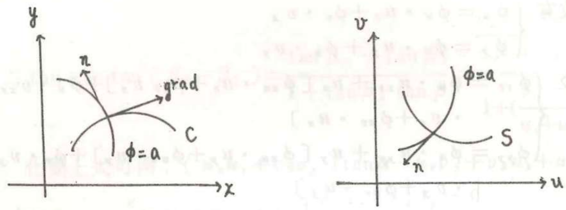
〔定理4—4〕：諧和函數 $\phi(x,y)$ 經保角變換後，其兩種邊界條件 $\phi=a$，$\dfrac{d\phi}{dn}=0$，恒維持原值不變。

〔證明〕：1° 若諧和函數 $\phi(x,y)$ 在其 z 平面之邊界 c 上，且已知邊界條件 $\phi(x,y)=a$（常數）或分段爲常數者。則由保角變換 $w=f(z)$ 仍映成 $\phi[x[(u,v),y(u,v)]=\phi(u,v)=a$

2° 設在邊界 c 上諧和函數 $\phi(x,y)$ 之法向導數 $\dfrac{d\phi}{dn}=0$，

則 $\phi(x,y)=a$ 之線必到處與邊界 c 成正交。經保角變換後，所得之邊界 s 與新諧和函數曲線 $\phi(x(u,v),y(u,v))=a$ 仍爲正交。故知新邊界線 s 上，諧和函數 $\phi[x(u,v),y(u,v)]$ 之法向導數 $\dfrac{d\phi}{dn}=0$

故知上述特殊邊界條件：$\phi=a$ 或 $\dfrac{d\phi}{dn}=0$ 並未因保角變換而產生變動。



§5 Möbius 保角變換

Möbius 變換最重要的性質，即爲保圓性與保角性；保圓性的變換，已在第一節定理 1 — 2 討論過。關於保角性變換，由第四節的保角性質，吾人易於得知 Möbius 變換具保角性。先看下面定理：

〔定理 5 — 1 〕：Möbius 變換 $w=f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ （ $\triangle=ad-bc\neq 0$ ）爲在廣義複平面 E 一對一，映成 E 的映像函數。

〔證明〕：對於平面 E 之 ∞ 點，可作如下對應。

(i) $z=\infty$ 映到 $w=\dfrac{a}{c}$

(ii) $c\neq 0$，則 $z=-\dfrac{d}{c}$ 映到 $w=\infty$

(iii) $c=0$，則 $z=\infty$ 映到 $w=\infty$

1° 令 $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}=w \Rightarrow z=\dfrac{-dw+b}{cw-a}$

此即 $\forall z\in E$，則存在 $w=f(z)\in E$

且 $\forall w\in E$，則存在 $z\in E$，使得 $w=f(z)$，即 $E\in f(z)$

故 $f(E)=E$ 。 $\therefore$ f 爲映成函數

2° 若 $f(z_1)=f(z_2)$ 即 $\dfrac{az_1+b}{cz_1+d}=\dfrac{az_2+b}{cz_2+d}\Rightarrow (az_1+b)$

$(cz_2+d)=(az_2+b)(cz_1+d)$

$\Rightarrow (ad-bc)(z_1-z_2)=0$ （因 $ad-bc\neq 0$ ）

故 $z_1=z_2$ $\therefore f$ 爲一對一函數

另外 $w=f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$，則 $f'(z)=\dfrac{dw}{dz}=\dfrac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2}$

$$=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

由〔定義 4 ，1 〕知 $w=f(z)$ 爲解析函數

若爲保角變換，由〔定理 4 ，2 〕知 須 $f'(z)\neq 0$，即 $\triangle=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$= ad - bc \neq 0$

〔定理 5－2〕：Möbius 變換 $w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 其中 $\triangle = ad - bc \neq 0$ 爲一保角變換。

關於Möbius 變換在兩複平面間的映像情形，可分下面幾點來討論：

(1) 將 z 平面之上半平面 $I_m(z) > 0$，映成 W 平面之開圓板 $|w| < 1$ 之Möbius 變換式，

設變換式爲 $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad - bc \neq 0)$

因 z 平面實數軸的邊界 $I_m(z) = 0$，應映成 w 平面單位圓的邊界 $|w| = 1$

即 $I_m(z) = 0$ 時，$|w| = \left|\dfrac{az+b}{cz+d}\right|$

$$= \left|\frac{a}{c}\right| \frac{\left|z + \frac{b}{a}\right|}{\left|z + \frac{d}{c}\right|} = 1$$

令 $z \to \infty$，$|w| = \left|\dfrac{a}{c}\right| = 1$，即 $\dfrac{a}{c} = e^{i\theta}$

且 $\left|z - \left(-\dfrac{b}{a}\right)\right| = \left|z - \left(-\dfrac{d}{c}\right)\right|$；故知複數 $\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ 及 $\left(-\dfrac{d}{c}\right)$ 若非相等，則必互爲共軛複數。

但若相等，即 $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{d}{c}$，則 $ad - bc = 0$，此時Möbius 變換不成立。

故 $\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ 及 $\left(-\dfrac{d}{c}\right)$ 必互爲共軛複數，可寫成 λ 及 $\overline{\lambda}$

故得 $w = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c}\left(\dfrac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}\right) = e^{i\theta}\left(\dfrac{z-\lambda}{z-\overline{\lambda}}\right)$

上式已符合對應區域邊界映成之條件。

若取 z 上半平面內之一點 λ，則映成 $w = 0$ 之點，在單位圓之內部。故 λ 若祗限於 z 之上半平面，則映成之點，在 W 單位圓內部

故 $w = e^{i\theta}\left(\dfrac{z-\lambda}{z-\overline{\lambda}}\right)$ 爲所需Möbius 變換式。

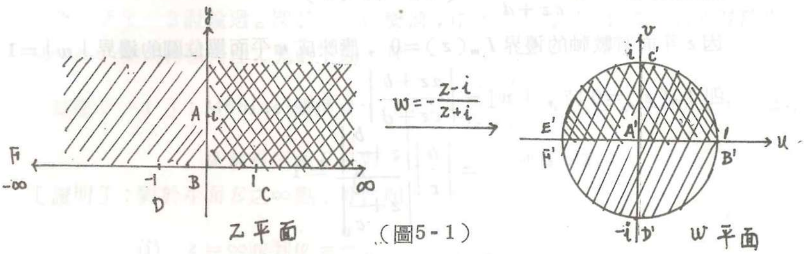
若設 $e^{i\theta} = -1$，$\lambda = i$

則 $w = -\dfrac{z-i}{z+i}$，因 $I_m(w) = \dfrac{w-\overline{w}}{2i} = -\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z-i}{z+i} - \dfrac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i}\right) = \dfrac{z+\overline{z}}{(z+i)(\overline{z}-i)}$

$$=\frac{2Re(z)}{|z+i|^2}$$

故上式變換，將 z 之上半平面之第一象限（$Re(z)>0$）映成 w 平面內單位圓之上半部（$I_m(w)>0$），且 z 平面第二象限，則映成 W 平面內單位圓之下半部　（如圖5－1）

此一變換，可設想係先將 x 軸彎成圓周形狀，同時縮小其半徑為1（正負無限大之兩端啣接起來），然後整個沿反時針方向轉動 $90°$，再向右平移，使圓心與原點重合，即得出 w 平面之影像。



（圖5-1）

(2) 將 z 平面之開圓板 $|z|<\rho$，映成 w 平面之開圓板 $|w|<\rho$ 之Möbius 變換式。

設變換式為 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$　（$ad-bc\neq 0$）

首先 z 平面圓周界 $|z|=\rho$，應映成 w 平面，圓周界 $|w|=\rho$（Möbius 變換是保圓，保角性）

$$w=\frac{a}{c}\left(\frac{z-z_0}{z-z_1}\right)\quad 其中\ z_0=-\frac{b}{a}\neq 0,\ z_1=-\frac{d}{c}\cdots\cdots\cdots\cdots(5,1)式$$

因 $w=0$ 與 $w=\infty$ 分別對稱於圓 $|w|=\rho$

由〔定理3，2〕知 $w=0$ 之對應點 $z=z_0$ 與 $w=\infty$ 之對應點 $z=z_1$，分別對稱於 z 平面之圓 $|z|=\rho$。故由〔定理3，1〕知 z_0，z_1 為 $|z|=\rho$ 之反點

由〔定義3，1〕　$|z_1|\cdot|z_0|=\rho^2$；即 $z_1\cdot\overline{z_0}=\rho^2$

將 $z_1=\dfrac{\rho^2}{\overline{z_0}}$ 代入（5，1）式得 $w=\lambda\dfrac{z-z_0}{\overline{z_0}z-\rho^2}$　（$\lambda=\dfrac{a\overline{z_0}}{c}$）$\cdots\cdots$（5，2）式

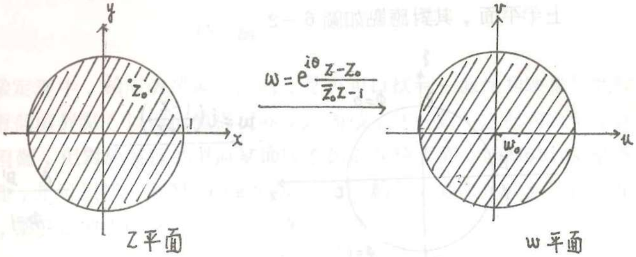
令 $|z|=\rho$ 圓上任一點 $z=\rho e^{i\alpha}$，必映到 $|w|=\rho$

則（5，2）式⇨　$\rho=|w|=\left|\lambda\dfrac{\rho e^{i\alpha}-z_0}{\rho e^{i\alpha}\overline{z_0}-\rho^2}\right|=\left|\dfrac{\lambda e^{-i\alpha}}{-\rho}\right|\left|\dfrac{\rho e^{i\alpha}-z_0}{\rho e^{-i\alpha}-\overline{z_0}}\right|=\dfrac{|\lambda|}{\rho}$

$\therefore$　$|\lambda|=\rho^2$，故可寫成 $\lambda=\rho^2e^{i\theta}$

又 z_0 之對應點 $w=0$ 爲 $|w|=\rho$ 之內點，故必 $|z_0|<\rho$

故（5，2）式可寫成 $w=\rho^2 e^{i\theta}\left(\dfrac{z-z_0}{\bar{z}_0 z-\rho^2}\right)$ 爲 $|z|<\rho$ 映成 $|w|<\rho$ 所需之Möbius 變換式（如圖5－2）



§6　應用

利用Möbius 變換，若將圓區域，變換到半平面，將可簡化解出帶有邊界值的諧和函數。先看Poisson 氏圓積分公式

設 $f(z)$ 爲中心在原點，半徑爲 R 之圓，所定義區域內之解析函數區域內任一點 $z=\gamma e^{i\theta}$；周界上任一點 $\zeta=R\cdot e^{i\phi}$（圖6－1）

則有 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\zeta)\dfrac{\zeta\bar{\zeta}-z\bar{z}}{(\zeta-z)(\bar{\zeta}-\bar{z})}\,d\phi,$

若改極坐標；$f(z)=u(\gamma,\theta)+iv(\gamma,\theta)$，取

實部可得諧和函數 $u(\gamma,\theta)$ 之Poisson 圓積分公

式 $u(\gamma,\theta)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(R,\phi)\dfrac{R^2-\gamma^2}{R^2-2R\gamma\cos(\phi-\theta)+\gamma^2}\,d\phi$

唯此積分過於繁雜，難以積分，若利用Möbius 變換，將圓區域變換到半面（如§5之(1)變換情形，將 z 平面與 w 平面對調即得）。

則可利用Poisson 氏半平面積分公式：

設在 z 平面內，$y\geqq 0$ 之半平面，有解析函數 $f(z)$

並令 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$；$z=x+iy$；則有諧和函數 $u(x,y)$ 之Poisson 半平面積分公式：

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{\infty}^{\infty}\frac{yu(x,0)}{(\zeta-x)^2+y^2}\,d\zeta \cdots\cdots\cdots\cdots (6,1)\text{式}$$

則此積分已簡化，較易求解

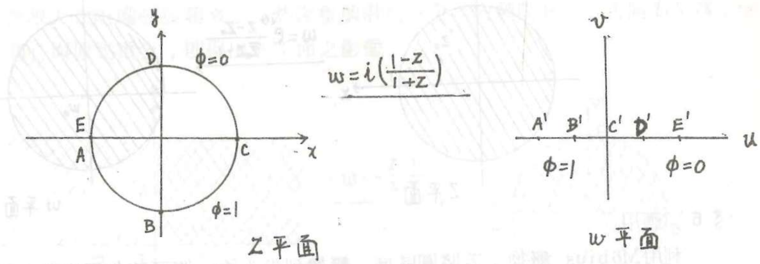
下面將舉一問題，來說明以上論述。

設單位圓內有一諧和函數 $\phi(\gamma,\theta)$，若已知邊界條件爲 $\phi(1,\theta)$

$$= \begin{cases} 0\ ,\ 0<\theta<\pi \\ 1\ ,\ \pi<\theta<2\pi \end{cases}$$

則 $\phi(r,\theta)$ 按下面方法可以求解

首先用Möbius 保角變換 $z=\dfrac{i-w}{i+w}$ 或 $w=i\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)$ 將 z 平面之單位圓映成 w 上半平面，其對應點如圖 6－2



邊界條件 $\phi=c$ ，並未因保角變換而改變，故本問題變換成求 w 半平面內之諧和函數 $\phi(u,v)$，已知邊界條件爲：$\phi(u,0)=\begin{cases}1\ ,\ u<0\\ 0\ ,\ u>0\end{cases}$

則由（6，1）式 Poisson 半平面積分公式：

可求得：$\phi(u,v)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{v\phi(\zeta,0)}{(\zeta-u)^2+v^2}d\zeta=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\dfrac{v\cdot(1)}{(\zeta-u)^2+v^2}d\zeta+$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{v\cdot(0)}{(\zeta-u)^2+v^2}d\zeta$$

$$=\frac{v}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{(\zeta-u)^2+v^2}d\zeta=\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\zeta-u}{v}\right)\Bigg|_{-\infty}^{0}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right)$$

$$=1-\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(-\frac{v}{u}\right)\text{（因}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\pi}{2}\text{）}$$

$$=1-\frac{1}{\pi}\left[\pi-\tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)\ \cdots\cdots\ (6,2)\text{式}$$

因 $w=i\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)$，可得 $\begin{cases} u=\dfrac{2y}{(1+x)^2+y^2} \\ v=\dfrac{1-(x^2+y^2)}{(1+x)^2+y^2} \end{cases}$ 代入（6，2）式

而有 $\phi(x, y)=\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left[\frac{1-(x^2+y^2)}{2y}\right]$

即 $\phi(\gamma, \theta)=\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left[\frac{1-\gamma^2}{2\gamma\sin\theta}\right]$ 之結果。

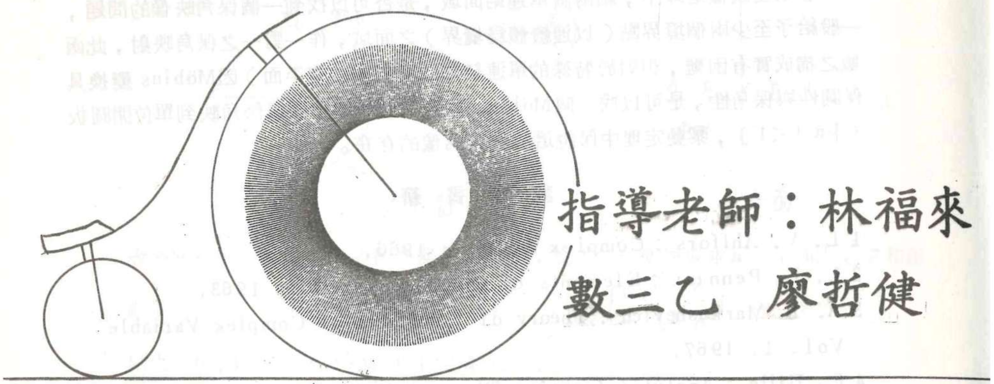
結 論

在黎曼映像定理中，給兩個單連結面域，是否可以找到一個保角映像的問題，一般給予至少兩個境界點（以連續體爲境界）之面域，作一對一之保角映射，此函數之構成實有困難，但對於特殊的單連結面域（如廣義複平面）因Möbius 變換具保圓性與保角性，是可以找一個Möbius 變換，將所給予面域保角映到單位開圓板（$|w|<1$），黎曼定理中保證這種保角寫像的存在。

參 考 書 籍

1. L. V. Ahlfors：Complex Analysis 1966.
2. L. L. Pennisi：Elements of Complex Variables 1963.
3. A. I. Markushevich：Theory of functions of Complex Variable Vol。1. 1967.
4. E. Hille：Analytic function Theory 2 Vols. 1962.
5. E. Kreyszig：Advanced Engineering Mathematics 。
6. H. Schwerdtfeger：Geometry of Complex Numbers 1967.
7. C. R. Wylie：Advanced Engineering Mathematics 1966.
8. 賴漢卿：複變數函數論 1975
9. M. Kline 著，林炎全譯：數學史 1980

Stereographic射影的同胚性與保角性



指導老師：林福來

數三乙　廖哲健

一條直線往兩邊無限延伸，分別以$+\infty$，$-\infty$表示，如果我們假想將$+\infty$與$-\infty$接在一起，我們就好像看到它走到正無窮遠處又從負無窮遠處出來，於是我們假想用圓來“代表”直線，如圖㈠。

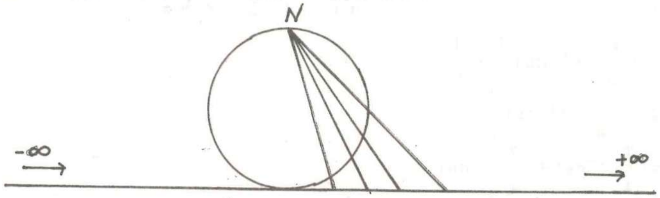


圖 ㈠

我們很自然地將這種想法推廣到平面上來，模仿上述的情形，我們以一個半徑爲1的球來代表整個複數平面，這就是有名的黎曼球面射影（Stereographic projection）。

首先，我們先看這平面與球面之間的關係；

設Σ是半徑爲1的球，而後將整個複數平面C平移，使其原點恰好通過球心O，如圖㈡。

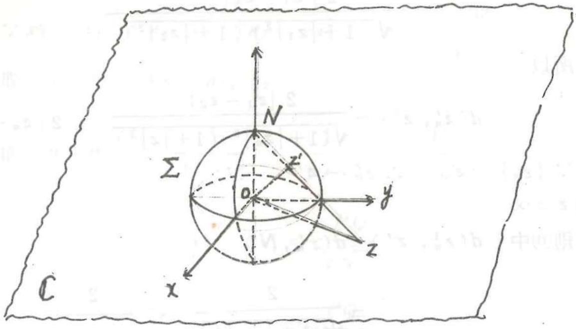


圖 (二)

如此，我們即可定出此球的最高點N，以N爲投射點即可得到球面上各點 z'（除了N之外）與平面上各點 z 的一一對應關係。

利用向量關係，我們可求出兩者之間的坐標對應如下：

平面上點 z 的坐標爲 $x+iy$, 則 z' 之坐標 (x_1, x_2, x_3) 爲

$$\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$$

或

$$x_1=\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2} \quad x_2=\frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)} \quad x_3=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

球面上點 z' 的坐標爲 (x_1, x_2, x_3)

則 $$z=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

有了這樣的關係，我們就來研究我們主題的第一部分：Stereographic 射影是一同胚映射。

很明顯的，$\sum$與$C\cup\{\infty\}$之間有著 1 − 1 及蓋射的關係。其次我們要求f：$C\cup\{\infty\}\to\sum$是連續，其反向f^{-1}也是連續。我們利用點列的收斂著手。

(1) 若平面上的點列 $\{z_n\}$ 收斂至 z，則投影在球面上的點列 $\{z'_n\}$ 也收斂至 z 的投影點 z'，則 f 爲連續。

解：(a) $z\neq\infty$

藉著(1)式可得到

平面上兩點 z_1, z_2，其投影點 z'_1, z'_2 的距離爲

$$\frac{2\,|\,z_1-z_2\,|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}$$

所以

$$d(z_n',\,z')=\frac{2\,|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_n|^2)(1+|z|^2)}}\ \le 2\,|\,z_n-z\,|$$

$\because \{z_n\}\to z \qquad \therefore z_n'\to z'$

(b) $z=\infty$

則(a)中 $d(z_n^1,\,z')=d(z_n',N)$

$$=\frac{2}{\sqrt{(1+|z_n|^2)}}<\frac{2}{|z_n|}$$

$\because \{z_n\}\to\infty \;\Rightarrow\; \dfrac{2}{|z_n|}\to 0$

$\Rightarrow\; d(z_n',\,z')\to 0$

由(a)(b)我們知 $\{z_n'\}$ 必收斂至 z'。

所以 f 爲連續。

(2) 當 $\{z_n'\}\to z'$ 時，其投影點列 $\{z_n\}$ 亦收斂至 z' 的投影點 z，則 f^{-1} 爲連續。

解：設 $z_n'=(x_1^n,\,x_2^n,\,x_3^n) \qquad z'=(x_1,\,x_2,\,x_3)$

$z_n=(x_n,\,y_n,\,0) \qquad z=(x,\,y,\,0)$

則 $x_1^n\le 1 \quad x_2^n\le 1 \quad 1-x_3^n\le 2$

$\because \{z_n'\}\to z'$

$\therefore x_1^n\to x_1 \quad x_2^n\to x_2 \quad x_3^n\to x_3$

$$d(z_n,\,z)=\sqrt{(x_n-x)^2+(y_n-y)^2}$$

$$\underline{\underline{由(2)}}\ \sqrt{\left(\frac{x_1^n}{1-x_3^n}-\frac{x_1}{1-x_3}\right)^2+\left(\frac{x_2^n}{1-x_3^n}-\frac{x_2}{1-x_3}\right)^2}$$

(a) $z'\neq N$

$\exists\, P>0,\ Q>0,\ n_0>0$

$\ni n\ge n_0 \Rightarrow \quad 1-x_3^n\ge P \quad 1-x_3\ge Q$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{1-x_3^n}\ \ \frac{1}{1-x_3}\ \leqslant \frac{1}{PQ}$$

$$\because x_3^n\to x_3 \quad \exists\, n_1\ni n\ge n_1 \quad |x_3^n-x_3|\le\frac{PQ}{2\sqrt{2}}\,\varepsilon$$

$\because x_1^n \to x_1 \ \exists\ n_2 \ni n \geq n_2 \quad |x_1^n - x_1| \leq \dfrac{PQ}{4\sqrt{2}}\ \varepsilon$

取 $m = \max\ \{n_0,\ n_1,\ n_2\}$

則 $n \geq m \Rightarrow \dfrac{1}{1-x_3^n} \cdot \dfrac{1}{1-x_3} \leq \dfrac{1}{PQ}$

$$|x_3^n - x_3| < \frac{PQ}{2\sqrt{2}}\ \varepsilon$$

$$|x_1^n - x_1| < \frac{PQ}{4\sqrt{2}}\ \varepsilon$$

$$\therefore \quad \frac{x_1^n}{1-x_3^n} - \frac{x_1}{1-x_3} = \frac{x_1^n(x_3^n - x_3) + (1-x_3^n)(x_1^n - x_1)}{(1-x_3^n)\ (1-x_3)}$$

$$\leq \frac{|x_3^n - x_3| + 2|x_1^n - x_1|}{PQ}$$

$$< \frac{\dfrac{PQ}{2\sqrt{2}}\varepsilon + \dfrac{2PQ}{4\sqrt{2}}\varepsilon}{PQ} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

同理 $\dfrac{x_2^n}{1-x_3^n} - \dfrac{x_2}{1-x_3} < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$

$$\therefore \quad d(z_n,\ z) < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \varepsilon$$

$ie \quad z_n \to z$

(b) $z' = N$ 則 $z = \infty$

我們就以下圖㈢來討論

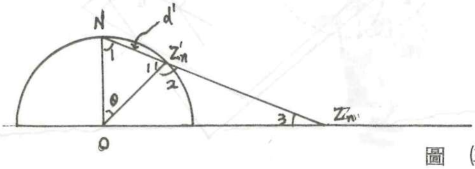


圖 ㈢

在$\Delta O z_n' z_n$中 ， $\angle 3 = \frac{\theta}{2}$ $\angle 2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$

由正弦定理知

$$|z_n| = \frac{1 \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2})}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

當$\{z_n'\} \to N$時

$d' \to \overset{\frown}{Nz_n'} = 1 \cdot \theta = \theta$

$\because \quad d' \to 0$

$\therefore \quad \theta \to 0 \Rightarrow |z_n| \to \frac{1}{0} = \infty$

$ie \ \{z_n\} \to z$

由(a)(b)我們知$\{z_n\}$收斂至z。

所以f^{-1}也為連續。

藉著上面的討論，我們得知Stereographic 射影為一個同胚映射。

第二部分我們討論其保角性：

設過點N的切平面為T

r_1為平面C上的一條直線，則r_1與點N所形成的平面交$\sum$球於一圓C_1，交T於直線ℓ_1。

r_2為平面C上的另一直線，則r_2與點N所形成的平面交$\sum$球於另一圓C_2，交T於另一直線ℓ_2。

而C_1與C_2相交於兩點N及A，如圖(四)。

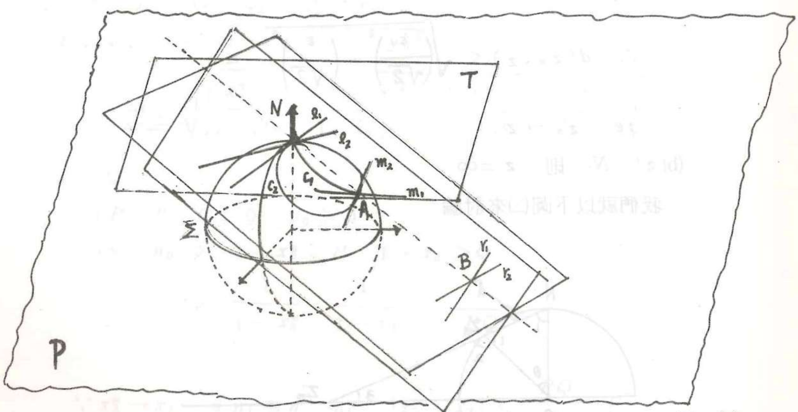


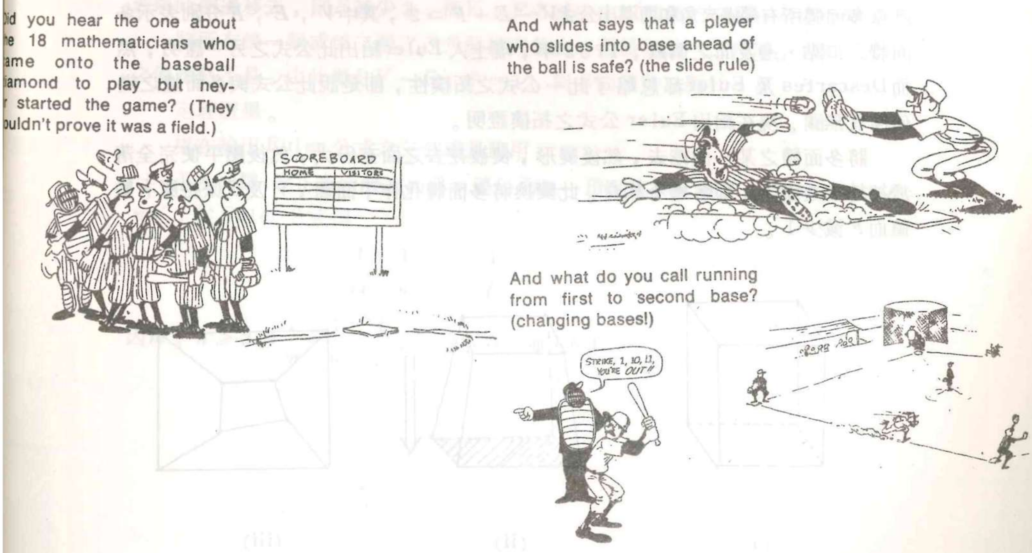
圖 (四)

如此我們可知ℓ_1與ℓ_2是C_1與C_2在點N的切線，而m_1與m_2則是兩圓在點A的切線，利用幾何證明，我們很容易證得m_1與m_2的交角等於ℓ_1與ℓ_2的交角，又平面T與平面P平行，ℓ_1與r_1共平面，ℓ_2與r_2共平面，所以ℓ_1與ℓ_2的交角會等於r_1與r_2的交角。因此我得證平面上曲線的交角會等於其在球面上射影的曲線之夾角，所以Stereographic射影亦為一保角映射。

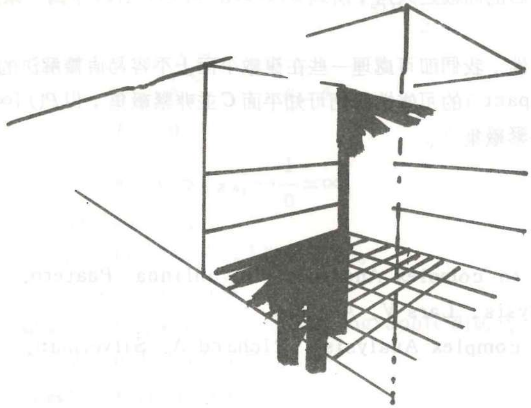
有了同胚性及保角性，我們即可處理一些在複數平面上不容易直接解決的問題。比如：利用緊緻（Compact）的可傳性我們可知平面C並非緊緻集，但$P \cup \{\infty\}$却是個緊緻集（∵$\sum$為一緊緻集）。

參考資料：

1. Introduction to complex Analysis: Nevanlinna Paatero.
2. Complex Analysis: Lars V. Ahlfors.
3. Zutroductory complex Aualysis: Richard A. Silverman.



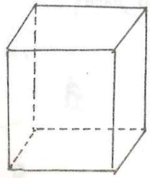
Euler公式及應用



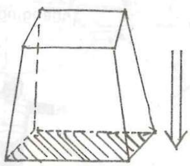
編輯小組

多面體可看作由頂點、邊及面三種元素組合而成。十七世紀初期，Descartes計算多面體所有鄰邊夾角和而導出公式$V-E+F=2$，其中V，E，F分別表示多面體之頂點、邊及面之個數，1752年，瑞士人Euler給出此公式之另一證明，然而Descartes及Euler都忽略了此一公式之拓撲性，即是說此公式與多面體之幾何性質無關。現在給出Euler公式之拓撲證明。

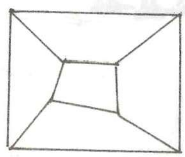
將多面體之某一面挖去，然後變形，使被挖去之面充份大，然後壓平使完全落於被挖去之面上，而各邊不相交。此變換將多面體化作平面圖，V及E保持原有數值而F減少1。



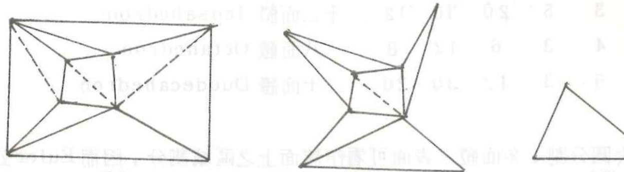
(i)



(ii)



(iii)



(iv)　　(v)　　(vi)

平面圖上之區域爲多邊形，適當加上對角綫，將多邊形劃成三角形區域。每一對角綫將多邊形分成兩份，卽V保持不變，E及F各增加1，因而$V-E+F$之數值亦不變，新平面圖之三角形可分作三類：

㈠祇與一三角形相鄰。

㈡祇與兩三角形相鄰。

㈢與三個三角形相鄰。

第二類三角形有一邊在平面圖之邊界上，若將此邊移去，則V保持不變而E，F各減少1，因而$V-E+F$之數值不變。第一類三角形有兩邊在平面圖之邊界上，若將此兩邊移去，則E減少2，而V，F各減少1，結果$V-E+F$亦不變。

將所有第一類或第二類之三角形按次移去。最後僅餘一三角形，而$V-E+F$之值始終不易，由此得知$V-E+F=1$，對多面體言，對$V-E+F=2$。

定理證畢。

現在給出Euler公式之三個簡易應用：

㈠ 正多面體，設正多面體之面爲m邊形而每一頂點落於n邊之上，則$mF=2E=nV$，從Euler公式得

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{E}$$

因m，$n\geqslant 3$及$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}$，故得下列五種可能性

m	n	V	E	F	多面體名稱
3	3	4	6	4	四面體 Tetrahedron
3	4	8	12	6	立方體 Cube
3	5	20	30	12	十二面體 Icosahedron
4	3	6	12	8	八面體 Octahedron
5	3	12	30	20	二十面體 Duodecahedron

(二) 球面之大圓分割，多面體之表面可看作球面上之區域劃分，因而Euler公式可應用到球面上區域劃分之問題，任意兩大圓交於兩點，設球面被n個大圓劃分成若干區域，而任意三大圓均不相交於一點，今計算劃分區域之個數，按Euler公式，祇需求得V及E，容易得知$V=2\binom{n}{2}=n(n-1)$，$E=2n(n-1)$，從而$F=n^2-n+2$。

(三) 格點多邊形面積，Pick公式，平面上之格點坐標皆爲整數。若多邊形之頂點皆爲格點，稱之爲格點多邊形，以I及B分別表示格點多邊形內部及邊界之格點個數，則多邊形之面積爲$A=I+\frac{1}{2}B-1$，此爲Pick公式（1899年）公式之證明，將多邊形劃分成格點三角形，并使各三角形之內部及邊界均不含格點（頂點除外）。稱此等三角形爲基本三角形，取多邊形之兩個相同基本三角劃分，使之重疊，并將之拉作（對稱）多面體，（此乃拓撲變換，多邊形之面積因此改變，然而基本三角形之個數不變）設多邊形共劃分爲T個基本三角形，則多面體$F=2T$，因各面均爲三角形，故得$2E=3F$，卽$E=3T$，從Euler公式，

$$T=2I+B-2$$

現在證明任意基本三角形之面積A_0爲$\frac{1}{2}$，從而多邊形面積爲$\frac{1}{2}T=I+\frac{1}{2}B-1$。

首先證明$A_0\geqslant\frac{1}{2}$，設基本三角形之頂點爲(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)，其面積爲$A_0=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3)$，因$x_1$，$x_2$，$x_3$，$y_1$，$y_2$，$y_3$爲整數，$A_0\geqslant\frac{1}{2}$。

其次證明$A_0\leqq\frac{1}{2}$，取最小矩形包含基本三角形。

設矩形之長、闊分別爲 p,q。矩形計有 $(p-1)(q-1)$ 內點及 $2p+2q$ 邊界點，若將矩形劃成基本三角形，則三角形之個數爲 $2(p-1)(q-1)+2p+2q-2=2pq$，矩形面積爲 pq，而基本三角形面積不少於 $\frac{1}{2}$，由此 $A_0=\frac{1}{2}$。

A Ratio Test For $\lim\limits_{n\to\infty} an=0$.

Proposition: If $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{an+1}{an}\right|<1$, then $\lim\limits_{n\to\infty} an=0$.

Proof: Since $\lim\left|\frac{an+1}{an}\right|<1$ $\quad\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ an is obsolutely convergent.

Hence, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ an is convergent. It follows that $\lim\limits_{n\to\infty} an=0$.

For example. Find $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{100}}{2^n}$ and $\lim\limits_{n\to\infty} n^{30}\ q^n$ ($|q|<1$).

(1) Let $an=\frac{2^n}{n!}$. Then $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{an+1}{an}\right|=\lim\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\ \frac{n!}{2}=\lim\frac{2}{n+1}=0<1$.

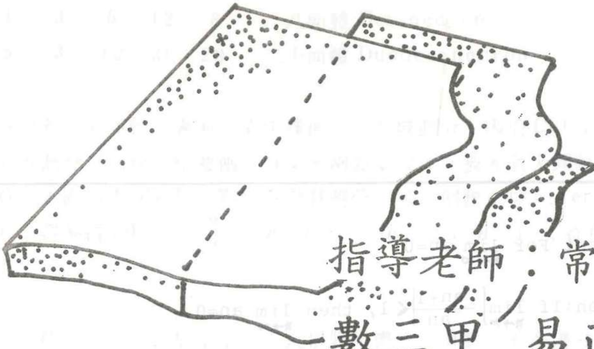
(2) Let $an=\frac{n!}{n}$. Then $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{an+1}{an}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\ \frac{n^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<1$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}}\ \frac{2^n}{n^{100}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\ (1+\frac{1}{n})^{100}=\frac{1}{2}<1$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{30}}{n^{30}}\ \frac{q^{n+1}}{q^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{30}\ |q|=|q|<1$.

Therefore, all the desired limits equal to zero.

Galois群與多項式根的關係之範例



指導老師：常法徽
數三甲　易正明

人類有了自然數仍覺不夠，為了滿足實際上的運用，整數系，有理數系，實數系乃至最大的複數系相繼產生，其中由實數系擴展至複數系的過程中，就是Galois理論的主要內容，而藉以多項式一根之代數式明確的表現出來。

在未引入主題之前，我們須先證如下之定理：

若F為一個體，E為F的有限擴展體，$P(x)$為佈於$F(x)$的既約多項式且$P(a)=0$，則$E=\dfrac{F[x]}{(P(x))}$，$[E:F(x)]=\deg P(x)$。

證明：

令$(P(x))=\{h(x)P(x) \mid h(x)\in F(x)\}$必是$F(x)$的理想（ideal）由$P(x)$生成，且$P(x)$是$F(x)$的最大理想（maximal ideal）。

故$E=\dfrac{F[x]}{(P(x))}$是一個體。

任意$f(x)\in F[x]$，由除法定則（Division Process）

存在$q(x)$, $r(x)\in F[x]$，使得$f(x)=q(x)P(x)+r(x)$, $r(x)=0$或$\deg r(x)<\deg P(x)$。

$$
\begin{aligned}
f(x)+I &=(q(x)P(x)+r(x))+I \qquad [I=P(x)]\\
&=r(x)+I
\end{aligned}
$$

故 $f(x)+I=r_0+r_1x+r_2x^2+\cdots\cdots+r_{n-1}x^{n-1}+I$

$=(r_0+I)+(r_1)(x+I)+\cdots\cdots+r_{n-1}(x^{n-1}+I)$, $r_i\in F$,

$0\leqslant i\leqslant n-1$

換言之，$P(x)/I=[e+I, x+I, \cdots\cdots, x^{n-1}+I]$

令 $r_0(e+I)+r_1(x+I)+\cdots\cdots+r_{n-1}(x^{n-1}+I)=0$

〔$F[x]/I$ 的單位元素爲 I〕

$\Rightarrow r_0(e+I)+r_1(x+I)+\cdots\cdots+r_{n-1}(x^{n-1}+I)\in I$

但是 $\deg r(x)\leq\deg P(x)$

$\Rightarrow r_0=r_1=\cdots\cdots=r_{n-1}=0$

$\therefore [e+I, x+I, \cdots\cdots, x^{n-1}+I]$ 是獨立的。

$\dim_F F(x)/I=\deg P(x)=n$

$[E:F[x]]=\deg P(x)$

令 $J=x+I$，其中 $I=(P(x))$

$P(J)=0$，$J\in E$

定義 $\phi: F[x]\to F[x]/I$

由 $f(x)\phi=f(x)+I$

$f(x)\phi=(\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots\cdots+\alpha_kx^k)\phi$

$=\alpha_0+\alpha_1x+\cdots\cdots\cdots\cdots+\alpha_kx^k+I$

$=(\alpha_0+I)+(\alpha_1+I)(x+I)+\cdots\cdots+(\alpha_k+I)(x+I)^k$

故 ϕ 是一個同構映射。

令 $\overline{F}=\{\alpha+I \mid \alpha\in F\}$

則 $\overline{F}\simeq F$ $\begin{cases}(x)\phi=x+I=J & \cdots\cdots(1)\\ f(x)\phi=\alpha_0+\alpha_1J+\cdots\cdots+\alpha_kJ^k=f(J) & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

由(1) $P(x)\phi=P(x)+I=I$ ……(3) $(\because I=(P(x)))$

(2) $P(x)\phi=P(J)$ ……(4)

(3)=(4) $P(J)=I$，I 是 $F[x]/I$ 是單位元素

故 J 是 $P(J)$ 的一個根。

由上定理知，體的擴展須經由多項式並和其根有密切的關係。

若 $\deg f(x)=n$

則 $[E:F]\leq n!$

$f(x)$ 有 n 個相異根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$,

$$\lambda \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots\cdots\cdots & \alpha_n \\ \alpha_1 \lambda & \alpha_2 \lambda & \cdots\cdots\cdots & \alpha_n \lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda \in S_n$ 且 $G(G, F)$ 是 S_n 的一個子群。

下面以兩個實例加以說明：

例1：

$f(x) = x^3 - 2 \in Q(x)$

令 $x^3 - 2 = 0 \Rightarrow (x - \sqrt[3]{2}\, w)(x - \sqrt[3]{2}\, w^2) = 0$ 其中 $w = \dfrac{-1 + \sqrt{3}\, i}{2}$

$E = Q(\sqrt[3]{2}, w)$

$[E : Q] = [Q(\sqrt[3]{2}, w) : Q(w)] \cdot [Q(w) : Q]$

$= 3 \cdot 2$

$= 6 \quad (3!)$

σ，τ 是兩個函數分別為：

$$\sigma : \begin{array}{l} \sqrt[3]{2} \rightarrow \sqrt[3]{2} \\ w \rightarrow w^2 \end{array}$$

$\sigma^2(w) = \sigma(w^2) = (w^2)^2 = w^4 = w$

$\therefore o(\sigma) = 2$

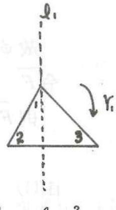
$$\tau : \begin{array}{l} \sqrt[3]{2} \rightarrow \sqrt[3]{2}w \\ w \rightarrow w \end{array}$$

$\tau^3(\sqrt[3]{2}) = \tau^2(\sqrt[3]{2}w) = \tau(\sqrt[3]{2}\, w^2) = \sqrt[3]{2}\, w^3 = \sqrt[3]{2}$

$\therefore o(\tau) = 3$

$G(E, Q) = [\sigma, \tau] = \{e, \sigma, \tau, \tau\sigma, \tau^2, \tau^2\sigma\}$

$o(G(E, Q)) = [E : Q] = 3! = 6$



考慮 $\quad e = (1)$

$r_1 = (1\,3\,2)$

$\ell_1 = (2\,3)$

Composition ←

o	e	r^1	r^2	ℓ_1	$\ell_1 r^1$	$\ell_1 r^2$
e	e	r^1	r^2	ℓ_1	$\ell_1 r^1$	$\ell_1 r^2$
r^1	r^1	r^2	e	$\ell_1 r^2$	ℓ_1	$\ell_1 r^1$
r^2	r^2	e	r^1	$\ell_1 r^1$	$\ell_1 r^2$	ℓ_1
ℓ_1	ℓ_1	$\ell_1 r^1$	$\ell_1 r^2$	e	r^1	r^2
$\ell_1 r^1$	$\ell_1 r^1$	$\ell_1 r^2$	ℓ_1	r^2	e	r^1
$\ell^1 r_2$	$\ell_1 r^2$	ℓ_1	$\ell_1 r^1$	r^1	r^2	e

$\cdot$	e	τ	τ^2	σ	$\sigma\tau$	$\sigma\tau^2$
e	e	τ	τ^2	σ	$\sigma\tau$	$\sigma\tau^2$
τ	τ	τ^2	e	$\sigma\tau^2$	σ	$\sigma\tau$
τ^2	τ^2	e	τ	$\sigma\tau$	$\sigma\tau^2$	σ
σ	σ	$\sigma\tau$	$\sigma\tau^2$	e	τ	τ^2
$\sigma\tau$	$\sigma\tau$	$\sigma\tau^2$	σ	τ^2	e	τ
$\sigma\tau^2$	$\sigma\tau^2$	σ	$\sigma\tau$	τ	τ^2	e

故 $G(E,Q)\simeq S_3$

$f(x)=x^3-2$ 之三根爲 $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}w$, $\sqrt[3]{2}w^2$,

若知其一根 $\sqrt[3]{2}$ 和Galois群 $G(E,K)$

則可求出其對映關係：

$e\longleftrightarrow E$

$\{e,\sigma\tau^2\}\leftrightarrow Q(\sqrt[3]{2}w^2)$

$\{e,\tau\}\leftrightarrow Q(\sqrt[3]{2}w)$

$\{e,r^1,r^2\}=K\leftrightarrow Q(\sqrt[3]{2})$

$\{e,\ell^1\}=H\leftrightarrow Q(w)$

$\{e,\tau,\tau^2,\sigma,\sigma r,\sigma r^2\}=G(E,Q)\leftrightarrow Q(\sqrt[3]{2},w)$

註：$Q(a)$ 爲含體 Q 和 a 的最小體。

例2：

$f(x)=x^3-1\in Q[x]$

令 $x^3-1=0$

$\Rightarrow (x-1)(x-w)(x-w^2)=0$, $\quad w=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\sigma:\{w\rightarrow w^2$

$\sigma^2(w)=\sigma(w^2)=w^4=w$ （$w^3=1$, w 是 $f(x)$ 的根）

$G(E,Q)=\{e,\sigma\}$, $o(G(E,Q))=[Q(w),Q]=o(S_2)$

又若知一根 w 和Galois群 $G(E,Q)$，則可求其另一根。

即：$\sigma(w)=w^2$

$$\begin{array}{ccc}
\{e\} & \longrightarrow & E \\
| & & | \\
\{e,\sigma\}=G(E,Q) & \rightarrow & Q(w)
\end{array}$$

例１，例２知；只要知道多項式中的某一根及Galois 群，即可求出整個多項式的其他所有的根。

例１，例２所不同的是，例２的 Galois群不含有子群，此種不含子群的 Galois 群，就是所謂的代數封閉體（Algebraically closed Field）

例如：實數擴展到複數體就是典型的代數封閉體，即$C=F(i)$。

參考書：吕溪木著；體和GALOIS理論。

I. N. herstein : Topics In ALGEBRA.

BURTON: ABSTRACT AND LINEAR ALGEBRA.

A Good Math Teacher...

by Bob Hamada

A good mathematics teacher, like

Ford,	has better ideas.
Pan-Am,	makes the going great.
Bayer aspirin,	works wonders.
General Electric,	lights your path.
Hallmark cards,	cares enough to give the very best.
Coke,	is the real thing.
Pepsi,	has a lot to give.
Tide,	gets the stain out that others leave behind.
VO-5 hair spray,	holds through all kinds of weather.
Ivory soap,	is 100% pure, mathematically speaking.
Cheerios,	makes you feel groovy.
Frosted Flakes,	makes you feel gr-r-r-reat.
Sears,	has everything.
Master Charge,	is good for emergencies.
State Farm,	is like a good neighbor, always near.

Good mathematics teachers are like

Mattel toys:	You can tell they're swell.
Dial soap:	Aren't you glad you know them? Don't you wish everybody did?
Alka Seltzer	Try them, you'll like them.
All State:	You're in good hands.

A Short Discussion on Z_n^*

數三丙

: T.M.C.

A Short Discussion On Z_n^*.

We assume that the readers are familiar with basic algebra. We only exhibit some definitions and theorems for the conveniance in the sequel.

Def. 1 Let $(R;+,\cdot)$ be a ring with identity. We use the symbol R^* to denote the set of all invertible elements in R.

Th. 1 Let $(R;+,\cdot)$ be a ring with identity. $(R^*;\cdot)$ forms a group, called the invertible group of the ring.

Th. 2 If $G=(a)$ be a cyclic group of order n, then an element $a^k \varepsilon G$ can act as another generator of G iff $(n.k)=1$.

Our discussion will concentrate on the commutative ring $(Z_n;+,\cdot)$. A few examples may be suitable here.

Ex. $Z_2=\{0.1\}$ $\quad Z_2^*=\{1\}=(1)$.
Ex. $Z_3=\{0.1.2\}$ $\quad Z_3^*=\{1.2\}=(2)$
Ex. $Z_4=\{0.1.2.3\}$ $\quad Z_4^*=\{1.3\}=(3)$
Ex. $Z_5=\{0.1.2.3.4\}$ $\quad Z_5^*=\{1.2.3.4\}=(2)=(3)$
Ex. $Z_6=\{0.1.2.3.4.5\}$ $\quad Z_6^*=\{1.5\}=(5)$
Ex. $Z_7=\{0.1.2.3.4.5.6\}$ $\quad Z_7^*=\{1.2.3.4.5.6\}=(3)=(5)$
Ex. $Z_8=\{0.1.2.3.4.5.6.7\}$ $\quad Z_8^*=\{1.3.5.7\}$.

Notice that $(Z_8^*;\cdot)$ is not a cyclic group, since $3^2=5^2=7^2=1$.

Ex. $Z_9=\{0.1.2.3.4.5.6.7.8\}$ $\quad Z_9^*=\{1.2.4.5.7.8\}=(2)=(5)$

Now, our problem comes as follows: for what n, is the group $(Z_n^*;\cdot)$ cyclic?

Def. 2 If the group $(Z_n^*;\cdot)$ is cyclic, any of its generators will be called a primitive root modulus n.

Though we have not answered the problem, a bew abvious facts are available. We list two comments below.

(1) If you are familiar with the ring $(Z_n;+,\cdot)$, you should know that the invertible elements in Z_n are just those relatively prime to n. Hence, the order of the group $(Z_n^*;\cdot)$ is $\phi(n)$.

If a is a primitive root modulo n, then, by definition, $Z_n^*=\{1.a,a^2,\text{----} a^{\phi(n)-1}\}$ and $a^{\phi(n)}=1$. Hence, a is a primitive root modulo n iff $(a.n.)=1$ and $\phi(n)$ is the least positive integer satisfies $a^x\equiv 1(\text{mod } n)$. (this equation means that $a^x=1$ in Z_n^*). However, by the following theorem, the condition $(a,n)=1$ is useless.

Th. 3 There is some integer X such that $a^x \equiv 1 \pmod n$ iff $(a,n)=1$.

Pf: Let $d=(a,n)$. Since $a^x \equiv 1 \pmod n$ for some $x \in Z$, we may let $a^x - 1 = tn$ for some $t \in Z$. Therefore, since $d|a$ and $d|n$, $d|a^x - tn = 1$. It must be that $d=1$.

Conversely, if $(a,n)=1$, then, by Euler's theorem, $a^{\Phi(n)} \equiv 1 \pmod n$. Hence, A is a primitive root modulo n iff $\Phi(n)$ is the least posotive integer satisfies $a^x \equiv 1 \pmod n$.

(2) If a is a primitive root modulo n, then $Zn^* = \{1, a, a^2, \ldots, a^{\Phi(n)-1}\}$, Using Th. 2, we know that a^k is another primitive root modulo n iff $(k, \Phi(n))=1$. Hence, if there is one primitive root modulo n, then there are $\Phi(\Phi(n))$ primitive roots modulo n all.

Ex. We have seen that 3 is a primtive root modulo 7. Hence, there are $\Phi(\Phi(7))=2$ primitive roots modulo 7. The other is 5.

Ex. There are no primitive roots modulo 8.

Now, we are in a position to find the type of n such that there exists some a for which $\Phi(n)$ is the least positive integer satisfies $a^x \equiv 1 \pmod n$.

Consider the group $(Zn^*;\cdot)$ where $n = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_s^{l_s}$ ($p_1 < p_2 < \ldots < p_s$ are distinct primes). For any $a \in Zn^*$, since $(a,n)=1$, we have $(a,p_i)=1$ for all $i=1 \sim s$. By Euler's theorem, $a^{\Phi(p_i^{l_i})} \equiv 1 \pmod{p_i^{l_i}}$ for all $i=1 \sim s$. Let $l = \mathrm{lcm}(\Phi(p_1^{l_1}), \Phi(p_2^{l_2}), \ldots, \Phi(p_s^{l_s}))$. We have $a^l \equiv 1 \pmod{p_i^{l_i}}$ for all $i=1 \sim s$. Hence, $a^l \equiv 1 \pmod{p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_s^{l_s}}$, or $a^l \equiv 1 \pmod n$. Thus, we have already found some fixed positive integer l satisfies $a^l \equiv 1 \pmod n$ for all $a \in Zn^*$. If $l < \Phi(n)$, there are no primitive roots modulo n (recall the above comment (1)).

Now, if n has two distinct odd prime divisors, say p_1 and p_2, then $\Phi(p_1^{l_1})$ and $\Phi(p_2^{l_2})$ are both even. Consequently, since $(\Phi(p_1^{l_1}), \Phi(p_2^{l_2})) \neq 1$, $l = \mathrm{lcm}(\Phi(p_1^{l_1}), \Phi(p_2^{l_2}), \ldots, (p_s^{l_s})) < \Phi(p_1^{l_1}), \Phi(p_2^{l_2}) \ldots, \Phi(p_s^{l_s}) = \Phi(p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_s^{l_s}) = \Phi(n)$. This tells us that if n has two distinct odd prime divisors, then there are no primitive roots modulo n. In other words, there may exist primitive roots modulo n if $n=2^k$, p^k, or $2^c p^k$ where p is an odd prime since they are the integers not having two distinct odd prime divisors. Morever, we observe that, in the case $n=2^c p^k$, if $c \geq 2$, $\Phi(2^c) = 2^{c-1}$ is even. Consequently, $l = \mathrm{lcm}(\Phi(2^c), \Phi(p^k)) < \Phi(n)$ since $(\Phi(2^c), \Phi(p^k)) \neq 1$. There cannot be rimitive roots modulo n either. Hence, we know that there may exist primitive roots modulo n if $n=2^k$, p^k or $2p^k$ where p is an odd prime. We will examine each case step by step.

Case I: $n=2^k$.

$n=2$ $(Z_2^*;\cdot)$ is cyclic. 1 is a primitive root modulo 2.

$n=4$ $(Z_4^*;\cdot)$ is cyclic. 3 is a primitive root modulo 4.

If $K \geq 3$, there are no primitive roots modulo 2^k by the following thworem. First notice that all elements in $Z_{2^k}^*$ are odd.

Th. 3 For any odd integer a and $k\geq 3$, $a^{2^{k-2}}\equiv 1 \pmod{2^k}$.

Pf: We use mathematical induction.

K=3. Let $a=2b-1$ for some $b\varepsilon Z$. $a^2=(2b-1)^2=4b^2-4b+1$. So, $8|a^2-1=4b(b-1)$. This shows that the thworem holds for k=3.

If the statements hold for $k=\alpha-1$, then $a^{2^{\alpha-2}}=(a^{2^{\alpha-3}})^2=(1+t\cdot 2^{\alpha-1})^2$ for some $t\varepsilon Z$ (since we assume that $a^{2^{(\alpha-1)-2}}\equiv 1 \pmod{2^{\alpha-1}})=1+t\cdot 2^{\alpha}+t^2\cdot 2^{2\alpha-2}$. So, $2^{\alpha}|a^{2^{\alpha-2}}-1=t\cdot 2^{\alpha}(1+t\cdot 2^{\alpha-2})$.(notice that $\alpha-2>0$). The statements also hold for $k=\alpha$.

From the above theorem, we know that $\Phi(2^k)=2^{k-1}$ is not the least positive integer satifies $a^x\equiv 1 \pmod{2^k}$ for all $a\varepsilon Z_{2^k}^*$ when $k\geq 3$. Hence, there are no primitive no primitive roots modulo 2^k if $k\geq 3$.

Case II: $n=p^k$ where p is an odd prime.

n=p Consider the set $Z_p^*=\{1,2,\ldots,p-1\}$. By Euler's theorem, $a^{\Phi(p)}\equiv 1 \pmod p$ holds for all $a\varepsilon Z_p^*$. But $\Phi(p)$ may not be the least positive integer satisfies $a^x\equiv 1 \pmod p$. In this case, this a is not a primitive root modulo p. In order that there exists primitive roots modulo p, there must exists some $a\varepsilon Z_p^*$ such that $\Phi(p)$ is the least positive integer satisfies $a^x\equiv 1 \pmod p$. Let N_{p-1} denote the number of $a\varepsilon Z_p^*$ such that $\Phi(p)$ is the least positive integer satisfies $a^x\equiv 1 \pmod p$, that is, the number of primitive roots modulo p. If $N_{p-1}=0$, then there are no primitive roots modulo p. However, we intend to prove that $N_{p-1}\neq\Phi$, that is there do exist primitive roots modulo p. Recalling the preceeding comment (2), we know that, if $N_{p-1}\neq\Phi$, $N_{p-1}=\Phi(p-1)$. Hence, we intend to prove that $N_{p-1}=\Phi(p-1)$.

Lemma. 1 P be an odd prime. For any positive divisor $d|p-1$, let N_d denote the number of integers $a\varepsilon Z_p^*$ such that d is the least positive integer satisfies $a^x\equiv 1 \pmod p$. Then, we have $N_d=0$ or $\Phi(d)$.

Pf: If, for any $a\varepsilon Z_p^*$, d is the least positive integer satisfies $a^x\equiv 1 \pmod p$, then $O(a)=d$in the group$(Z_p^*;\cdot)$. (By Lagrange's theorem, $O(a)|O(Z_p^*)=\Phi(p)=p-1$. This is the reason why we want the condition $d|p-1$.) Hence, N_d denotes the number of elements in$(Z_p^*;\cdot)$ which have order d where $d|p-1$.

If there are no elements of order d, then clearly $N_d=0$. If $N_d\neq 0$, we want to prove $N_d=\Phi(d)$. Since $N_d\neq 0$, there do exist elements of order d. Let $O(a)=d$. Then, $(a)=\{1,a,a^2,\ldots,a^{d-1}\}$ forms a cyclic subgroup of $(Z_p^*;\cdot)$ of order d. Notice that 1, a, a^2,..., and a^{d-1} are solutions of the congruence equation $t^d\equiv 1 \pmod p$. Since this equation has at most d mutually incongruent solutions, 1, a, a^2,...., a^{d-1} are all solutions of the equation. This tells us that the subgroup (a) contains all the elements of order d. (this is becaus that an element of order d must satisfy the above equation.) On the other hand, by Th. 2, an element $a^k\varepsilon(a)$ is of order $d=O(a)$ iff $(k,d)=1$. So, there are exact $\Phi(d)$ elements in $(Z_p^*;\cdot)$ of order d, or $N_d=\Phi(d)$.

Th. 4 p be an odd prime. For any positive divisor $d|p-1$, we must have $N_d=\Phi(d)$.

Pf: By the above lemma, we get $N_d<\Phi(d)$.

Now, by Lagrange's theorem, the order of any element in $(Z_p*;\cdot)$ must be a divisor of $\Phi(p)=p-1$. This tells us that $\sum_{d|p-1} N_d=0(Z_p*)=p-1$. On the other hand, $\sum_{d/p-1}\Phi(d)=p-1$. Hence, $\sum_{d|p-1}(N_d-\Phi(d))=\sum_{d|p-1}N_d-\sum_{d|p-1}\Phi(d)=0$ Since each term $N_d-\Phi(d)\leq 0$, we must have $N_d-\Phi(d)=0$ for all d. So, $N_d=\Phi(d)$ for all $d|p-1$.

Now, by putting $d=p-1$, we would get $N_{p-1}=\Phi(p-1)$. This is exact what we want. Speak plainly, we have proved that there are $\Phi(p-1)$ primitive roots modulo p.

$n=p^k$. Next, we would derive a primitive root modulo $p^k (k\geq 2)$ by using any one primitive root modulo p. The work proceeds as follows:

Lemma. 2 If a is a primitive root modulo p such that $a^{\Phi(p)}\not\equiv 1(\text{mod } p\ )$, then $a^{\Phi(p^{k-1})}\not\equiv 1(\text{mod } p\ )$ for all $k\geq 2$.

Pf: We use mathematical induction.

k=2. The theorem clearly holds.

Suppose the statement holds for $k=\alpha$. We want to prove that it also holds for $k=\alpha+1$.

By Euler's theorem, $a^{\Phi(p^{\alpha-1})}\equiv 1(\text{mod } p^{\alpha-1})$.(notice that $(a,p)=1$ since a is a primitive root modulo p) Let $a^{\Phi(p^{\alpha-1})}=1+t\cdot p^{\alpha-1}$ for some $t\in Z$. Notice that $p\nmid t$ since we assume that $a^{\Phi(p^{\alpha-1})}\not\equiv 1(\text{mod } p^{\alpha})$. Hence, $a^{\Phi(p^{\alpha})}=a^{\Phi(p^{\alpha-1})p}=(1+t\ p^{\alpha-1})^p=1+t\ p^{\alpha}+\sum_{\gamma=2}^{p}C_{\gamma}^{p}(t\ p^{\alpha-1})^{\gamma}=1+kp^{\alpha}+\sum_{\gamma=2}^{p}C_{\gamma}^{p}t^{\gamma}p^{\gamma(\alpha-1)}\equiv 1+tp^{\alpha}(\text{mod } p^{\alpha+1})$.(this is because that $\alpha\geq 3$ and $\gamma(\alpha-1)\geq\alpha+1$). So, $a^{\Phi(p^{\alpha})}\not\equiv 1(\text{mod } p^{\alpha+1})$ since $p\nmid t$. This shows that the statement also holds for $k=\alpha+1$.

Th. 5 If a is a primitive root modulo p, then a is also primitive roots modulo p for all $k\geq 2$ iff $a^{\Phi(p)}\not\equiv 1(\text{mod } p^2)$.

Pf: If a is primitive roots modulo p^k for all $k\geq 2$, then, putting $k=2$, $\Phi(p^2)$ is the least positive integer satisfies $a^x\equiv 1(\text{mod } p^2)$. Now, since $\Phi(p)<\Phi(p^2)$, we have $a^{\Phi(p)}\not\equiv 1(\text{mod } p^2)$.

Conversely, if a is a primitive root modulo p and $a^{\Phi(p)}\not\equiv 1(\text{mod } p^2)$, we want to prove a is also primitive roots modulo p^k for all $k\geq 2$.

Let c is the least positive integer satisfies $a^k\equiv 1(\text{mod } p\ )$ for some $k\geq 2$, that is $0(a)=c$ in the group $(Z_{pk}*;\cdot)$. If we can prove $c=\Phi(p^1)$, then we are done. Since $a^c\equiv 1(\text{mod } p^1)$, we have $a^c\equiv 1(\text{mod } p)$. Hence, $\Phi(p)|c$. (notice that $\alpha(a)=\Phi(p)$ in the group $(Z_p*;\cdot)$ and recall Lagrang's theorem.) Let $c=\Phi(p).d$ for some positive integer d.

On the other hand, by Euler's theorem, $a^{\Phi(p^k)}\equiv 1(\text{mod } p^k)$. ((a,p)=1 since a is a primitive root modulo p.) Hence, $c|\Phi(p^k)$, (again, we use Lagrange's theorem) that is $d\Phi(p)|\Phi(p^k)=p^{k-1}\Phi(p)$. $d|p^{k-1}$. Let $d=p^s$ where $0\leq s\leq k-1$. So, $c=d\Phi(p)=p^s\Phi(p)$.

If $s<R-1$, or $s\leq R-2$, then $c=p^s\Phi(p)\,|\,p^{R-2}\Phi(p)=\Phi(p^{R-1})$. Consequently, $a^{\Phi(p^{R-1})}\equiv 1$

(mod p^k) since $a^c \equiv 1 \pmod{p^k}$. This contradicts the result of the above lemma. Hence, $s=k-1$. $c=p^{k-1}\Phi(p)=\Phi(p^k)$.

Cor. 1 There do exist some primitive root b modulo p such that $b^{\Phi(p)} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$. Hence, there do exist some primitive root modulo p^k for all $k \geq 2$.

Pf: Take any primitive root a modulo p. Define b as follows:

$$b=\begin{cases} a & \text{if } a^{\Phi(p)} \not\equiv 1 \pmod{p^2}. \\ a+p & \text{if } a^{\Phi(p)} \equiv 1 \pmod{p^2}. \end{cases}$$

Clearly b is still a primitive root modulo p since $(a+p)^{\Phi(p)} \equiv a^{\Phi(p)} \equiv 1 \pmod{p}$.

We want to show that $b^{\Phi(p)} \equiv 1 \pmod{p^2}$ in the second case. $b^{\Phi(p)}=(a+p)^{\Phi(p)}=a^{\Phi(p)}+\Phi(p)\cdot a^{\Phi(p)-1}+\sum_{r=2}^{\Phi(p-1)}{}_{\Phi(p)}C_r a^{\Phi(p)-r}p^r=a^{p-1}+(p-1)a^{p-2}p+\sum_{r=2}^{p-1}{}_{p-1}C_r a^{p-1-r}p^r \equiv a^{p-1}+(p^2-p)a^{p-2} \pmod{p^2}$. $b^{\Phi(p)} \equiv a^{p-1}-pa^{p-2} \equiv 1-pa^{p-2} \pmod{p^2}$ since $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$. Hence, $b^{\Phi(p)} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ since $b^{\Phi(p)} \equiv 1 \pmod{p^2}$ would induce the result that $pa^{p-2} \equiv 0 \pmod{p^2}$ which means that $p \mid a^{p-2}$. (a is a primitive root modulo p implies $(a,P)=1$.)

Case III: $n=2p^k$ where p is an odd prime.

Take any primitive root a modulo p^k. Define b as follows:

$$b=\begin{cases} a & \text{if a is odd.} \\ a+p^k & \text{if a is even.} \end{cases}$$ In each case, b is odd.

Clearly, b is still a primitive root modulo p^k. We want to show that b is also a primitive root modulo $2p^k$.

Let c be the least positive integer satisfies $b^x \equiv 1 \pmod{2p^k}$, that is, $c=0(b)$ in the group $(Z_{2p^k}{}^*;\cdot)$. We must show that $c=\Phi(2p^k)=\Phi(p^k)$.

Since $b^c \equiv 1 \pmod{2p^k}$, we have $b^c \equiv 1 \pmod{p^k}$. $\Phi(p^k) \mid c$ (notice that b is a primitive root modulo p^k and use Lagrange's theorem).

On the other hand, by Euler's theorem, $b^{\Phi(2p^k)} \equiv 1 \pmod{2p^k}$ since b is odd and $(b,p^k)=1$. $c \mid \Phi(2p^k)=(p^k)$.

Hence, $c=\Phi(p^k)$. We have got what we want.

In all, we have proved that $(Z_n{}^*;\cdot)$ is cyclic iff $n=2, 4, p^k$ or $2p^k$ where p is an odd prime.

參考資料：Number Theory　Andrew

整論導引　凡異

A Formula for $P(D)(x^m e^{cx})$

指導老師吳森原
數三甲林傅儒

ABSTRACT In this note, we derive the formula $P(D)(x^m e^{cx}) = e^{cx}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^{m-j}P^{(j)}(c)$ to find a particular solution of $(D^2+4D+3D)y = 6x^2e^{-x}$.

Let the polynomial operator $P(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\dots+a_{n-1}D+a_0$, where D is the derivative operator $\frac{d}{dx}$. Associated with this operator is the polynomial P, where $P(r)=a_0r^n+a_1r^{n-1}+\dots+a_{n-1}r+a_n$ Then We have

Lemma 1. If i is a nonnegative integer and u, v are two functions of x, then

$$D^i(uv)=\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}u^{(j)}v^{(i-j)}.$$

Proof: We porve it by induction on i.

Clearly, it is true for i=0 and i=1.

Suppose it is true fou i=k. Then

$$\begin{aligned}
D^{k+1}(uv) &= D(D^k(uv)) = D\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}u^{(j)}v^{(k-j)} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}D(u^{(j)}v^{(k-j)})\\
&= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\{u^{(j+1)}v^{(k-j)}+u^{(j)}v^{(k+1-j)}\} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}u^{(j+1)}v^{(k-j)}+\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}u^{(j)}v^{(k+1-j)}\\
&= u^{(k+1)}v^{(o)}+\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}u^{(j+1)}v^{(k-j)}+\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}u^{(j)}v^{(k+1-j)}+u^{(0)}v^{(k+1)}\\
&= u^{(k+1)}v^{(0)}+\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j-1}u^{(j)}v^{(k+1-j)}+\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}u^{(j)}v^{(k+1-j)}+u^{(o)}v^{(k+1)}\\
&= u^{(k+1)}v^{(0)}+\sum_{j=1}^{k}\left(\binom{k}{j-1}+\binom{k}{j}\right)u^{(j)}v^{(k+1-j)}+u^{(0)}v^{(k+1)}\\
&= u^{(k+1)}v^{(0)}+\sum_{j=1}^{k}\binom{k+1}{j}u^{(j)}v^{(k+1-j)}+u^{(0)}v^{(k+1)} = \sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}u^{(j)}v^{(k+1-j)}.
\end{aligned}$$
Q.E.D.

Lemma 2. If j, m are two nonnegative integers, then $D^jx^m=\binom{m}{j}j!x^{m-j}$.
The proof is trivial.

Lemma 3. If i, m are two nonnegative integers, then

$$\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}j!\binom{m}{j}x^{m-j}c^{i-j}=\sum_{j=0}^{m}\binom{i}{j}j!\binom{m}{j}x^{m-j}c^{i-j}.$$

Proof: We have the following three cases:

(i) i>m.
$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}j!\binom{m}{j}x^{m-j}c^{i-j} &= \sum_{j=m+1}^{i}\binom{i}{j}j!\binom{m}{j}x^{m-j}c^{i-j}+\sum_{j=0}^{m}\binom{i}{j}j!\binom{m}{j}x^{m-j}c^{i-j}\\
&= 0+\sum_{j=0}^{m}\binom{i}{j}j!\binom{m}{j}x^{m-j}c^{i-j} \quad \left(\binom{m}{j}=0 \text{ for } j>m\right)\\
&= \sum_{j=0}^{m}\binom{i}{j}j!\binom{m}{j}x^{m-j}c^{i-j}.
\end{aligned}$$

(ii) i=m. obviously.

(iii) i<m. The proof is similar to part (i). Q.E.D.

Let c be a real number, we define $p(c)=a_0 c^n+a_1 c^{n-1}+\dots+a_{n-1}c+a_n=\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}c^i$.

and $p^{(j)}(c)=\left.\dfrac{d^j p(r)}{dr^j}\right|_{r=c}=\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}\binom{i}{j}j!c^{i-j}$. Then we get the main result.

Theorem With the above notation, $p(D)(x^m e^{cx})=e^{cx}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^{m-j}p^{(j)}(c)$.

Proof:
$$\begin{aligned}
p(D)(x^m e^{cx}) &= \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}D^i(x^m e^{cx})\\
&= \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(D^j x^m)(D^{i-j}e^{cx}) && \text{(By lemma 1)}\\
&= \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\binom{m}{j}j!x^{m-j}c^{i-j}e^{cx} && \text{(by lemma 2)}\\
&= e^{cx}\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}j!\binom{m}{j}x^{m-j}c^{i-j}\\
&= e^{cx}\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}\sum_{j=0}^{m}\binom{i}{j}j!\binom{m}{j}x^{m-j}c^{i-j} && \text{(By lemma 3)}\\
&= e^{cx}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{n-i}\binom{i}{j}j!\binom{m}{j}x^{m-j}c^{i-j}\\
&= e^{cx}\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}\binom{i}{j}j!\binom{m}{j}x^{m-j}c^{i-j}\\
&= e^{cx}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^{m-j}\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}\binom{i}{j}j!c^{i-j}\\
&= e^{cx}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^{m-j}p^{(j)}(c). && \text{Q.E.D.}
\end{aligned}$$

Remark: From the theorem, we see that if the number c is an m-fold root of the polynomial equation $p(r)=0$, then $p(D)(x^k e^{ck})=0$ for $k=0,1,\dots,m-1$.

<u>Example.</u> Find the general solution of $y''+4y'+3y=6x^2e^{-x}$.

Sol We see that e^{-x} is a solution of $y''+4y'+3y=0$. The tentative trial solution is $y_p(x)=(Ax+Bx^2+cx^3)e^{-x}$ Hence, $p(r)=r^2+4r+3$ and $P(-1)=0$

$p'(r)=2r+4$ $\quad p'(-1)=2,$

$p''(r)=2$ $\quad p''(-1)=2,$

$p'''(r)=0.$ $\quad p'''(-1)=0.$

Thus $p(D)y_p(x)=AP(D)(xe^{-x})+BP(D)(x^2e^{-x})+cP(D)(x^3e^{-x})$.

$$=Ae^{-x}\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}x^{1-j}p^{(j)}(-1)+Be^{-x}\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}x^{2-j}p^{(j)}(-1)+ce^{-x}\sum_{j=0}^{3}\binom{3}{j}x^{3-j}p^{(j)}(-1)$$

$$=6x^2e^{-x}$$

Comparing the coefficients in both sides, we get:

$$\begin{bmatrix} 1\cdot p'(-1) & 1\cdot p''(-1) & 1\cdot p'''(-1)\\ 1\cdot p(-1) & 2\cdot p'(-1) & 3\cdot p''(-1)\\ 0 & 1\cdot p(-1) & 3\cdot p'(-1)\\ 0 & 0 & 1\cdot P(-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\6\\0\end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1\cdot p'(-1) & 1\cdot p''(-1) & 1\cdot p'''(-1) & 0 \\ 1\cdot p(-1) & 2\cdot p'(-1) & 3\cdot p''(-1) & 0 \\ 0 & 1\cdot p(-1) & 3\cdot p'(-1) & 6 \\ 0 & 0 & 1\cdot p(-1) & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Therefore, $A=3/2$, $B=-3/2$, $C=1$, $Y_p(x)=(3/2x-3/2x^2+x^3)e^{-x}$. Hence the general solution is $y(x)=c_1e^{-3x}+c_2e^{-x}+(3/2x-3/2x^2+x^3)e^{-x}$.

Example 2. Find the general solution of $(D-2)(D-1)(D+1)y=(3-2x-2x^2+4x^3)+(4-6x+6x^2)e^x$.

Sol. $Up(x)=A_1+B_1x+Cx^2+D_1x^3$ is the tentative trial solution of $(D-2)(D-1)(D+1)y=(3-2x-2x^2+4x^2)$, and $V_p(x)=(A_2x+B_2x^2+C_2x^3)e^x$ is the tentative trisl solution of $(D-2)(D-1)(D+1)y=(4-6x+6x^2)e^x$. Hence

$p(r)=(r-2)(r-1)(r+1)=r^3-2r^2-r+2.$ $\quad p(0)=2,\ p(1)=0$,

$p'(r)=3r^2-4r-1$ $\quad p'(0)=-1,\ p'(1)=-2$,

$p''(r)=6r-4$, $\quad p''(0)=-4,\ p''(1)=2$,

$p'''(r)=6$, $\quad p'''(0)=6,\ p'''(1)=6$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1\cdot p(0) & 1\cdot p'(0) & 1\cdot p''(0) & 1\cdot p'''(0) & 3 \\ 0 & 1\cdot p(0) & 2\cdot p'(0) & 3\cdot p''(0) & -2 \\ 0 & 0 & 1\cdot p(0) & 3\cdot p'(0) & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1\cdot p(0) & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -4 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & -4 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & -4 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

The general solution is $y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{x}+c_3e^{-x}+(6+13x+2x^2+2x^3)+(-5x-x^3)e^x$.

Reference: A.L. Rabenstein; Introduction to Ordinary Differential Equation ,1966.

數學象形文

Tom Swifties

is a special number," Tom said perfectly.

emove the braces," remarked Tom parenthetically.

p, then q," implied Tom.

he concavity changes here," said Tom with inflection.

is three meters long," ruled Tom.

$\overline{2} \neq a/b$," noted Tom irrationally.

hey are mirror images," reflected Tom.

epeating decimals do not end," remarked Tom in his infinite wisdom.

his is a function," related Tom.

is a fraction," said Tom properly.

is a vector," directed Tom.

he course ends in 35 weeks," said Tom distantly.

$= 11_2$," noted Tom basely.

"It just touches," noted Tom tangentially.

"$b^2 - 4ac = 0$," discriminated Tom.

"Space is an infinite set of points," Tom said distantly.

"1, 3, 5, 7," Tom said oddly.

"It must be a convex quadrilateral," figured Tom.

"$|1| = 1$," Tom stated absolutely.

"99 is almost 100," said Tom roughly.

"$y = mx + c$," Tom analyzed.

"It's a plane figure," Tom said flatly.

"Proofs are necessary," reasoned Tom.

"I hate quizzes," Tom stated testily.

ARTHUR COXFORD AND HIS STUDENTS
STUDENTS OF ART PETERSON

The Greek Alphabet

Α	α	alpha
Β	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
Ε	ϵ	epsilon
Ζ	ζ	zeta
Η	η	eta
Θ	θ	theta
Ι	ι	iota
Κ	κ	kappa
Λ	λ	lambda
Μ	μ	mu
Ν	ν	nu
Ξ	ξ	xi
Ο	o	omicron
Π	π	pi
Ρ	ρ	rho
Σ	σ	sigma
Τ	τ	tau
Υ	υ	upsilon
Φ	ϕ	phi
Χ	χ	chi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

編　後　語

本期的篇數雖不多，但每篇皆是作者心血之作。我們得感謝邱日盛老師及諸位指導老師在百忙之中抽空指導。

「師大數學」是屬於我們的，我們期望每一位系的成員都能提出自己的研究心得，好讓大家共賞這份得來不易的心得。也許，有些同學會有如此想法：「自己所寫出來的也都早已見於文獻，又何必浪費時間去寫呢？」不過，我們要強調一件事，當您作好一篇文章後，您一定已把您所寫的主題完全領悟而且在編寫的次序上力求易於明瞭的順序。如此你就有了最大的收穫。寫吧！不要失去自己的收穫。

林傳儒　謹啓

七十年六月

師大數學　第十五期

發行人：顏啟麟

出版者：國立台灣師範大學數數學學會

主　　編：林傳儒

編　　輯：官長壽　簡瑞仁　程麗娟

封面設計：陳大鈞

印刷者：九　章　出　版　社

社址：台北市羅斯福路三段 297－2 號

電話：(02) 3940207

出版日期：中華民國七十年六月五日

師大訓課刊登第 136 號