師大數學

14

吾師

系運風光

系主任序

本系成立於民國三十五年八月，首由張儒林教授擔任系主任，當時僅有數學系一年級及二年制專修科一年級各一班，同學三十餘人，教授三位，助教一位，嗣由管公度、潘璞、李新民、康洪元、范傳坡、常法徵各教授輪掌系務，歷經各主任與同仁之群策群力，始具今日之規模。三十四年來本系之畢業系友，已逾貳仟叁佰餘人，多各有成就；其中具博士學位者逾一百四十人，僅獲碩士學位約百叁拾人，或執教於高等學府，或繼續高深研究，餘多服務於中等教育界，平時諄諄教學，誨人不倦，敦品篤行，懷抱熱忱，此實本校優良風氣之所致。

現本系有教師四十一人，學生方面日間部有十二班，夜間部五班，共有同學六百餘人，圖書兩萬餘册，雜誌百餘種；自六十四年夏遷於現址後，環境煥新，出國學成系友或返系服務，或時常返校互相砥礪，研究風氣已大弧度地提高；今日數學系之師生孜孜不息，無不為美好遠景而奮發。

近來科學發展甚速，對數學之需要甚切，本系之任務更日益增大，除肩負數學教育之發展及中等數學教育之輔導外，亦兼具數學學術研究之重要任務。為增強研究風尚，本系於十四年前創辦師大數學年刊，以供師生發表教學及研究心得。切磋琢磨，提高學習及研究興趣，屢經負責同學之辛勞耕耘及師生系友之共同支持，漸茲茁壯，今後請更不吝珠璣，源源賜稿，則本刊必前程似錦，散發絢爛光芒，於此，敬表謝忱，更盼我師生系友善珍此片園地。

顏啓麟　謹識

六十九年五月

目　錄

淺談四色問題

林福來

一、四色問題：

1976年7月22日，在加拿大舉行的國際數學會議上，兩名美國伊利諾大學的數學教授K. Appel與W. Haken聯合發表了震撼數學界的研究結果〔1〕：四色問題的答案是肯定的。

所謂四色問題是：一張地圖上，不管畫分的區域有多少（當然有限），是否恒可用四種顏色來着色，而使相鄰的區域都異色？

兩個區域相鄰的意思是指兩個區域至少共有一個邊。如果兩個區域只共幾個頂點，不視為相鄰。如下圖中D，F兩區域不算相鄰。

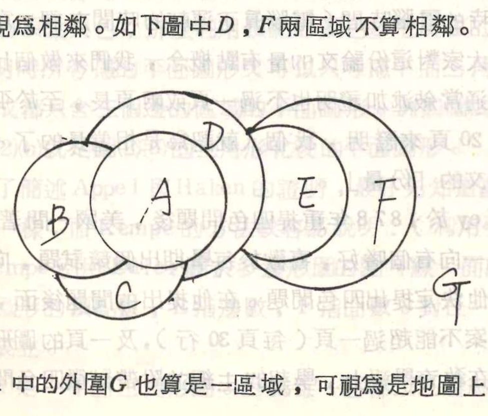


圖1中的外圍G也算是一區域，可視為是地圖上環繞陸地的海洋。

二歷史簡介：

最先提出四色問題的是英國的一位學生 F.Guthrie，在1852年當他描繪一張英格蘭的城鎮地圖，進行着色時，Guthrie 發現他需要四種顏色，始能使相鄰的兩城鎮都異色。(例如圖1中的 A、B、C、D 四個區域)同時，他也發現用不着第五種顏色。根據這經驗 Guthrie 臆測四種顏色似乎已足夠替任何地圖着色。可是他自己却無法證實。後來他將這問題問他的哥哥 Frederick 。他哥哥也解不出，又將問題帶給他的教授 A.De Morgan 。De Morgan 同樣被困，就寫信問對圖形學頗有研究的 Hamilton 。Hamilton的回信出乎意料地簡短，他說："我對這問題沒興趣"。迴異於Hamilton，De Morgan 對這問題倒是耿耿於懷，後來不僅向每一位他認識的朋友都詢問，並且將此問題登在1860年期的 Athenaeum。

1878年，De Morgan 死後，Cayley在一次倫敦數學學會的會議中，再次提出四色問題，詢問在座的數學家，有沒有人知道這問題是否解決了。同時，大數學家Cayley 還直承自己對它可是一點解決的辦法都沒有。Cayley這一重提，引起了當時身爲律師的業餘數學家 A. B. Kempe 的注意。Kempe 研究後，在1879年的美國數學雜誌 (Am. J.Math.)發表一篇論文〔3〕，文中他證明四色問題的答案是肯定的。當時的人也都接受了他的證明。由於這貢獻，原先掌管倫敦數學學會財務的Kempe，後來被推選爲該會的會長。

到了1890年，Durham大學的數學教授 P.J.Heawood 指出Kempe的證明，實際上有漏洞，詳見〔2〕。不過，Heawood 提出這漏洞的往後幾年，數學家們都不認爲此漏洞有多嚴重，大家都認爲它應該是可以補救的；而四色問題也就一直被當做已經解決了。然而一年復一年，始終沒有人能提出補救該漏洞的方法。漸漸地，數學家們才意識到四色問題，實際上比大家當初所想像的要難多了。

Appel與Haken兩人所提出的論文，質當然沒話說，在量上，也是驚人的。打字打好後，論文的摘要共計100頁，內容的細節共有100頁，導出這些細節的工作又有 700 頁，外加1200個小時的電腦時間(電腦眞正運轉的時間之謂，寫程式，打卡等等時間不算)。為了讓大家對這份論文的量有點概念，我們來做個比較。一般大學部的數學課中的定理，通常敘述加證明也不過一頁或兩頁長，至於平常發表於數學雜誌上的定理，如果以 20 頁來證明，我個人就認為是相當長的了。由此可知Appel 與 Haken他們這篇論文的「份量」。

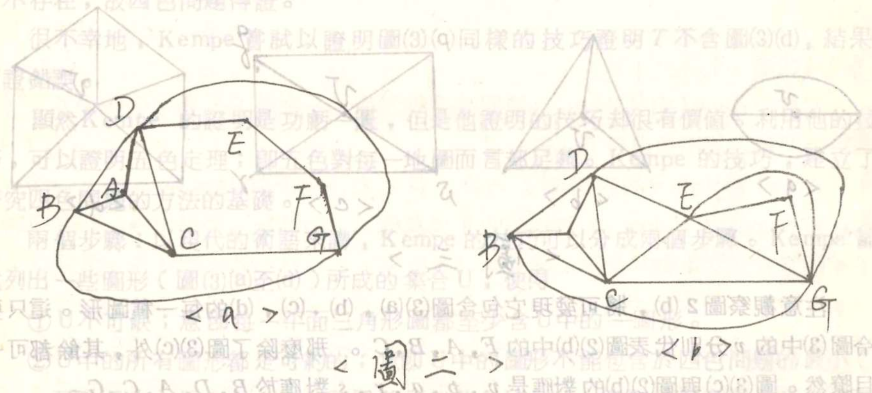
再回到十九世紀，當Cayley 於 1878年重提四色問題後，美國一間著名的男校Clifton學院的某任校長，一向有個嗜好，喜歡於每學期出個競試題，向全體學生徵答。在 1886 年的秋季，他決定提出四色問題。在他提出的問題後面，他很樂觀地加了附註，謂"徵答的答案不能超過一頁(每頁30行)，及一頁的圖形"。

這次徵答的結果，後來登在教育學報上，學報的主編並附帶誠徵四色問題的解

答，渴望有人提供。當時提供答案的數學家中有位F. Temple。Temple有一天參加某會議時，感覺會而不議，窮極無聊，因此他讓自己的思潮繞着四色問題打轉，忽然靈機一動，頓得一證明法。他想，只要能證明任一平面的地圖上，找不到五個相鄰的區域，因為四色問題跟它等價，自然也就迎刃而解了。事實上，如果能找到五個相鄰的區域，四色問題的答案當然就被否定了。但是證明找不到五個相鄰的區域，並不能導出四色問題的答案。這兩個問題常會被搞混。

三證法簡介

Appel及Haken與許多近代研究四色問題的數學家，處理此問題的方法主要步驟都相同。他們先將四色問題轉化成：“證明四種顏色足夠塗每一個平面圖形的所有頂點，而使相鄰的頂點都異色”（平面圖形是指平面上的網路，它們的邊除頂點外不相交，如下圖）



<圖二>

四色問題與這問題等價。因為一張地圖，如果在每一區域中任取一點，再將這些點以邊連接起來，可以證明就得一平面圖形。如果四色可以塗完此平面圖形的頂點，使相鄰的頂點異色，那麼利用頂點的顏色塗它所在的區域，就可證明四色問題。

證明時所考慮的平面圖形又可以只考慮平面三角形圖即可，平面三角形圖是將平面分成都只含三個邊的區域的平面圖形。例如圖(2)(a)就是對應於圖1的平面圖形，而圖(2)(b)就是圖(2)(a)的三角形化後的平面圖形。

為了簡述Appel與Haken的證明，最好先知道當年Kempe的證明，因為主要步驟都一樣，而Kempe的方法較容易說明：（利用平面三角形圖來解說）。

Kempe引用Euler關於多邊形圖的點、線、面間關係的公式：$V-E+F=2$；V指圖形的頂點數，E指邊數，F指面數。對任一個平面三角形圖而言，Euler公式都成立。

設T是一平面三角形圖。因為每一面都以三邊為界，每邊必夾在兩面之間，所

以在T中 2 E＝3 F

設V_i代表T的頂點中有i邊交會的頂點數，那麼T的總頂點數：$V=\Sigma V_i$又因爲每一邊都有兩個頂點

$$\text{所以}\quad \Sigma iV_i=2E$$

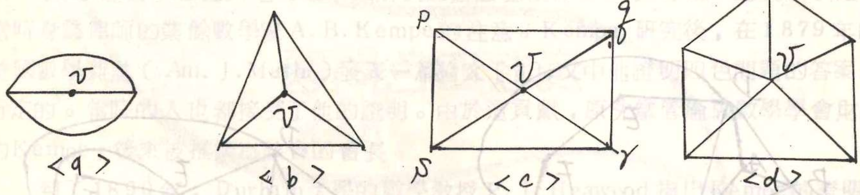
將$2E=3F, V=\Sigma V_i$，$\Sigma iV_i=2E$代入 Euler 公式，

$$\text{得}\quad \sum_i (6-i)V_i=12$$

$$\text{卽}\quad 4V_2+3V_3+2V_4+V_5-V_7-2V_8-3V_9-\cdots\cdots=12$$

$$(\text{利用}\quad V_0=V_1=0)$$

由上式知：V_2、V_3、V_4、V_5四個數中，至少有一個是正整數。亦卽T至少得包含下面四個圖中的一個：



< 圖 三 >

注意觀察圖 2 (b)，將可發現它包含圖(3)(a)，(b)．(c)，(d)的每一種圖形。這只要令圖(3)中的v分别代表圖(2)(b)中的F, A, B, C。那麼除了圖(3)(c)外，其餘都可一目瞭然。圖(3)(c)與圖(2)(b)的對應是v，p，q，r，s對應於B, D, A, C, G。

Kempe 接着假設四色問題有反例；他考慮一個含有最少頂點的反例，如果它不是平面三角形圖，可以加一些邊將它三角形化，而不增加頂點數，設所得的圖形是T。根據假設，頂點數少於平面圖形T的都可以用四色問題着色，但T不能。

如果T包含圖(3)中的(a)或(b)，則從T中移去對應於v的頂點，則所得圖形頂點數少於T，可以用四色着色。最後放回對應於v的頂點，由於此頂點最多只與三頂點相鄰，故可着四色中的一色，因此T變成可用四色着色，矛盾。故T不含圖(3)(a)及(b)。

如果T包含圖形(3)(c)，就稱爲麻煩了。因爲當p,q,r,s恰用完四色時，v就無色可塗了。不過 Kempe 提出一種論證法，說明T亦不能包含圖(3)(c)。其法如下：

設p,q,r,s分别着藍、綠、紅、黃。在T中，考慮着藍、紅兩色的所有頂點與連接這些頂點的邊所成的子圖。此子圖的每一連通子圖叫做一個藍一紅Kempe

鏈。如果 p, r 分在不同的Kempe 鏈中，那麼將 p 所在的鏈上的藍、紅對調，其他顏色不變．如此得一新的着色法，而 p, r 同時是紅色，此時即可將 v 塗上藍色。

同理，如果 q 及 s 分別在不同的綠一黃 Kempe鏈上，只要將 q 所在的鏈上的綠，黃對調，就能使 q 變成黃色，因而可將 v 塗上綠色。

最後再考慮當 p, r 同屬於某一藍一紅鏈且 q，s 同屬於一綠一黃鏈的情形。實際上，這種情況根本不可能發生。因爲如果發生，那這兩鏈一定在某處相交，其交點就必需同時是藍（紅）且綠（黃）。

總之，若 T 含圖(3)(c)，則 T 可以四色着色，矛盾。

到此爲止，Kempe 證明 T 不能包含圖(3)(a)，(b)，或(c)。如果他能再證明 T 不含圖(3)(d)。那麼Kempe 的四色定理的證明就完成了。因爲每一平面三角形圖，我們已證明了必需含有圖(3)(a)至(d)四個圖中的一個。旣然此時的 T 不含此條件，表示 T 不存在，故四色問題得證。

很不幸地，Kempe 嘗試以證明圖(3)(c)同樣的技巧證明 T 不含圖(3)(d)，結果引證錯誤。

顯然Kempe 的證明是功虧一簣，但是他證明的技巧却很有價值。利用他的技巧，可以證明五色定理；即五色對每一地圖而言都足夠。Kempe 的技巧，建立了研究四色問題的方法的基礎。

兩個步驟：以現代的術語來講，Kempe 的技巧可以分成兩個步驟。Kempe 嘗試列出一些圖形（圖(3)(a)至(d)）所成的集合U，使得

①U不可缺；意即每一平面三角形圖都至少含U中的一圖形。

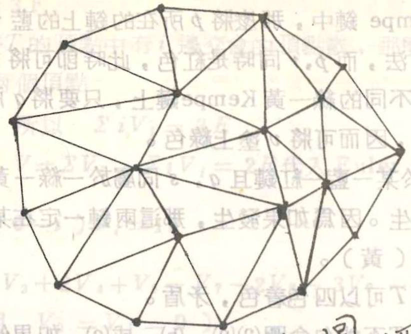
②U中的所有圖形都是可約的；意即U中的圖形不能包含於四色問題的最小（頂點最少）反例中，換句話說某反例若含U中的一圖形，則該反例可化成頂點更少的反例。

Kempe 提出了這兩個可以將四色問題完全解決的處理架構，可謂雖敗猶榮。他本人後來被推擧爲倫敦數學學會的會長，也眞是實至名歸。

Kempe 當年提出的不可缺的圖形集合U只含四個圖形。Appel 與Haken 提出的證明中，U含有大約1900 個圖形（最初的證明中，U含有1939 個圖形。現在已證明U只需含 1400 個圖形卽可）。含有一千多個圖形的U，欲證其中的每個圖形都是可約的，不依靠電腦，根本無法處理。下圖就是此一千多個圖形中的一個。此圖形最外環共含12 個頂點。

Appel 與Haken的集合U中，所含的圖形，最外環最多只有14 個頂點。萬一他們的U需要最外環含更多頂點的圖形，那麼目前這代的電腦恐怕也無法幫忙來證明U的所有圖形都是可約的。

Appel 與Haken 的證明看起來也同樣包括兩個主要的步驟：



〈圖四〉

①建造一不可缺的圖形所成的集合U。

②證明U中的圖形都是可約的。

四四色問題完全解決了嗎？

當然，Appel與Haken 已將四色定理證明了。所謂它是否完全解決了，指的是四色問題還值不值得再花工夫。

Appel與Haken的證明由於過於冗長。有兩個新問題產生。第一，旁人很難驗證Appel與Haken 的證明是否千眞萬確。一個數學定理提出後，除非別的數學家能證實它，否則很難讓人接受，遑論推廣了。一般，當我們發表一篇論文，我們總希望越多的人越快去證實並引用它越好。可是根據Appel自己的估計，如果一個出色的數學家，對四色問題素有心得，又懂電腦，那麼他大概需要在一部大的電腦上，花300小時的電腦時間，才能驗證完Appel 與Haken的證明的細節。顯然地，很少有數學家，能花得起這麼多的電腦時間。因此，很少有人能夠驗證Appel與Haken的證明是否眞確。

冗長的證明引出的第二個問題是——無法讓人瞭解結果何以是對的。不管使用電腦與否，我們都無法體會出結果為眞的奧妙。一般我們總希望在證明的過程中也同時能提供結果為眞的眞正理由；為了這目標，我們往往把許多證明加以改寫。因此，最近幾年，數學家們關於四色問題，還有待努力。首先得想法將Appel與Haken的證明簡化，同時盡可能找出更能顯出四色問題為眞的理由的證明。當然，往後的任何改進，都絲毫無損於Appel與Haken兩位數學家的偉大成就。

參考資料：

1. K. Appel and W. Haken, Every planar map is four colorable.

Illinois J. Math. 21 (1977), 429-567.(plus microfiche supplements)

2. P.J. Heawood, Map-colour theorem, Quart. J. pure Apple Math. 24. (1890), 332-338.
3. A.B. Kempe, On the geographical problem of the four colours. Amer. J. Math. 2(1879). 193-220.

〔註〕：本文是就D. R. Woodall 於 1979 年在Mathematical Spectrum 上發表的The Four-Colour Theorem所改寫的。

用兩種顏色能把直線劃分的區域分隔開嗎？

問題是這樣的：在平面上有 n 條直線，一共把平面分成若干區域，現在用黑白兩種顏色，要使所有相鄰的區域，能着上不同的顏色。

如果給我們一個若干條直線所劃分區域的具體圖形，用黑白兩色按照上述要求進行着色，是不會發生任何困難的。但要我們說明當直線是 n 條時，上述要求的着色一定可能的道理，恐怕就不容易說得清楚了。現在讓我們一邊作圖，一邊分析問題就容易說明了。

先畫上第一條直線 l_1，平面被分為兩個區域，只需把一邊塗上黑色，另一邊再塗上白色就可以了。

所以當 $n=1$ 時，問題是成立的。

如果再畫上直線 l_2 只要在 l_2 的任何一側，把所有的區域改變原來的着色，就是把白的變黑，黑的改白就可以了。

所以當 $n=2$ 時，問題也是成立的。

我們依上法畫下去，並假定當 $n=k$ 時，問題仍然成立。就在這個圖上，再添上第 l_{k+1} 條直線，然後把直線 l_{k+1} 的一側所有的區域改變原來的着色，即黑的改白，白的改黑；照這樣改變着色以後，就能與直線 l_{k+1}的另一側所有相鄰的區域，具有不同的着色。

而且直線 l_{k+1}的改變着色那一側的區域，本來是黑白兩色相間的，現在全部改變它們的顏色後，顯然仍是黑白兩色相間的。

所以當 $n=k+1$ 時，問題仍然成立的。

因此可以說明，當 n 是任何自然數時，n 條直線劃分平面所成的區域，用黑白兩色區別着色，是完全可能的。

森林的經營
——線型代數的應用

CHRIS RORRES HOWARD ANTON 著　　邱日盛譯

緒　言

爲了提高學習興趣起見，這裏我想介紹，種植各種不同高度的樹木，經營林場而想獲得一定收益，這一種狀況的線型代數的模型，雖然實際經營情形不僅於需要考慮下面所述的各種因素，但是爲了數學處理的方便，我們假定下面的情況。伐採出來的樹木，其售價，僅僅以樹木的高度而定，且施行定期伐木。另外每一次伐木到下一次伐木的時間又假說爲一定，且樹木在伐採時間內沒有持續成長，而在每一次伐採期間，整個森林樹木的高度分佈不變。這種穩定伐採方法（Sustainable harvesting），實際上不一定能夠唯一的決定，但是現在我們想討論的主題是如何使獲利最大。在使森林不致於毀滅，而能夠持續的伐採某一定的數量，使得獲益爲最大的伐採方法，我們就稱爲最適宜穩定伐採（Optimal sustainable yield）。本文的目的是想決定它。

模　式

現在我們來考慮經營種植樅樹森林，每年12月出售聖誕樹的情形。在這種森林中每年選擇若干樅樹出售，但伐採後的樹木位置一定要種新的苗木，使得整個森林中，樅樹的數目不變，常保持同樣的樅樹。（在這種模型中，我們假定伐採時期以

外，樹木不會被盜伐，不出售，苗木不會枯死，全部會持續成長。）

在市場上，聖誕樹（即出售的樅樹）的價格祇與樹高有關而已，樹高 h 滿足 $h_{k-1} \leq h < h_k$ 的　列為 k 組的樹，而 k 組的樹每棵定 p_k 元，我們現在列其價格表，但 $1 \leq k \leq n$　$h_0 = 0$，$h_n = \infty$

表 1

組　　別	樹　　高	單　價
1　（苗木）	$[0, h_1)$	$p_1 = 0$
2	$[h_1, h_2)$	p_2
3	$[h_3, h_4)$	p_3
$\vdots$	$\vdots$	
$n-1$	$[h_{n-2}, h_{n-1})$	p_{n-1}
n	$[h_{n-1}, \infty)$	p_n

再設，屬於 i 組的樅樹的棵數為 x_i（$i = 1, 2, \cdots, n$），且稱列向量

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

為初期向量（nonharvest vector）。如果我們假定穩定伐採方法，那麼，每次開伐時就有一初期向量出現，因此，我們首先需要考慮如何求出初期向量的方法。

因為我們已經假定整個森林的樹木棵數為一定，設其為 S 棵，則

$$x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n = S \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

這樹木棵數 S，當然由森林面積，各棵樹所佔面積大小而決定。首先我們來整理一下穩定伐採的循環情形。

①苗木種植後的狀態（forest configuration）初期向量 $\vec{x}$ 就可以決定。

②經過一定時間（這模型為一年）內樹木成長，變成另一種森林狀態。

③採伐一部分樹木出售，然後種植新的苗木，使數木總數成為原來的總數。

④因此再成為①的狀態。

首先我們來考慮②。伐採與下一次伐採的期間樹木會成長，因此若干樹木可能從某一組升級到另一組。因為受太陽光程度等的不同影響，一部分樹木可能成長不理想，不能升級到上一級。因此我們要考慮成長率 g_i（$i = 1, 2, \cdots, n-1$）

g_i 表示 i 組的樹木中，到下一次伐採時，升級到（$i+1$）組的比率。（為了簡化起見，假定各樹至多祇能成長一級）

$1-g_i$ 表示 i 組的樹木中，到下一次伐採時，還停留在 i 組的比率。

利用這些比值我們可以得到一 $n \times n$ 的方陣 G，（稱爲成長方陣：growth matrix）。

$$G=\begin{bmatrix} 1-g_i & 0 & 0 & \cdots\cdots & & 0 \\ g_1 & 1-g_2 & 0 & & & 0 \\ 0 & g_2 & 1-g_3 & \cdots\cdots & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1-g_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & g_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由於初期向量 $\overrightarrow{x}$ 的第 i 成分爲剛植苗木後，i 組所含樹木的棵數，所以，向量

$$G\overrightarrow{x}=\begin{bmatrix} (1-g_1)x_1 \\ g_1x_1+(1-g_2)x_2 \\ g_2x_2+(1-g_3)x_3 \\ \vdots \\ g_{n-2}x_{n-2}+(1-g_{n-1})x_{n-1} \\ g_{n-1}x_{n-1}+x_n \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

的第 i 成分應該爲下一次開採時（即成長後）在 i 組所含樹木棵數。

假設 i 組中伐採 y_i 棵出售（$i=1, 2, \cdots, n$）。這時我們可以得到所謂伐採向量的下列向量

$$\overrightarrow{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

這向量 $\overrightarrow{y}$ 的成分的總和

$$y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n$$

當然是出售樹的棵數總和，因此也是伐採後該補植新苗木的棵樹。定義方陣 R 爲

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

那麼向量

$$R\overrightarrow{y}=\begin{bmatrix} y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

就成爲伐採後該補植新苗木的棵數。

現在我們來考慮能表示穩定伐採方式的方程式

（成長後的狀態）－（伐採）＋（種苗）＝（剛植苗後的狀態）

因此

$$G\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}+R\overrightarrow{y}=\overrightarrow{x}$$

整理後可得

$$(I-R)\overrightarrow{y}=(G-I)\overrightarrow{x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

具體的寫出以上結果可得

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1\cdots\cdots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0\cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\cdots\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -g_1 & 0 & 0\ \cdots\cdots & 0 & 0 \\ g_1 & -g_2 & 0\ \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & -g_3\cdots\cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -g_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{n-1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

這個方程式(6)稱爲穩定伐採條件（sustainable harvesting condition）。

由以上結果，我們可以知道，如果有二個其成分爲非負的數的向量 $\overrightarrow{x}$，$\overrightarrow{y}$，而滿足

$$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=S$$

以及(6)式，那麼我們就可以決定一種森林的穩定伐採方式。假如 $y_1>0$，則苗木程度的樹也要採伐，因此利益就顯然減少，所以爲了收益，我們應該可以假定

$$y_1 = 0 \qquad \cdots\cdots(7)$$

追加這個條件，再把(6)具體表示，則可得

$$\left.\begin{aligned} y_2 + y_3 + \cdots\cdots + y_n &= g_1 x_1 \\ y_2 &= g_1 x_1 - g_2 x_2 \\ y_3 &= g_2 x_2 - g_3 x_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1} &= g_{n-2} x_{n-2} - g_{n-1} x_{n-1} \\ y_n &= g_{n-1} x_{n-1} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(8)$$

上式中，希望注意，其第一式爲其他各式的和。

因爲 $y_i \geq 0$（$i = 2, 3, \cdots\cdots, n$），因此由(8)式可知

$$g_1 x_1 \geq g_2 x_2 \geq g_3 x_3 \geq \cdots\cdots \geq g_{n-1} x_{n-1} \geq 0 \qquad \cdots\cdots(9)$$

相反的，若 $\vec{x}$ 爲擁有滿足(9)式的非負成分 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_{n-1}$ 的向量，而依(7)、(8)作出擁有非負成分的向量 $\vec{y}$，則顯然可以滿足(6)式。因此非負向量 $\vec{x}$ 成爲穩定伐採可能的充分且必要條件爲：其成分滿足(9)式。

i 組樹木的單價爲 p_i 元，因此伐採出售的總收益 P 必爲

$$P = p_2 y_2 + p_3 y_3 + \cdots\cdots + p_n y_n \qquad \cdots\cdots(10)$$

代入(8)式可得

$$P = p_2 g_1 x_1 + (p_3 - p_2) g_2 x_2 + \cdots\cdots + (p_n - p_{n-1}) g_{n-1} x_{n-1} \qquad \cdots(11)$$

再利用(1)，(9)，(11)，我們可以將所有穩定伐採方法中，決定其收益最大的問題變成如下列數式化的問題。

問題：求出使

$$P = p_2 g_1 x_1 + (p_3 - p_2) g_2 x_2 + \cdots\cdots + (p_n - p_{n-1}) g_{n-1} x_{n-1}$$

爲最大值的非負整數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，但

$$x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n = S \text{（定值）}$$

$$g_1 x_1 \geq g_2 x_2 \geq \cdots\cdots \geq g_{n-1} x_{n-1} \geq 0$$

$$1 \geq g_i > 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n-1)$$

$$p_i \geq 0 \qquad (i = 2, 3, \cdots\cdots, n)$$

這個問題可以用被稱做線型規畫（Linear Programing）的方法解出其答案出來（參照線型規畫的書籍）。由線型規畫的一般論我們可以得到下面的結果。

“P 的最大值爲伐採某一組的樹，而其他各組皆不伐採時可得。”

現在我們不提線型規畫，而利用其結果來解上面的問題。

首先設 P_k 爲伐採 k 組，而不伐採其餘各組所得到的收益，則上面問題變成，P_k（$k = 2, 3, \cdots\cdots, n$）的最大值就是所求 P 的最大值。因爲 k 組以外的樹不伐採，所以

$$y_2 = y_3 = \cdots = y_{k-1} = y_{k+1} = \cdots = y_n = 0 \quad \cdots\cdots (12)$$

又，k 組的樹全部要伐採，因此剛伐採後的森林中 k 組的樹就不存在。再說，假如 k' 組（$k' > k$）的樹存在，因爲 $g_{k'} > 0$，因此森林狀態會陸續的改變，因此會與"森林狀態的不變性"相抵觸，因此，k' 組的樹應該也不存在。換句話說

$$x_k = x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots\cdots = x_n = 0 \quad \cdots\cdots (13)$$

將(12)，(13)代入穩定伐採條件(8)，則

$$\begin{aligned} y_k &= g_1 x_1 \\ 0 &= g_1 x_1 - g_2 x_2 \\ 0 &= g_2 x_2 - g_3 x_3 \\ &\cdots\cdots \\ 0 &= g_{k-2} x_{k-2} - g_{k-1} x_{k-1} \\ y_k &= g_{k-1} x_{k-1} \end{aligned} \quad \cdots\cdots (14)$$

即

$$y_k = g_1 x_1 = g_2 x_2 = \cdots\cdots = g_{k-1} x_{k-1} \quad \cdots\cdots (15)$$

因此

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{g_1 x_1}{g_2} \\ x_3 &= \frac{g_1 x_1}{g_3} \\ &\vdots \\ x_{k-1} &= \frac{g_1 x_1}{g_{k-1}} \end{aligned} \quad \cdots\cdots (16)$$

將(13)，(16)代入(1)，則可得

$$x_1 = \frac{S}{1 + \frac{g_1}{g_2} + \frac{g_1}{g_3} + \cdots\cdots + \frac{g_1}{g_{k-1}}} \quad \cdots\cdots (17)$$

從(10)，(12)，(15)，(17)可求出 P_k 爲

$$\begin{aligned} P_k &= p_2 y_2 + p_3 y_3 + \cdots\cdots + p_n y_n \\ &= p_k y_k \\ &= p_k g_1 x_1 \\ &= \frac{p_k S}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{g_{k-1}}} \end{aligned} \quad \cdots\cdots (18)$$

(18)式中的 k（$= 2, 3, \cdots\cdots, k$）不管是什麼，P_k 值皆可用成長率 g_i 來表示。因

此最適當穩定收益可以用下面的形式表示。

定理　最適當穩定收益（Potimal sustinable yield）等於，當k 取不同值時

$$\frac{p_k S}{\dfrac{1}{g_1}+\dfrac{1}{g_2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{g_{k-1}}}$$

所取的最大值。設這最大值所對應的k為 k_0，則最適當穩定伐採方式爲將 k_0組的所有樹木伐採。

由以上可得，最適當穩定伐採的初期向量$\vec{x}$，必爲

$$\vec{x}=\frac{S}{\dfrac{1}{g_1}+\dfrac{1}{g_2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{g_{k-1}}}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{g_1}\\ \dfrac{1}{g_2}\\ \vdots\\ \dfrac{1}{g_{k-1}}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

上面的定理並沒有提，要伐採價錢最高組的樹木，這一點希望大家注意一下。最適當穩定伐採方式應該是由成長率g_i及價錢p_i相互的關係來決定的。

例：已知蘇格蘭的某一松林（成長週期爲6年）的成長方陣爲

$$G=\begin{bmatrix}0.72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.28 & 0.69 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.31 & 0.75 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.25 & 0.77 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.23 & 0.63 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.37 & 1\end{bmatrix}$$

（M. B. Usher, "A Matrix Approach to the Management of Renewable Resources, with Special Reference to Selection Forests" Journal of Apptied Ecology, 3, 1966, pp. 355～367）。這6組依照其高度順序，售出單價爲

$p_1 = 0$ ，$p_2 = 50$ ，$p_3 = 100$ ，$p_4 = 150$ ，$p_5 = 200$ ，$p_6 = 250$（單位爲美金）。求其最適當穩定伐採應選那一組的樹木，其收益如何？

解　由方陣G可知

$g_1 = 0.28$ ，$g_2 = 0.31$ ，$g_3 = 0.25$ ，$g_4 = 0.23$ ，$g_5 = 0.37$

因此由⒅式可得

$P_2 = 50s / 0.28^{-1} \doteqdot 14.0s$

$P_3 = 100s / (0.28^{-1} + 0.31^{-1}) \doteqdot 14.7s$

$P_4 = 150s / (0.28^{-1} + 0.31^{-1} + 0.25^{-1}) \doteqdot 13.9s$

$P_5 = 200s / (0.28^{-1} + 0.31^{-1} + 0.25^{-1} + 0.23^{-1}) \doteqdot 13.2s$

$P_6 = 250s / (0.28^{-1} + 0.31^{-1} + 0.25^{-1} + 0.23^{-1} + 0.37^{-1})$

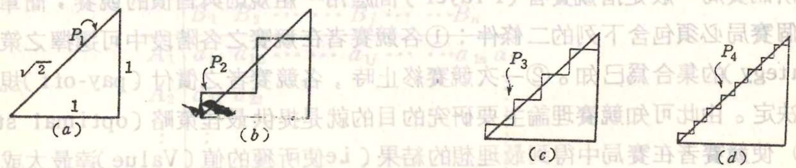
$= 14.0s$

由上面可知$P_3 > P_i$（$i \neq 3$）。因此由定理可知每 6 年將第 3 組的樹全部伐採出售就是最適當穩定伐採方式。其收益爲 \$ $14.7s$（但s爲這森林樹木的總棵數）。

$\sqrt{2} = 2$？

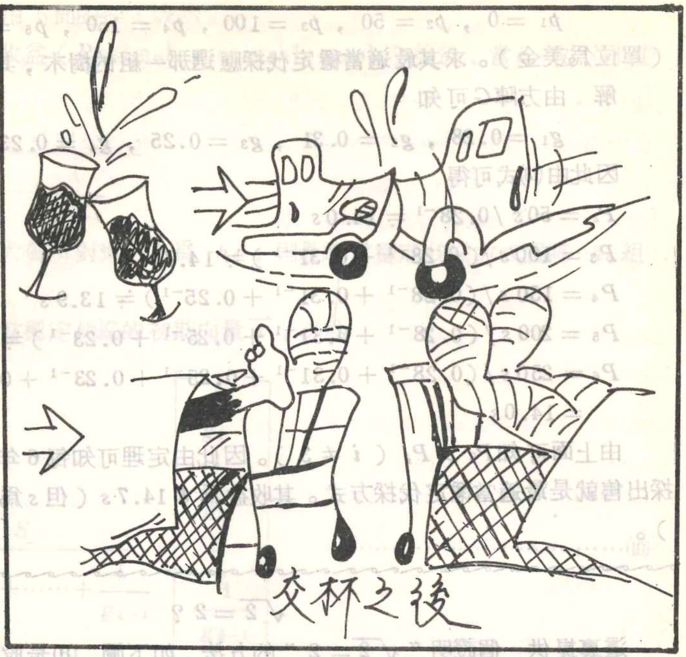
這裏提供一個證明“$\sqrt{2} = 2$”的方法，如下圖，(a)是股長爲 1 的等腰直角三角形，以P_1 表其斜邊；今將 P_1四等分，造如 P_2（(b)圖）的多邊形曲線；再將 P_1 8 等分，造如(c)中的多邊形曲線 P_3；如此繼續下去，得到下面多邊形列：

$P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n, \cdots$直覺上，當$n \to \infty$，$P_n \to P_1$，而 $P_n = 2$，所以$\sqrt{2} = 2$，但眞的是這樣嗎？



競賽理論簡介

指導老師 吳森原
作者 劉獻瑞



競賽策略的情勢（Strategic Situation）在很早就被應用，可是直到1921年才由Emile Borel試圖將其轉化成數學的理論，雖然在1928對局論（game theory）的理論基礎，如大中取小策略（Minimax Strategy）爲 Von Neumann所證，但一直到1944年"Theory and Practice of games and economic behavior"一書出版後對局論才受到廣泛的重視。

所謂賽局一般是指競賽者（Player）間應用一組規則與習慣的競賽；簡單的說，一個賽局必須包含下列的二條件：①各競賽者在競賽之各階段中可選擇之策略（Strategy）的集合爲已知。②一次競賽終止時，各競賽者之償付（pay-off）規則預先已決定。由此可知競賽理論主要研究的目的就是提供最佳策略（optimal strategy）使競賽者在賽局中得到最理想的結果（i.e使所獲的值（Value）達最大或所損失的值爲最少。）

賽局的分類可由下述幾個觀點着手：①由競賽終止時的償付總和。②由參與競賽的人數。③由競賽者可應用的所有策略是有限與否，等區分：

㈠若競賽終止時的償付總和爲零，即得勝者所獲的報酬值等於失敗者所付的值；則稱爲零和競賽（zero sum game）。否則稱爲非零和競賽。

例(1)：A和B兩人各自獨立的擲硬幣以決定輸贏；其規則如下：若同時出現正面或同時出現反面時，則A贏B一元；若擲出的結果是一正一反的情形，則B贏

A一元。今AB兩人同意只玩一次，那麼此競賽的結果爲何？

解：爲討論方便，整個競賽中皆以A之勝負爲準。如此我們可以右表表示題意：

A \ B	正	反
正	1	−1
反	−1	1

其中：1表A贏B一元。

−1表A輸給B一元。

由表中可知，當A贏一元時，B必輸一元；如此償付的總和爲零，所以此賽局爲一零和競賽。

例(2)：如果在一撲克牌的競賽中，每次競賽終止都要抽頭，則輸的錢不等於贏的錢，所以爲一非零和競賽。

(二)若參與競賽只有兩個人，則稱爲二人競賽。若參與競賽者爲三人或三人以上，則稱爲多人競賽。如例(1)就是一個兩人零和競賽。但是在多人競賽中，若競賽者結合成兩個大團體，如此大團體可視爲一個個體，所以可簡化成兩人的競賽。如下面的例(4)，在戰爭中各方的策略是由將軍或統帥所決定的；故可視爲兩統帥間的兩人競賽。

(三)若各競賽者之策略之集合均爲有限時稱此競賽爲有限競賽；否則稱爲無限競賽。當然例(1)是一個有限競賽。

在例(1)的表中，是表示賽局所有可能的結果；爲討論方便我們以矩陣M表示，

$$即\quad M=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

又因爲表是以A的觀點，所以我們在矩陣M前加上(A)予以區別。我們稱此矩陣爲償付矩陣(pay-off matrix)，且記此競賽爲2×2競賽。

若我們考慮一個$m\times n$的競賽，假設我方的償付矩陣如下：

$$\begin{array}{c|llllll}
 & B_1 & B_2 \cdots & \cdots B_j \cdots & \cdots B_n & \\
\hline
A_1 & a_{11} & a_{12}\cdots & \cdots a_{1j}\cdots & \cdots a_{1n} & \alpha_1 \\
A_2 & a_{21} & a_{22} & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots \\
A_i & a_{i1} & & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots \\
A_m & a_{m1}\cdots & \cdots & \cdots & \cdots a_{mn} & \alpha_m \\
 & \beta_1 & \beta_2\cdots & \cdots \beta_j \cdots & \cdots \beta_n &
\end{array}$$

我們以A_i、$i=1,2,3\cdots\cdots,m$表示我方之策略，以B_j，$j=1,2,\cdots,n$表示對方的策略，因此，當我們選擇A_i 策略時，對方對照着此表必定可找到B_j 策略，使我方的戰果a_{ij} 爲最小值。我們將第i列的a_{ij} 中的最小值以α_i表示：

卽：　$\alpha_i = \min_j a_{ij}$ ……………………(1)

其中 $\min_j$ 表示對某一固定 i 所有可能使 a_{ij} 爲最小値的 j 値，所以在敵我都一樣聰明的情況下，我們必須選擇一 A_i 使 α_i 的值最大，我們以 α 表示：

卽：　$\alpha = \max_i \alpha_i$ ……………………(2)

由(1)(2)可得　$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$

由此可知，α 是表示我們所得結果最小値中的最大値。稱此 α 爲極大極小值（Maximin），而 A_i 則稱爲極大極小値策略（Maxi min strategy）。同樣的，對方若想減低我方的結果至最小，那麼，他必須由他的觀點考慮如何去使他有最佳的結果；假設 β_j 表示在策略 B_j 下我方所能獲得的最大結果。

卽：　$\beta_j = \max_i a_{ij}$

再設 β 爲 β_j 的最小值：　卽　$\beta = \min_j \beta_j$

考慮　$\beta = \text{Minmax}_{j\ i}\ a_{ij}$

我們稱 β 爲極小極大值（Minimax），表示對方損失最大値中的最小値。此時的 B_j 卽稱爲極小極大値策略（Minimax strategy）。顯然，若我方採用極大極小値策略，則不論對方如何行動都可保證我方的結果不小於 α，同理，若對方採取極小極大値策略，不論我方採用何種策略則對方保證所輸的不超過 β。那麼，在所有的競賽中，是不是極小極大値與極大極小値都相等呢？有可能極小極大値與極大極小值不相等。（請看下面例(6)）；若兩值相等，則稱此競賽有鞍點（saddle point）存在，且鞍點的位置就在兩值所對應的極小極大値策略及極大極小値策略上；我們又稱這種策略爲最佳策略（optinal strategy）。

在競賽理論上，有這麼一個定理：任何一個雙方都能知道每一行動的結果〔稱之爲完全情報（Complete infor mation）〕的賽局都有一個鞍點，也就是說有確定的解答——存在一種最佳策略。這定理我們不打算證明（若有興趣可參考 Guillermo·owen 所著的 Game theory）只舉些例子加以說明：

例(3)：二人輪流在一個光滑的圓桌上放置同樣大小的銅板（已放過銅板的上面不能再放置），誰能在桌上擠上最後一個銅板者爲勝。

解：這個競賽的結果是預先決定了，而且存在一個不變的最佳策略，使最先開始的一方得勝，因爲他只要先放一個銅板在圓桌中心，以後無論對方擺在那裏，他

只須擺在與對方相稱的那一點即可，如此下去，勝利一定屬於他的。

例(4)：我方佈置有三種不同的防空高射炮—A_1、A_2、A_3；對方有三種不同的飛機：B_1、B_2、B_3，若用高射炮A_1射中敵機B_1、B_2、B_3的機率分別爲0.7、0.6、0.4；A_2高射炮則爲0.6、0.6、0.7；A_3高射炮則爲0.6、0.4、0.7。試求出敵我兩方的最佳策略。

解：根據題意，我方可做出一個償付矩陣如下：

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.6 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 0.4 \\ 0.6 \\ 0.4 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 0.7 & 0.6 & 0.7 \end{array} & \end{array}$$

其中每一元素a_{ij}代表以高射炮A_i擊中敵機B_j的機率。

則根據極大極小値α可得：$\alpha=0.6$

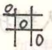
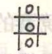
極小極大値β可得：$\beta=0.6$

由$\alpha=0.6=\beta$，可知本題存在鞍點於(A_2，B_2)。也就是說我方採用A_2高射炮最少有0.6的機率擊落敵機，而對方選用B_2飛機最多有0.6的機率被我擊中。所以本題的最佳策略爲(A_2，B_2)。

例(5)：記得小時候常玩“劃○×”的遊戲，其規則是這樣：

①在紙上劃一井字使其間有九個空格。

②競賽者可選擇任一符號(通常是○或×)在九格中任一格記上自己的符號，一次一個，而兩人輪流下去，且一經取用的符號在競賽中不可更換。

③以競賽者先在此九格中相聯三個自己的符號者爲勝。(例如：，，……等等)

解：本題可以算是完全情報的兩人競賽。因此有鞍點存在，爲討論方便起見我們將格子標上1 2 3……9等號碼，雖然，先開始的一方有機會得勝，可是，本題的值是零，意思是說，同樣聰明的兩個人，他們競賽的結果是和平。因爲當先開始的一方在1或3或7或9劃上記號時，對方只能在5處做另一記號否則必會輸。(信不信由你)

1	4	7
2	5	8
3	6	9

同樣的有許多例子是屬於完全情報的，如西洋棋、拈(Nim)……等等，亦存在鞍點，只是可能的情形太多，難以造成矩陣和找出鞍點。(註：橋牌並非爲完全情報的競賽)

以上我們所討論的例子，多屬有鞍點的(除例(1)、(2)外)所以在策略的選取上很單純，只要找出最佳策略而緊守並不隨時改變策略；如此的選取法我們稱之爲單純策略(Pure strategy)，但如例(1)中，兩方策略的選取是隨機性的，如此除了應用單純策略外，再以機率方式隨意混合選取策略，以達到所期望的最好結果，稱之爲混合策略(mixed strategy)。

例(5)：繼續解例(1)的問題，現今規定每一競賽者的混合策略；A選取正面的機率爲x_1，反面的機率爲x_2，B選正面的機率爲y_1，反面的機率爲y_2。因爲每一個競爭者的機率和爲1，所以$x_1+x_2=1$，　$y_1+y_2=1$

假設A或B所採用的最佳混合策略使這一零和競賽的競賽值爲v，ie, 當A用最佳策略時保證不會少於v，我們將例(1)中所討論的轉換成數學模式（線性規劃的方法）可得：　對A而言：　求 $\max \quad v = ?$

$$
\begin{aligned}
\text{受制於：}\quad & x_1 - x_2 \geq v \\
& -x_1 + x_2 \geq v \\
& x_1 + x_2 = 1 \\
& x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

其中，$x_1 - x_2 \geqslant v$ 或 $-x_1 + x_2 \geqslant v$ 表祇競賽者A與B所選取的策略對抗時A的數學期望值。其求法爲：

$$
(\ x_1\ ,\ x_2\ )\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

由此線性規劃問題解得　$x_1 = 1/2$，$v = 0$，$x_2 = 1/2$

同理對B而言亦解得：　$y_1 = 1/2$，$v = 0$，$y_2 = 1/2$

可知在例(1)擲銅板的競賽中是相當公平的。且最佳策略也就是擲銅板所得的機率。

最後，我們介紹幾個較複雜的例子以供參考。

例(6)：在一次博覽會中；有這麼一個競賽的攤位，規則是這樣的：遊客與主持競賽的人對抗，他們每人手上都有三張牌。他有一張鑽石么點，一張梅花么點與一張鑽石二點。遊客也有一張鑽石么點（以1D表示），一張梅花么點（以 1c 表示），但遊客的第三張是梅花二點（以 2c 表示）。他們每人在自己手上抽出一張牌，同時亮給對方看。如果兩張牌花色不一樣遊客贏，反之他贏。如果兩張牌都是二點，則無輸贏。同時以獲勝人手上牌的點數爲輸贏錢數。請問，這牌局公平嗎？試分析其結果。

解：這是一個兩人零和競賽，每個競賽者有三種可能策略，設主持人是求最大值的競賽人。而遊客是求最小值的競賽人。可得償付矩陣如下：

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 1.D & 1.C & 2.C\ (\text{遊客}) \\
\hline
1.D & 1 & -1 & -2 \\
1.C & -1 & 1 & 1 \\
2.D & 2 & -1 & 0
\end{array}
\Rightarrow
\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

（主持人的策略）

分析可知，主持人永不會出1D，因爲他出2D的收入可以更好。所以他眞正的是作下列簡化的（ 2 × 3 ）競賽。

$$
\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

同樣的，遊客也不會出2C，所以這個競賽最後簡化爲（ 2 ×2 ）競賽。

$$i.e,\quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

設主持人使用 $1C$ 和 $2D$ 的機率為 x_1，x_3（此時 $x_1=0$）所以可化成線性規劃問題：

$$
\begin{array}{ll}
\text{求} & \max\ v=? \\
 & -x_2+2x_3 \geq v \\
 & x_2-x_3 \geqslant v \\
 & x_1+x_3 = 1 \\
 & x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0 \\
\text{以} & x_3 = 1-x_2 \\
\Rightarrow & -3x_2-v \geqslant -2 \\
 & 2x_2-v \geqslant 1 \\
 & 0 \leq x_2 \leq 1
\end{array}
$$

解得最佳策略為 $x_2=3/5$ 與 $v=1/5$。所以競賽值為 $1/5$，如果他永不使用 $1D$，使用 $1C$ 的機率為 $3/5$，使用 $2D$ 的機為 $2/5$，則每次的期望值為 $1/5$，所以這競賽是不公平的，有利於主持人。

例(7)：一樁重大案件的兩個共同嫌疑犯被抓住了而被分開審訊。如果兩人都不承認的話，則警方因沒有證據不能判以重刑，但也不甘心把他們白白放走，所以可能找個妨害公務或私藏武器的罪名把兩人都判一年監獄。如果一個承認而另一個否認，則警方因需要用招供者作證人而不控告他，但不招者則被判二十年牢。如果兩個都招供則各判五年。如果嫌疑犯祗考慮自己的利益的話，則究竟應不應該承認？

解：由題意得知，本題為非零和競賽，且可表為：

		承認	否認（乙犯）
甲犯	承認	（5年，5年）；	（自由，20年）
	否認	（20年，自由）；	（1年，1年）

同時在本題找不到鞍點。但對任一個犯人而言。不管另一個犯人採用何策略，他都承認比較好。譬如就甲犯而言，如乙犯承認，則甲犯承認須坐5年牢，否認須判20年牢，當然應該承認；如乙犯否認，則甲犯承認可得自由，否認須坐1年的牢，也以承認為佳。同理對乙犯而論也是如此。所以兩人為了本身的利益都認了罪，雙雙被判5年。可是這並不是合理的答案，因為有另一個答案，即兩人都否認時兩人都得較佳的結果。是不是因為沒有討論機會而造成的呢？並不全然，如果他們被允許討論，當然雙方都會同意一致否認。但是在最後關頭時，又會變成怎樣呢？會不會

擔心自己被出賣了而違背協定呢？有人認爲在兩個鄰店循環減價以搶顧客的情況，應該以建立長期合作彼此有利的基礎。然而你認爲呢？

參考資料：

1. Adams & Gemirz & Quintas："Elements of linear program"。
2. Guillermo & Owen：Game theory。
3. 趙慎餘：博戲的理論與應用；台灣中華書局。
4. 鄭隆輝：線型計劃與對局理論；徐氏出版社。
5. 兀厚高：線性規劃學隅；徐氏出版社。
6. 黃光明：作業研究，科學月刊社。
7. 姚景星、劉睦雄：賽局淺說；數學傳播季刊，第一卷，第三期。

田忌賽馬

中國戰國時候，有一回，齊王和田忌賽馬，雙方都有上等馬、中等馬和下等馬三種。比賽分三場進行，誰勝誰就得到一千金的賭注。

開始時，雙方都用同等級的馬比賽，可是田忌的馬都比齊王同一級的馬差，這樣同等級的馬比賽下來，田忌都輸了。當時，田忌的朋友給他出了一個主意，叫田忌用下馬對齊王的上馬，用上馬對齊王的中馬，用中馬對齊王的下馬。這樣，除了在下馬對上馬的第一場比賽中田忌輸了以外，其餘兩場比賽都勝利了。結果是2：1。

田忌的朋友出的這個好主意，實際上也是一個數學問題，他是通過數學運算，找到能夠得勝的賽馬辦法的。如下圖

		（齊	王）	
		上	中	下
（田	上	×	○	○
	中	×	×	○
忌）	下	×	×	×

（×表田忌輸，○表田忌贏）

從賽局論談到決策理論

李孟峰

——本文作者為67級系友，現就讀於師大數研所——

今天"統計"是一個大家所常見的名詞，但是它的實際意義却經常被誤解，以為只是在報章、雜誌上出現的一些數字、圖形而已；事實上，大部份的統計學者定義統計為「在不確定情況下做決策的方法」；以統計方法處理問題，大致可分為下列五個步驟：

1. 確立母體——被調查事物(或人)全體稱為母體(population)。
2. 進行抽樣——由事先設計的抽樣方法對母體進行抽樣。
3. 調查資料——對所取得的樣本調查統計者所需的資料。
4. 分析資料——整理獲得的資料，如計算平均數、標準差……等。(此即一般所謂的敍述統計)。
5. 統計推論——尋找最佳決策來估計母數(parameter)，並做檢定。

統計問題始於一個不確定的問題，終於統計推論，如果要這個推測具有相當程度的可靠性，不僅要抽樣和調查資料的方法得當外，決策的好壞亦有舉足輕重的地位，如果沒有一個好的決策法則，所有的努力都將功虧一簣了！

統計的決策理論(Decision Theory)乃是由對局論(Game Theory)所導出，賽局論是豐富數學遺產的一部份，由本世紀著名的數學家 John von Neuma 所留下，雖然早在1921年Emil Borel首先提出對局論，但是J. Neumann 在1927年發表「有限對局論的minmax定理」的證明，奠定了對局論的基礎。

1944年J. Neumann 和Oskar Morgenstern 合作出版了「Theory of Games and Economic Behavior」一書，賽局論遂舉世重視。幾乎在同時統計上的理論，經由J. Neyman和Egon Pearson 發表一系列的論文而給予逐漸嚴密的數學基礎。然而首先發現賽局論與統計理論的關聯者却是Abraham Wald ，他並且將賽局論應用到決策理論上。

一個賽局的形成，必須有下列三個條件：①至少兩人參與競賽。②各方都要有兩種以上非等價的策略可供選擇。③各方都要以獲得最大利益（也就是取得最小損失）爲依歸。如果各方輸贏之代數和爲零（也就是沒有人從中抽成，贏方的總利益等於輸方的總損失）稱之爲計零賽局（zero-sum game）。

〔例1〕甲乙兩人猜拳，拳法爲剪刀、石頭、布，兩人言明輸贏每次一元，相同時無勝負，則此賽局可表成：

	乙方 a_1：剪刀	乙方 a_2：石頭	乙方 a_3：布
甲方 θ_1：剪刀	0	−1	1
甲方 θ_2：石頭	1	0	−1
甲方 θ_3：布	−1	1	0

此即爲一兩人計零賽局。我們可從兩人中選一人甲爲強競賽者（maximing player）或稱爲列競賽者（row player），另一人乙爲弱競賽者（minzing player）或稱行競賽者（column player），以ℓ_{ij}表示甲選擇策略θ_i，乙選擇策略a_j時，乙付給甲的賠付，$\ell_{ij}>0$ 時表示乙付給甲，$\ell_{ij}<0$ 時表示甲付給乙。如果甲有m種策略，乙有n種策略可供選擇，則（ℓ_{ij}）形成一個m×n矩陣$L=(\ell_{ij})$稱爲賠付矩陣。藉著這個賠付矩陣，與賽一方可以預測對方的策略以決定自己的策略，達到獲得最大利益（或取得最小損失）的目的。

現在以一個例子說明與賽者如何決定其策略；甲乙兩人賽局·賠付矩陣如下：

	乙方 a_1	乙方 a_2	乙方 a_3
甲方 θ_1	−4	−3	1
甲方 θ_2	3	4	2
甲方 θ_3	6	2	−1

從這個賠付矩陣中，很明顯的可以看出甲若採策略θ_2，最少可獲得2的利益，若採θ_3 雖最大可獲得6的利益，但也有損失1的可能，故在最保險的原則下，甲必採θ_2 策略，也就是甲先考慮各種策略所獲得的最小利益，再選取其中的最大者：（小中取大）

$$\text{甲}\quad \begin{aligned} \theta_1 &: \min_j \ell_{1j} = -4 \\ \theta_2 &: \min_j \ell_{2j} = 2 \quad \Rightarrow \max_i \min_j \ell_{ij} = \ell_{23} = 2 \\ \theta_3 &: \min_j \ell_{3j} = -1 \end{aligned}$$

同理，可以看出乙若採策略a_3 至多損失2，若採策略a_1雖有獲利4的機會，但却也有損失6的機會，故在最保險的原則下，乙必採用a_3 策略，也就是乙先考慮各種策略所造成的最大損失，再選取其中的最小者：（大中取小）：

$$\text{乙}\quad \begin{aligned} a_1 &: \max_i \ell_{i1} = 6 \\ a_2 &: \max_i \ell_{i2} = 4 \quad \Rightarrow \min_j \max_i \ell_{ij} = \ell_{23} = 2 \\ a_3 &: \max_i \ell_{i3} = 2 \end{aligned}$$

因此在此賽局中，甲固定採策略θ_2，乙固定採策略a_3爲最適決策法則（Optimal decision rule），且每賽局一次乙付給甲2的賠付。

〔定義1〕在一賽局中，若甲有m種策略θ_1，θ_2，……，θ_m，乙有n種策略a_1，a_2，……，a_n，且$L=(\ell_{ij})\ 1\leq i\leq m$，$1\leq j\leq n$爲其賠付矩陣。若$\exists\ 1\leq r\leq m$，$\ni \min_j \ell_{rj} = \max_i \min_j \ell_{ij}$ 稱θ_r爲max-min；若 $1\leq k\leq n$，$\max_i \ell_{ik} = \min_j \max_i \ell_{ij}$時稱$a_k$爲min-max；若$\max_i \min_j \ell_{ij} = \max_i \min_j \ell_{ij} = \ell_{rk}$ 時，稱爲ℓ_{rk} 爲鞍點。

在一個有鞍點的賽局中，θ_r 及a_k分別爲雙方之最適策略，且每對局一次乙付給甲ℓ_{rk}之賠付。這種雙方均採固定策略稱爲單純策略（pure strategy）。

在大部份的賽局中鞍點並不存在，如例1中的賽局

$$-1 = \max_i \min_j \ell_{ij} \neq \min_j \max_i \ell_{ij} = 1$$

所以這個賽局無鞍點存在。在這種情況之下，任何一個單純策略都不是最適策略，因此可以考慮將各種策略，依特定機率交互混合運用以期獲得最大利益（或最小損失）。如果甲採用策略θ_1，θ_2……，θ_m的機率分別爲x_1，x_2，……x_m，其中$0\leq x_i\leq 1$，$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$，乙採用策略a_1，a_2，……，a_n 的機率分別爲y_1，y_2，

……，y_n，其中$0 \leq y_j \leq 1$，$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$，則以向量$X = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m)$ $Y = (y_1, y_2, \cdots\cdots, y_m)$分別表甲乙所採用的混合策略(mixed strategy)。當甲採用單純策略θ_i，乙採用混合策略Y時，甲獲利之期望值爲$\sum_{j=1}^{n} \ell_{ij} y_j$，故甲若採用混合策略$X$，乙採用混合策略$Y$時，甲獲利之期望值爲$\sum_{i=1}^{m} x_i (\sum_{j=1}^{n} \ell_{ij} y_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \ell_{ij} y_j$。

$$E(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \ell_{ij} y_j = [x_1, x_2, \cdots\cdots x_m] \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \cdots\cdots & \ell_{1n} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \cdots\cdots & \ell_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ell_{m1} & \ell_{m2} & \cdots\cdots & \ell_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

同樣的$E(X, Y)$也是甲乙分別採用混合策略X，Y時，乙所受損失之期望值。

在兩人無鞍點的賽局中，甲（強競賽者），選擇最適策略時仍先考慮以混合策略X對抗乙的任一種單純策略a_j的最小利益（即$\min_j E(X, a_j)$），再找出混合策略X^*，使得$\min_j E(X^*, a_j) = \max_X \min_j (X, a_j) = v$，因此只要甲採用混合策略$X^*$，至少可獲利益$v$。〔註：在甲採用淨合策略$X$時，我們只需對乙的所有單純策略找$\min_j E(X, a_j)$，而不必對所有混合策略$Y$求$\min_y E(X, Y)$，因若$a_k$，

$E(X, a_k) = \min_j E(X, a_j)$，則$E(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \ell_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} x_i \ell_{ij}) y_j$

$= \sum_{j=1}^{n} y_j E(X, a_j) \geqslant \sum_{j=1}^{n} y_j E(X, a_k) = E(X, a_k)(\sum_{j=1}^{n} y_j) = E(X, a_k)$，所以$E(X, Y) \geqslant E(X, a_k)$即$\min_Y E(X, Y) \geqslant \min_j E(X, a_j)$。〕，同樣的乙必選擇混合策略$Y^*$，使得$\max_i E(\theta_i, Y^*) = \min_Y \max_i E(\theta_i, Y) = \mu$，而其損失決不超過$\mu$。如果存在$X^*$，$Y^*$，使得$\max_X \min_j E(X, a_j) = \min_Y \max_i E(\theta_i, Y) = E(X^*, Y^*) = \mu = v$，於是我們稱$v (= \mu)$爲廣義鞍點(generalized saddle point), 在這種情況下，甲的最適策略爲X^*, 乙的最適策略爲Y^*, 每賽局一次乙付給甲 v 的賠付。至於X^* 與Y^*之求法，由以上的討論中知X^*，Y^* 爲下列不等式組的解：

$$\begin{cases} E(X, a_j) \geqslant v \\ x_i \geqslant 0 \quad 1 \leq i \leq m \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ E(\theta_i, Y) \leqslant v \\ y_j \geqslant 0, 1 \leq j \leq n \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \end{cases}$$

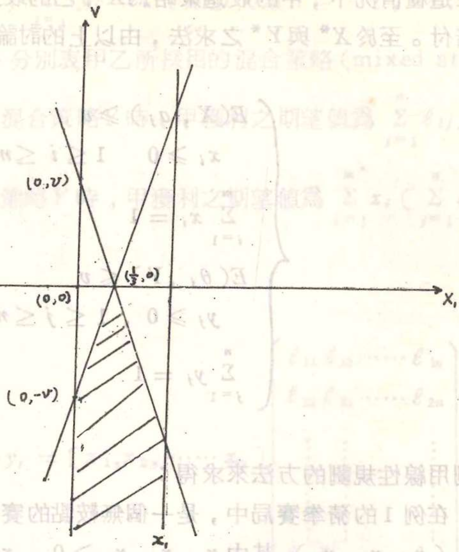
我們可以利用線性規劃的方法來求得：

〔例 2〕在例 1 的猜拳賽局中，是一個無鞍點的賽局，假設甲採用混合策略$X = (x_1, x_2, x_3)$, 其中$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$，$x_1 + x_2 + x_3 = 1$ 得下列不等式組：

$$\begin{cases} x_2 - x_3 \geqslant v & (1) \\ x_3 - x_1 \geqslant v & (2) \\ x_1 - x_2 \geqslant v & (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 & (4) \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll} & (1)+(4) & x_1 + 2x_2 \geqslant 1 + v & (5) \\ \Rightarrow & -1 \times (4) + (2) & -2x_1 - x_2 \geqslant v - 1 & (6) \\ & & x_1 - x_2 \geqslant v & (3) \\ & (5) + 2 \times (6) & -3x_1 \geqslant 3v - 1 & \\ \Rightarrow & (5) + 2 \times (3) & 3x_1 \geqslant 3v + 1 & \end{array}$$

由圖可知當 $x_1 = \frac{1}{3}$時，v 取得最大值 $v = 0$, 又因此不等式組爲對稱形式，故得 $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$。同樣的，假設乙採混合策略$Y = (y_1, y_2, y_3)$，其中$y_1, y_2$，$y_3 \geqslant 0$ 且$y_1 + y_2 + y_3 = 1$得不等式組：



$$
\begin{cases}
-y_2+y_3\geqslant v\\
y_1-y_3\geqslant v\\
-y_1+y_2\geqslant v\\
y_1+y_2+y_3=1\\
y_1\ ,\ y_2\ ,\ y_3\geqslant 0
\end{cases}
$$

我們解得 $y_1=y_2=y_3=1/3$ 時，v 得到最小值 $v=0$，因此甲乙雙方之最適策略均爲從剪刀、石頭、布三種策略中以各 1/3 的機率隨機選取使用，又由於 $v=0$，可知每賽局一次，甲的期望利益（即乙的期望損失）爲零，顯然是一場公平的賽局。

統計決策問題可以看成爲兩人計零賽局，不過在兩者之間仍有些不同：一、在統計決策中，統計者扮演弱競賽者的角色，他必須設法去猜中母數之值，母數之值取決於母體，一般稱之爲大自然（Nature），它扮演强競賽者的角色，在兩人賽局中，强競賽者可以選擇適當的策略，以使自己獲得最大利益，即令對方受到最大損失，但在決策問題中，母數之值是固定不變，不因統計者所採的策略不同，而改變數值，使統計者損失最大。二、在賽局中，競賽雙方都事先知道勝負的規則，與輸贏的大小及雙方所可以使用的單純策略，而製造出一個賠付矩陣，預測對方可能採取的策略，據此決定自己的策略。在決策問題中，統計者必須先經過抽樣程序，從母體中選取出一組樣本來分析、預測，顯然比賽局更要複雜了許多！

現在我們將整個決策理論，利用數學結構來說明：

1. 母數空間（parameter, space）——一個非空集合Θ，所有母數的可能值的集合。

2. 樣本空間（sample space）——統計試驗中所有可能的出象（out come）的集合稱爲樣本空間，記成$\mathscr{X}$。同時可得一定義於$\mathscr{X}$上的隨機變數X，以P_θ表對於$\theta \in \Theta$，X的機率測度（probllity measure），〔註，P_θ因θ而變〕，其累積機率分配爲$F(x \mid \theta)$，$x \in X$。

3. 行動空間（action space）——一個非空集合A，所有統計者可使用的行動的集合。

4. 損失函數（loss function）——定義於$\Theta \times \mathscr{A}$上的實值函數，$L(\theta, a)$，表示當母數之眞值爲$\theta$時，統計者採用行動$a$時的損失。

5. 決策函數（decision function）——由樣本空間映至行動空間的函數，$d: \mathscr{X} \rightarrow a$，當試驗的觀察值（observe value）爲$X = x$時，統計者根據$x$選擇行動$d(x) \in \mathscr{A}$，則其損失爲$L(\theta, d(x))$，並以$D$表所有決策函數之集合。

6. 冒險函數（risk, function）——對固定的$\theta \in \Theta$，$L(\theta, d(x))$爲一隨機量（random quantity），定義$R(\theta, d) = EL(\theta, d(x)) = \int L(\theta, d(x)) dF(x \mid \theta)$則$R$爲由$\Theta \times \mathscr{A}$映至 $\boldsymbol{R}$ 的函數，稱爲冒險函數。

7. 隨機決策函數（randomi zed decisi on function）——如果按機率分配δ，混合選取D中的各種決策，則δ稱爲隨機決策函數，若Z爲定義於D上之隨機變數，其機率分配爲δ，定義隨機決策函數δ的冒險函數爲$R(\theta, \delta) = ER(\theta, Z)$。所有使得對任意$\theta \in \Theta$，$R(\theta, \delta)$均存在且有限的隨機決策集合記爲$D^*$。

〔定義2〕如果存在決策函數δ_0，使得$\sup\limits_{\theta \in \Theta} R(\theta, \delta_0) = \operatorname{lng} \sup\limits_{S \in D^*} \sup\limits_{\theta \in \Theta} R(\theta, \delta)$

則稱δ_0爲minmax。

〔定義3〕兩決策函數δ_1, δ_2，若$R(\theta, \delta_1) \leq R(\theta, \delta_2)$，$\theta \in \Theta$，則稱$\delta_1$和$\delta_2$一樣好。若$R(\theta, \delta_1) \leqslant R(\theta, \delta_2)$，$\forall \theta \in \Theta$，且存在一$\theta \in \Theta \ni$ $R(\theta, \delta_1) < R(\theta, \delta_2)$，則稱$\delta_1$較$\delta_2$佳，若$R(\theta, \delta_1) = R(\theta, \delta_2)$ $\forall \theta \in \Theta$，則稱$\delta_1$等價於$\delta_2$。

〔定義4〕一決策函數δ，若不存在其他法則較δ佳，則稱δ爲admissable。

從上面的討論中，我們已經可以將兩個不同的決策函數或稱爲決策法則加以比較，那麼如何選出一個「最好」的決策法則呢？由直覺的推斷，最好的決策法則就是不論母數值θ爲何，利用這個決策法則的冒險比利用其他任一法則的冒險都要小。可是很遺憾的，這麼好的決策法則經常不存在，例如：考慮一個損失函數$L(\theta, a) = (\theta - a)^2$的估計，當$\theta = \theta_0$時，最好的決策法則是不論觀察值$x$爲何，取

$d_0(x) \equiv \theta_0$，但d_0這個決策法則在$\theta = \theta_1$時，就比$d_1(x) \equiv \theta_1$的決策法則差了。所以我們沒有辦法找到決策法則d，能夠有這樣好的性質。不過如果有一決策法則能具有minmax和admissiable性質，就已經是一個優良的決策法則，至於如何尋找同時是minmax和admissable的決策法則，以及如果不存在同時是minmax和admissible的決策法則時，應如何選擇一個較適當的法則，就是「決策理論」中的課題了。

參考書籍

1. Mathematical Statistice：A Decision Theoretic Approach By Ferquson.
2. 統計學原理　陳超塵編著
3. 作業研究　黃光明編著，科學月刊社印行

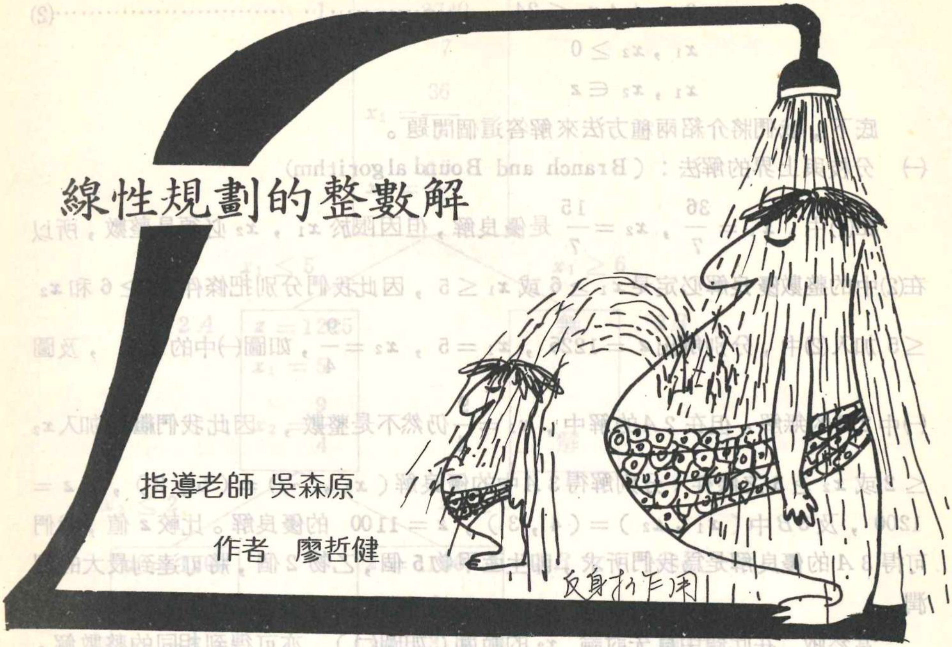
握手寒喧

新年夜，家裏開了宴會，一時賓客如雲，握手寒喧喝茶談天。漸漸地，大家圍住了阿拓，要他出個新鮮的題目，讓大家想想。

阿拓說：「今天來了很多人，大家握手的次數都不少。如果凡是握了奇數次數手的人都站在右邊，握了偶次數手或沒握過手的人都站到左邊去。我敢跟大家打賭：右邊的人數一定是偶數。」

你敢跟他打賭嗎？為什麼？

其實很簡單，因每握一次手，雙方各增加一次，由此可知總次數一定為偶數。答案就很明顯了。從另一個角度來看，把每一個人看成空間一點，兩個人每握一次手就用一條曲線連接起來，就成了網路了。在一個網路中，如果從某一點出發的曲線有偶數條，叫偶數點，如果有奇數條，就叫奇數點。由上面的討論可得到網路理論中一個很重要的關鍵——每一個網路中，奇數點的個數永遠是偶數。



線性規劃的整數解

指導老師 吳森原

作者 廖哲健

某工廠欲生產甲，乙兩種物品，已知生產甲物每件需成本500元，6小時才能完成，生產乙物需成本 200 元，8小時才能完成，而甲物的利潤爲200元，乙物的利潤爲100元。今有資本300元，欲在48小時內製造出甲乙兩物以得最大利潤，問應如何進行，才能達到最大利潤！

依題意，我們若將此問題用線性規劃來處理，設 x_1 代表甲物的生產量，x_2 代表乙物的生產量，則可改寫如下：

$$
\begin{aligned}
&\text{求}\quad \max\ z = 200x_1 + 100x_2 \\
&500x_1 + 200x_2 \leq 3000 \\
&6x_1 + 8x_2 \leq 48 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\
&x_1\ ,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

據此，我們不難解出 $(x_1, x_2) = \left(\frac{36}{7}, \frac{15}{7}\right)$，$z = \frac{8700}{7}$ 爲優良解。但是，我們決不可能生產 $\frac{1}{7}$ 個就可達到銷售的目的，所以我們要加個條件，即 x_1，x_2 都必須是整數，據此，我們再改寫如下：

$$
\begin{aligned}
&\text{求}\quad \max\ z = 200x_1 + 100x_2 \\
&5x_1 + 2x_2 \leq 30
\end{aligned}
$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 24 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

$$x_1 , x_2 \in z$$

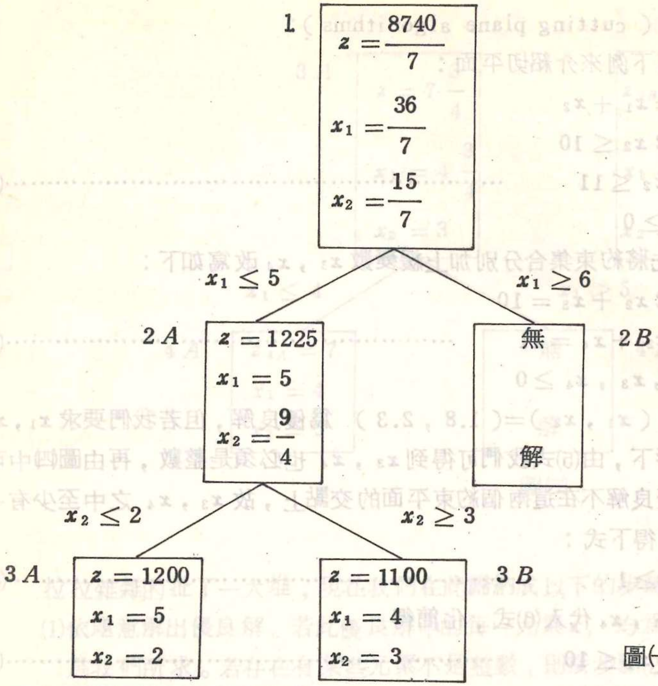
底下，我們將介紹兩種方法來解答這個問題。

(一) 分枝與上界的解法：（Branch and Bound algorithm）

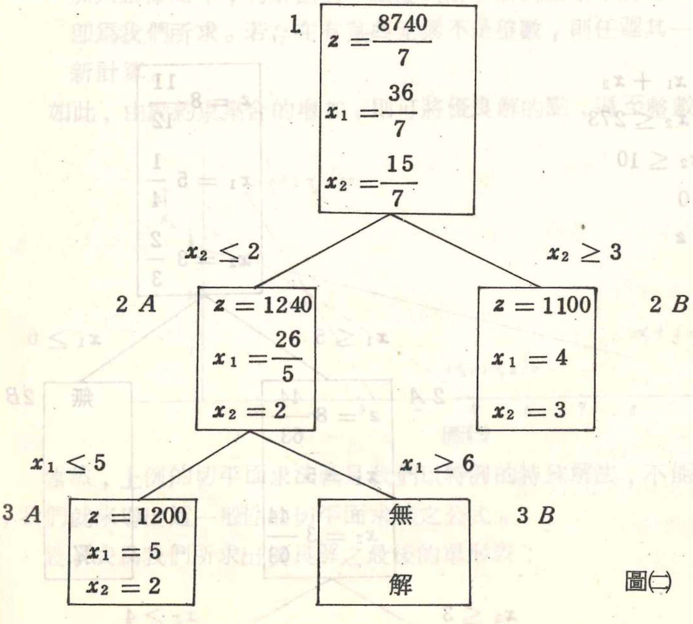
在(1)中，$x_1 = \frac{36}{7}$，$x_2 = \frac{15}{7}$ 是優良解，但因限於 x_1，x_2 必須是整數，所以在(2)中的整數優良解必定是 $x_1 \geq 6$ 或 $x_1 \leq 5$，因此我們分別把條件 $x_1 \geq 6$ 和 $x_2 \leq 5$ 加入(2)中，分別解出 $z = 1225$，$x_1 = 5$，$x_2 = \frac{9}{4}$，如圖(一)中的 $2A$，及圖(一)中 $2B$ 的無解。但在 $2A$ 的解中，$x_2 = \frac{9}{4}$ 仍然不是整數，因此我們繼續加入 $x_2 \leq 2$ 或 $x_2 \geq 3$ 之條件，分別解得 $3A$ 中的優良解（x_1，x_2）=（5，2），$z = 1200$，及 $3B$ 中（x_1，x_2）=（4，3），$z = 1100$ 的優良解。比較 z 值，我們可得 $3A$ 的優良解是爲我們所求，卽生產甲物 5 個，乙物 2 個，將可達到最大的利潤。

當然啦，在此題中首先討論 x_2 的範圍（如圖(二)），亦可得到相同的整數解。或許，在圖(二)中，當我們做到 $2B$ 時會以爲（x_1，x_2）=（4，3），$z = 1100$ 是我們所求的優良解，因此，我們要注意到一點：當樹（tree）的節點（node）之目的函數值大於已求出的優良解時，則必須繼續演練下去，直到其無解或得到另一組優良解爲止。我們可據此得到一個結論：

當樹中已解出一組優良解，而其他節點的目的函數值已小於此優良解，則此優良解卽爲所求（如圖(三)中，$z_{3B} = 6\frac{5}{8} < z_{4A} = 7$，$\therefore 3B$ 可以不必再行計算下去）。


1
z = 8740/7
x1 = 36/7
x2 = 15/7
x1 ≤ 5
x1 ≥ 6
2 A
z = 1225
x1 = 5
x2 = 9/4
2 B
無 解
x2 ≤ 2
x2 ≥ 3
3 A
z = 1200
x1 = 5
x2 = 2
3 B
z = 1100
x1 = 4
x2 = 3

圖(一)


1
z = 8740/7
x1 = 36/7
x2 = 15/7
x2 ≤ 2
x2 ≥ 3
2 A
z = 1240
x1 = 26/5
x2 = 2
2 B
z = 1100
x1 = 4
x2 = 3
x1 ≤ 5
x1 ≥ 6
3 A
z = 1200
x1 = 5
x2 = 2
3 B
無 解

圖(二)

㈡切平面的解法（ cutting plane algorithms ）:

首先，我們以下例來介紹切平面：

求 $\max z = x_1 + x_2$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 11 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

在(4)中，我們先將約束集合分別加上緩變數 x_3，x_4 改寫如下：

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 11 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

利用單形法解得（x_1，x_2）=（1.8，2.3） 為優良解，但若我們要求 x_1，x_2 都必須是整數的情形下，由(5)式我們可得到 x_3，x_4 也必須是整數，再由圖㈣中可知我們所求的整數優良解不在這兩個約束平面的交點上，故 x_3，x_4 之中至少有一不為零，所以我們可得下式：

$$x_3 + x_4 \geq 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

現在將(5)式中 x_3，x_4 代入(6)式，化簡得

$$3x_2 + 2x_1 \leq 10 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

將(7)式加入(4)中，解得（x_1，x_2）=（2，2） 即為我們所求的整數優良解。而這新加入的約束集合 $3x_2 + 2x_1 \leq 10$，即我們所謂的切平面。（圖㈣中虛線部分）

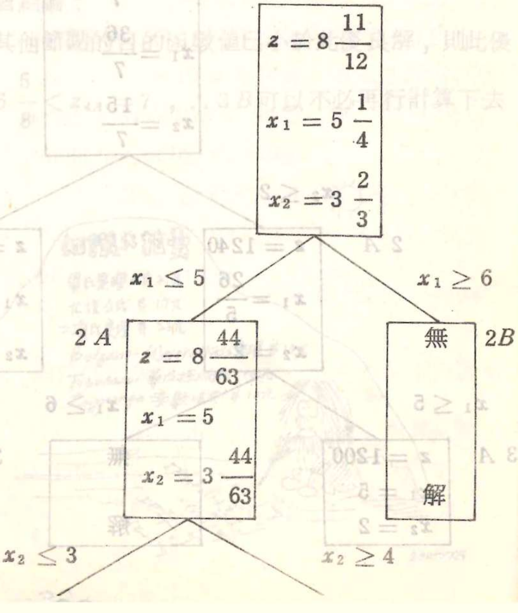
求 $\max \ z = x_1 + x_2$

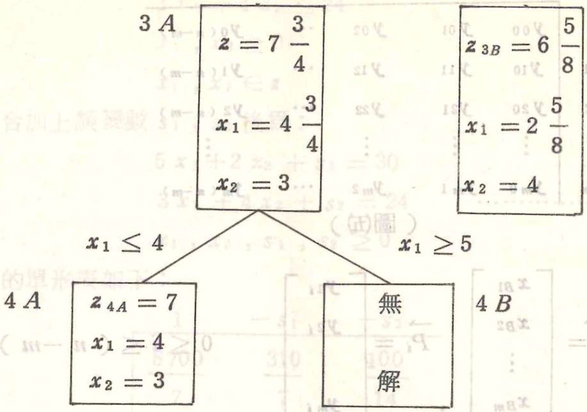
$$8x_1 + 63x_2 \leq 273$$

$$4x_1 - 3x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in z$$





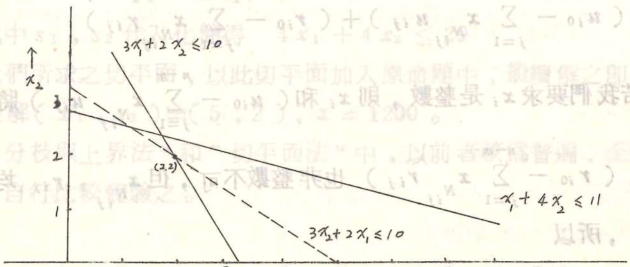
圖(三)

拉拉雜雜的扯了一大堆，現在我們在此歸納成以下的步驟：

(1)依題意解出優良解。若此優良解中的每一元素 x_j 均爲整數，則此優良解卽爲我們所求。若存在有某些元素不是整數，則接步驟(2)。

(2)設 $I_1 < x_j < I_2$，$I_1, I_2 \in z$，則我們將條件 $x_j \leq I_1$ 及 $x_j \geq I_2$ 分別加入原命題中，再解出另一組優良解。若此組解中的每一元素均爲整數，則卽爲我們所求。若存在有某些元素不是整數，則任選其一元素，按步驟(2)重新計算。

如此，由於約束集合的增加，則可將優良解的點，逼至整數點。



圖(四)

當然，上例的切平面求法祇是我們以特例的特殊解法，不能適用於一般。以下，我們就來導出這一般性的切平面求法之公式。

設下表爲我們所求出優良解之最後的單形表：

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -x_{N_1} & -x_{N_2} & \cdots & -x_{N_{n-m}} \\
\hline
z & y_{00} & y_{01} & y_{02} & \cdots & y_{0(n-m)} \\
x_{B1} & y_{10} & y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1(n-m)} \\
x_{B2} & y_{20} & y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2(n-m)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
x_{Bm} & y_{m0} & y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{m(n-m)}
\end{array}
$$

（圖㈤）

令

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{bmatrix}, \quad \vec{P_i} = \begin{bmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \vdots \\ y_{mi} \end{bmatrix} \qquad 0 \le i \le (n-m)$$

則 $\vec{x} = \vec{P}_0 - x_{N_1}\vec{P}_1 - x_{N_2}\vec{P}_2 - \cdots - x_{N_{n-m}}\vec{P}_{n-m}$

$$= \vec{P}_0 - \sum_{j=1}^{n-m} x_{N_j}\vec{P}_j$$

$$\therefore x_i = P_{i0} - \sum_{j=1}^{n-m} x_{N_{ij}} P_{ij}$$

設 $P_{i0} = u_{i0} + r_{i0}$，u_{i0}，$u_{ij} \in z$

$P_{ij} = u_{ij} + r_{ij}$，$0 \le r_{i0}$，$r_{ij} < 1$

則 $x_i = (u_{i0} + r_{i0}) - \sum_{j=1}^{n-m} x_{N_{ij}} (u_{ij} + r_{ij})$

$$= (u_{i0} - \sum_{j=1}^{n-m} x_{N_{ij}} u_{ij}) + (r_{i0} - \sum_{j=1}^{n-m} x_{N_{ij}} r_{ij})$$

現在，若我們要求 x_i 是整數，則 x_i 和（$u_{i0} - \sum_{j=1}^{n-m} x_{N_{ij}} u_{ij}$）將都會是整數，如此一來，（$r_{i0} - \sum_{j=1}^{n-m} x_{N_{ij}} r_{ij}$）也非整數不可，但 $x_{N_{ij}}$，r_{ij} 均爲正數，而 $0 \le r_{i0} < 1$，所以

$$r_{i0} - \sum_{j=1}^{n-m} x_{N_{ij}} r_{ij} \le 0 \qquad \cdots\cdots(8)$$

(8)式即爲我們所求切平面的公式。

今我們以例題說明如下：

求　$\max\ z = 200x_1 + 100x_2$

$$
\begin{aligned}
5x_1 + 2x_2 &\leq 30 \\
3x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\
x_1\ ,\ x_2 &\geq 0 \\
x_1\ ,\ x_2 &\in z
\end{aligned}
$$

將約束集合加上緩變數 s_1 , s_2 後爲：

$$
\begin{aligned}
5x_1 + 2x_2 + s_1 &= 30 \\
3x_1 + 4x_2 + s_2 &= 24 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9) \\
x_1\ ,\ x_2\ ,\ s_1\ ,\ s_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

最後解出的單形表如下：

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & -s_1 & -s_2 \\
\hline
z & \dfrac{8700}{7} & \dfrac{310}{7} & \dfrac{100}{14} \\
x_1 & \dfrac{36}{7} & \dfrac{4}{14} & \dfrac{-2}{14} \\
x_2 & \dfrac{15}{7} & \dfrac{-3}{14} & \dfrac{5}{14}
\end{array}
$$

（圖㈥）

$\because x_1 = \dfrac{36}{7}$ 不爲整數

則 $x_1 = \left(5 + \dfrac{1}{7}\right) - \dfrac{4}{14} s_1 - \left[\left(-1\right) + \dfrac{12}{14}\right] s_2$,

由公式(8)得 $\dfrac{1}{7} - \dfrac{4}{14} s_1 - \dfrac{12}{14} s_2 \leq 0$ 。

將(9)式中 s_1 , s_2 代入化簡得 $4x_1 + 4x_2 \leq 29$

此即我們所求之切平面，以此切平面加入原命題中，繼續解之即可得我們所求之整數優良解(x_1 , x_2)=(5 , 2), $z = 1200$ 。

上述"分枝與上界法"和"切平面法"中，以前者較爲普遍，至若個中的差別，則賴讀者自行比較體驗之。

參考資料：

1. L. Cooper and D. Steinberg : Methods and Applications of linear programming. chapter 16.
2. B.S. Gottfried and J. Weisman : Introduction to optimization Theory. chapter 6.

兩個求極值的小問題

林傳儒

底下所要介紹的，是個「不按牌理出牌」的方法。或許讀者不以此法為然；但是事實上，它解決了問題。因此，我們仍然使用它。

問題1：設 $x \in N$，求 $\dfrac{20x}{(10+x)(9+x)}$ 的極大值。

首先，讓我們提出一個似乎是可行的方法。

令 $y=\dfrac{20x}{(10+x)(9+x)}$，則有 $yx^2+19yx+90y=20x$，$\therefore\ yx^2+(19y-20)x+90y=0$　$\because x\in N$，$\therefore$ 判別式 $(19y-20)^2-4\cdot y\cdot 90y \geqslant 0$，

$\therefore\ y^2-760y+400\geqslant 0$　故 $y\geqslant 380+120\sqrt{10}$，或 $y\leqslant 380-120\sqrt{10}$

但 $380-120\sqrt{10}$ 不是有理數，故 $380-120\sqrt{10}$ 不是所求的極大值。是故，二次式判別法是行不通的。到此讀者不妨先自行解解看這個問題，以及檢查以上的方法。然後再繼續讀本文。

解法一：令 $f(x)=\dfrac{20x}{(10+x)(9+x)}$. 則 $f'(x)=\dfrac{20(-x^2+90)}{(10+x)^2(9+x)^2}$.

令 $f'(x)=0$，則 $x=\sqrt{90}$　9.48 或 $x=-\sqrt{90}\fallingdotseq -9.48$

$\therefore$ (1) $f'(x)>0$，當 $0<x<\sqrt{90}$，即 f 在 $[0,\sqrt{90}]$ 是遞增的。

(2) $f'(x)<0$，當 $x>\sqrt{90}$

故在$\sqrt{90}$產生極大值。而最接近於$\sqrt{90}$的整數爲 9 或10 。

又$f(9)=\dfrac{10}{19}$，$f(10)=\dfrac{10}{19}$　∴本題的極大值爲$\dfrac{10}{19}$

解法二：令 $a_x=\dfrac{20x}{(10+x)(9+x)}$. $x\in N$.

$$\text{則 } a_{x+1}-a_x=\frac{20(x+1)}{(11+x)(10+x)}-\frac{20x}{(10+x)(9+x)}$$

$$=\frac{20(9-x)}{(11+x)(10+x)(9+x)}$$

故(1) $x<9$ 時，$a_{x+1}>a_x$，即 $a_9>a_8>\cdots>a_1$.

(2) $x=9$ 時，$a_9=a_{10}$.

(3) $x>9$ 時，$a_{x+1}<a_x$，即 $a_{10}>a_{11}>\cdots\cdots$.

∴　$a_1<a_2<\cdots<a_9=a_{10}>a_{11}>\cdots$。故極大值爲 $a_9=a_{10}=\dfrac{10}{19}$.

現在我們以實際例子來加以說明。

袋子裏有10個紅球及白球若干個。今從此袋抽出兩個球來，欲使此兩球爲一紅一白的機率爲最大，則白球應該要有幾個？

我們的解答即是：求$\dfrac{c(10,1)\cdot c(x,1)}{c(10+x,2)}=\dfrac{20x}{(10+x)(9+x)}$的極大值，其中 x 表白球的個數。事實上，我們都知道紅球與白球的個數相等時，機率最大，亦即

$$\frac{20\cdot 10}{(10+10)\cdot(9+10)}=\frac{10}{19}\text{ 。}$$

問題2：求$(3x+2y)^{50}$展開項中，係數最大的一項。

解：∵一般項爲 $c_r^{50}(3x)^r(2y)^{50-r}$　∴令 $f(r)=c_r^{50}3^r2^{50-r}$，$0\leqslant r\leqslant 50$

$$f(r+1)-f(r)=c_{r+1}^{50}3^{r+1}2^{49-r}-c_r^{50}3^r2^{50-r}=\frac{50!}{(49-r)!(r+1)!}3^{r+1}2^{49-r}$$

$$-\frac{50!}{(50-r)!\,r!}3^r2^{50-r}=\frac{50!}{(49-r)!\,r!}3^r\cdot 2^{49-r}\left[\frac{3}{r+1}-\frac{2}{50-r}\right]$$

$$=\frac{50!}{(49-r)!\,r!}3^{r}\cdot 2^{49-r}\cdot\frac{148-5r}{(r+1)(50-r)}\qquad 0\leqslant r\leqslant 49$$

∴(1)當 $0\leqslant r\leqslant 29$，$f(r+1)>f(r)$，亦即 $f(30)>f(29)>\cdots>f(0)$

(2)當 $r\geqslant 30$，$f(r+1)<f(r)$，亦即 $f(30)>f(31)>\cdots>f(50)$

故 $c_{30}^{50}(3x)^{30}(2y)^{20}$ 為展開項中，係數最大的。

怎樣把1000隻盤子分裝在10隻箱子裏？

有一個人，把1000隻盤子分裝在10隻箱子裏，他分裝的非常巧妙，不論你向他借多少隻（1000以內）盤子，他總是拿幾隻箱子給你就對了；他從來不要打開箱子一隻隻地數，而這幾隻箱子裏的盤子，正好跟你所要借的數目一樣多。你想想看，他是怎樣分裝的。

這個聰明人，他把10隻箱子分別標上(1)到(10)個號碼，再在這10隻箱子裏，依次裝進1、2、4、8、16、32、64、128、256、489隻盤子，這樣，1000隻盤子剛好全部裝進去。

如果你要借1隻盤子，他拿(1)號箱子就行了。如果你要借的盤子數少於4隻，他就在(1)和(2)號箱子間拿。如果少於8隻，他只要在(1)至(3)號箱子間計算一下，就如數地拿出了。依次類推，如果少於512隻，只要在(1)至(9)號箱子間計算一下就行了。不信你可以試試看。

你有沒有發現，這個問題的答案還不止一個哩！譬如：把(9)號箱子改成裝245隻，(10)號箱子改成裝500隻，其餘的不變，也是一個正確的答案。

儘管答案相當多，然而道理是一樣的。因為每一個自然數都可以用1、2、4、8、16、32……等數中若干個數的和來表示。

根據這一個道理，再計算一下：

$1+2+4+8+16+32+64+128+256+512=1023$

我們知道，如果把原來的問題裏的盤子數改為1023，那麼只要把原來答案裏的(10)號箱子改成裝512隻盤子，就是新問題的答案了。而且新問題的答案只有這一個。

因此這個問題裏的盤子數目——1000和箱子的數目——10，並不是單純從數學角度來選擇的。否則的話，盤子數應改為1023。

我們知道常用的記數制度，是採用逢十進一的十進位制的，因此只要數碼1到9再加上一個0，就可以表示出任何一個自然數。

可見上面這個問題裏的數學因數，就是記數制度的原理。

An algebraic reconstruction of the topology on a compact T_2-space.

張樹城

In this note, we want to reconstruct a topology on the compact Hausdorff space by using elementary algebraic concepts, so that it is convenient for us to study the abstract compact Hausdoff space from algebraic viewpoint.

Let A be any commutative ring with identity.

Spec $(A)=Y=\{P:P$ is the prime ideal of $A\}$

$\mathcal{T}=\{V(E)\,|\,E\subseteq A\}$

Where $V(E)=\{P\,|\,P$ is the prime ideal and $E\subseteq P\}$

Now we shall show that $(Y,\mathcal{T})$ is a topological space.

Lemma: If   is the ideal generated by E

then $V(E)=V(\boldsymbol{a})$

proof Let $\boldsymbol{a}=(E)$, Then $E\subseteq \boldsymbol{a}$

Clearly, $V(\boldsymbol{a})\subseteq V(E)$

We claim that $V(E)\subseteq V(\boldsymbol{a})$

Let $P\in V(E)$, that is, P is a prime ideal and $E\subseteq P$

Since $\boldsymbol{a}$ is the small ideal containing E

Hence, $\boldsymbol{a}\subseteq P$, so $V(E)\subseteq V(\boldsymbol{a})$

Thus $V(E)=V(\boldsymbol{a})$

Theorem:

i) $V(\{0\})=Y$, $V(\{1\})=\phi$

ii) If $(E_i)_{i\in I}$ is any family of subsets of A.

Then $\bigcap\limits_{i\in I} V(E_i)=V(\bigcup\limits_{i\in I} E_i)$

iii) $V(\boldsymbol{a})$ $V(\boldsymbol{b})=V(\boldsymbol{ab})$ for any ideals $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ of A

[proof]: i) Since enery prime ideal coutains 0

Hence $V(\{0\})=Y$

By definition, $1\notin P$ for any prime ideal P

So $V(\{1\})=\phi$

ii) Since $E_i \subseteq \bigcup_{i\in I} E_i, \forall i$

Hence $V(\bigcup_{i\in I} E_i) \subseteq V(E_i), \ \forall i$

that is, $V(\bigcup_{i\in I} E_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} V(E_i)$

We only claim that $\bigcap_{i\in I} \bigcup_{i\in I} (E_i) \subseteq V(\bigcup_{i\in I} E_i)$

Let P $\bigcap_{i\in I} V(E_i)$, Then P $V(E_i)$ i

and $E_i \subseteq P, \forall i$

$\bigcup_{i\in I} E_i \subseteq P \Rightarrow P \in V(\bigcup_{i\in I} E_i)$

Thus $\bigcap_{i\in I} V(E_i) \subseteq V(\bigcup_{i\in I} E_i)$

iii) $\mathbf{ab} \subseteq \mathbf{a}$, $\mathbf{ab} \subseteq \mathbf{b}$

Then $V(\mathbf{a}) \subseteq V(\mathbf{ab})$ $V(\mathbf{b}) \subseteq V(\mathbf{ab})$

$V(\mathbf{a}) \cup V(\mathbf{b}) \subseteq V(\mathbf{ab})$

To show $V(\mathbf{ab}) \subseteq V(\mathbf{a}) \cup V(\mathbf{b})$

Let $P \in V(\mathbf{ab})$, Then $\mathbf{ab} \subseteq P$

Let $a \in \mathbf{a}$, $b \in \mathbf{b}$

$ab \in P \Rightarrow a \in P$ or $b \in P$

$\Rightarrow \mathbf{a} \subseteq P$ or $\mathbf{b} \subseteq P$

Hence $P \in V(\mathbf{a}) \cup V(\mathbf{b})$

Thus $V(\mathbf{ab}) \subseteq V(\mathbf{a}) \cup V(\mathbf{b})$

<remark>Let V(E), V(F) be any elements in $\mathcal{T}$ and

$(E)=\mathbf{a}$ $(F)=\mathbf{b}$

By lemma, $V(E) \cup V(F) = V(\mathbf{a}) \cup V(\mathbf{b}) = V(\mathbf{ab})$

By above theorem, we know that $\mathcal{T}$ satisfy the axioms for the closed sets in a topological space.

Thus $(Y, \mathcal{T})$ is a topological space.

Since a maximal ideal is a prime ideal

Hence, we consider some subspace of Y

Let Max(A)=Y'={m|m is a maximal ideal of A}

$Y' \subseteq Y$ Thus we obtain a subspace Y' of Y

Consider the Compact Hausdorff space X

Let C(X) be the collection of all real-ualued Coutinuous. functions an X, that is,

$C(X)=\{f \mid f: X \longrightarrow \boldsymbol{R}$, is continuous$\}$

and the point wise sum and product of f and g denoted f+g and $f \cdot g$, defined by

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $f \cdot g(x)=f(x)g(x)$, $x \in X$.

Thus C(X) forms a commutative ving with identity.

Let $m_{x_0}=\{f \in C(X): f(x_0)=0\}$ $x_0 \in X$

To show m_{x_0} is a maximal ideal of C(X)

Let $\phi_{x_0} = C(X) \rightarrow \boldsymbol{R}$ be defined by

$$\phi_{x_0}(f) = f(x_0)$$

$$\phi_{x_0}(f+g) = (f+g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = \phi_{x_0}(f) + \phi_{x_0}(g)$$

$$\phi_{x_0}(f \cdot g) = f \cdot g(x_0) = f(x_0) \cdot g(x_0) = \phi_{x_0}(f) \cdot \phi_{x_0}(g)$$

Thus ϕx_0 is ring homomorphism and onto

By fundamental homomorphism theorem

We have $C_{(x)}/K_{er}(\phi_{x_0}) \cong \boldsymbol{R}$

But $\boldsymbol{R}$ is a field,Hence $K_{er}(\phi_{x_0})$is a maximal ideal of C(X)

Then m_{x_0} is a maximal ideal of C(X)

Let $\overline{X}$=Max(C(X))

Let μ: X $\longrightarrow$ $\widetilde{X}$ be defined by

$$\mu_{(x)} = m_x \text{ , } x \in X$$

We want to show that μ is a homeomorphism of X outo $\widetilde{X}$

proof : i) To show μ is subjective

Let m be any maximal ideal of C(X)

We claim that $\exists\ x \in X$, $\ni \mu_{(x)} = m_x = m$

Thus we know that μ is subjective

Let $V=\{x \in X: f(x)=0$ for all $f \in m\}$

Then V is not empty.

For, suppose that V is empty

Then $\forall x \in X, \exists f_x \in m, \ni f_x(x) \neq 0$

Since f_x is continuous function, there is an open neighborhood U_x of X sueb that f_x does not vanish on U_x. But X is compact, there is a finite number of the neighborhoods, say U_{x_1}, U_{x_2}, ---, U_{x_n}, Cover X.

Let $f = f_{x_1}^2 + \cdots\cdots + f_{x_n}^2$

Then f belongs to m and f does not vanish at any point of X Hence $\exists$ f^{-1}

$\ni f \cdot f^{-1} = 1 \quad i.e \quad 1 \in m$

Then m=C(X), This is a contradiction.

Hence we can choose a point of V

So $m \subseteq m_x$ but m is a maximal ideal of C(X)

therefore $m = m_x$

ii) To show μ is injective

Since X is compact Hausdorff space.

Hence X is normal

By Urysohn's Lemma (Notel), Let x≠y

Since {x}, {y} are two disjoint non-empty closed sets, there is a continuous function f from X into $\mathbf{R}$ such that f vanishes at X, but not at y

Thus $m_x \neq m_y$

Hence μ is injective

iii) Let $f \in C(X)$

$Uf = \{ x \in X : f(x) \neq 0 \}$ $\widetilde{U}f = \{ m \in \widetilde{X} : f \notin m \}$

We show that the open sets U_f (resp. $\widetilde{U}_f$) form a basis of the topology on X.

(a) 1^0 X=U_1

$$
\begin{aligned}
U_f \cap U_g &= \{ x \in X : f(x) \neq 0 \} \cap \{ x \in X = g(x) \neq 0 \\
&= \{ x \in X : f(x) \neq and\ g(x) \neq 0 \} \\
&= \{ x \in X : f \cdot g(x) \neq 0 \} \\
&= U_{fg}
\end{aligned}
$$

Defined $T_x = \{U \subset X \mid U$ is the union of numbers of the open sets $U_f\}$

Then T_x is a topology on X and the open sets U_f is a basis for T_x

b) Let $f \in C(X)$, Since $V(f)$ is a closed set in Spec(C(x))

Then the complement of V(f) in Spec(C(x)), denoted by X_f , is open and the open sets X_f form a basis for the topology on Spec (C(x))

$$\widetilde{X} \cap X_f$$
$$= X \cap (V(f))'$$
$$= \{m \in X : f \notin m\} = \widetilde{U}_f$$

Hence the open sets $\widetilde{U}_f$ form a basis of the topology on $\widetilde{X}$.

Finally; It suffices to show that $\mu(U_f) = \widetilde{U}_f$

$$\mu(U_f) = \bigcup_{x \in U_f} \{m_x\}$$
$$= \bigcup_{f(x) \neq 0} \{m_x\}$$
$$= \{m \in \widetilde{X} : f \notin m\}$$
$$= \widetilde{U}_f$$

By theorem [Note 2]; We know that μ is a homeomorphism of X outo $\widetilde{X}$. Therefore, the compact Hausdorff space X can be reconstructed from the ring of functions C(X) and it is our object.

Corollary: The Banach-Stone Theorem:

Two compact Hausdorff spaces X_1 and X_2 are homeomorphic

$\Leftrightarrow$ their corresponding function algebras $C(X_1)$ and $C(X_2)$

are isomorphic.

proof : i) Suppose that $C(X_1)$ and $C(X_2)$ are isomorphic

Since X_1(resp. X_2) and m_{x1} (resp. m_{x2}) are homeomorphic Hence X_1 and X_2 homeomorphic

ii) Suppose that X_1 and X_2 are homeomorphic ($X_1 \overset{h}{\cong} X_2$)

Let $\psi: C(X_1) \longrightarrow C(X_2)$

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] & R \\ X_2 \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "f_1 \circ h"'] & \end{tikzcd}$$

$\psi(f_1) = f_1 oh$

$\psi(f_1 + f_1') = (f_1 + f_1')oh = \psi(f_1) + \psi(f_1')$

$\psi(f_1 \cdot f_1') = (f_1 \cdot f_1')oh = \psi(f_1) \cdot \psi(f_1')$

$Let\ f_2 \in C(X_2)\ \exists\ f_2 oh^{-1} \in C(X_1), \ni$

$\psi(f_2 oh^{-1}) = (f_2 oh^{-1})oh = f_2$

Hence ψ is a homomorphism of $C(X_1)$ outo $C(X_2')$

$Ker\,\psi = \{ f_1 \mid f_1 oh = 0 \}$

Since $f_1 oh(x_2) = f_1(h(x_2)) = f_1(x_1) = 0$ *and* h is a homeomorphism Then $\mathrm{Ker}\psi=\{0\}$that is , ψ is injective

Thus $C(X_1)$ and $C(X_2)$ are isomorphic

The Banach-stone theorem gave a useful tool for us to classify compact Hausdorff spaces with elementery algebraic. concepts.

[Note 1] Urysohn's Lemma: A topological space $X, \mathcal{T}$ is T_4 if and only if given any disjoint non-empty closed sets A and B, there is a continuous function f from X into $\longrightarrow \boldsymbol{R}$ such that.

$f(a) = 0$, $f(b) = 1$, *for any* $a \in A$, $b \in B$

[Note 2] Let f be a one-one function from a space $X, \mathcal{T}$ outo a space $Y, \mathcal{T}'$ Then

f is a homeomorphism $\Longleftrightarrow$ If $\boldsymbol{B}$ is a basis for $\mathcal{T}$

Then $f(\boldsymbol{B})=\{f(B) \mid B \in (\boldsymbol{B})\}$ is a basis for $\mathcal{T}'$

References

1. M.F. ATIYAH Introduction to commutative algebra.

2. Simmons Introduction to Topology and Modern Analysis

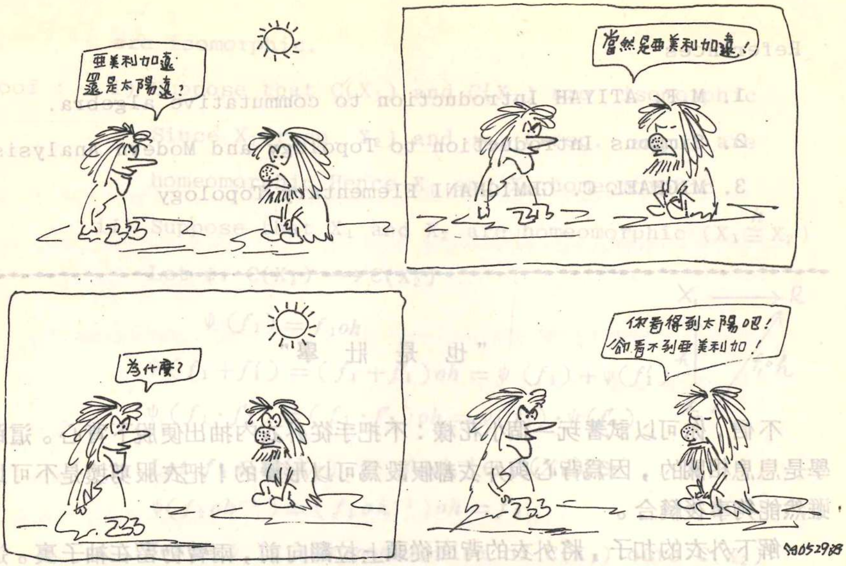
3. MICHAEL C. GEMIGNANI Elementary Topology

"也 是 壯 舉"

不信，你可以試著玩一個小花樣：不把手從外衣內抽出便脫下背心。這跟拓樸學是息息相關的，因爲背心與外衣都假設爲可以形變的！把衣服剪壞是不可以的，雖然能夠事後縫合。

解下外衣的扣子，將外衣的背面從頭上拉翻向前，兩臂仍留在袖子裏。這時你的外衣正縐縐的跨在你胸前。解下你的背心與鈕釦，同樣地自頭後翻向前，使得它橫落在胸前。

然後將外衣的背面從頭上翻回去，恢復原狀，現在只有背心緊緊的跨在胸前了。想辦法把一個袖口從外衣的袖子裏扯出，直到它脫開手。背心的另外一個袖口也同樣的很容易便脫開了手。這時背心便可以從衣袖裏拉出，你也完成了穿著外衣脫下背心的壯舉。



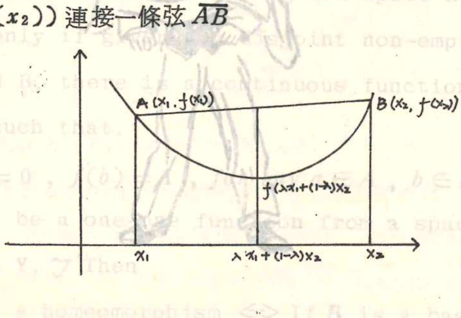
凸函數與不等式

指導老師：林義雄　作者：林晶璟

首先我們先介紹凸函數如下：

定義：設 $f: S \to R$ 是一個函數，且 $S \subseteq R^n$，為一凸子集（即對 $x_1, x_2 \in S$ 恒有 $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in S$，$0 \le \lambda \le 1$）。若其滿足 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in S$，$0 \le \lambda \le 1$，稱 f 在 S 上的一個凸函數（convex function）。

如此定義之凸函數在幾何上的意義即為：若 f 為凸函數，$x_1, x_2 \in S$，$A(x_1, f(x_1))$，$B(x_2, f(x_2))$ 連接一條弦 $\overline{AB}$



$\forall C \in AB \Rightarrow C(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$，$0 \le \lambda \le 1$，令在點 $D(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2))$ 之上方，即凸函數弦上每一點均在其圖形上方。

由於凸函數具有很豐富的性質，爲一强連續（即L inschi tz連續）與可微性之函數，因此其應用非常的廣，在此僅介紹其應用在不等式之證明方面：

(一) Jensen不等式

f：$A \to R$之凸函數，$A \subseteq R$爲凸子集，$\forall\, x_1, x_2, \cdots, x_n \in A$，則

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$$

$\forall\, \alpha_i \geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$，且等號成立於 $x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_n$

或 $f(x) = \frac{x - x_n}{x_1 - x_n} f(x_1) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_n} f(x_n) \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_n, x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$

爲一線性函數

證：應用數學歸納法

①當 $n = 2 \quad f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ 成立

且等號成立時 $f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) = \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

或 $x_1 \neq x_2$ 時，令 $x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \Rightarrow \alpha(x_1 - x_2) = x - x_2 \quad \alpha = \frac{x - x^2}{x_1 - x_2}$

$\therefore \quad f(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} f(x_2) \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ 爲一線性函數

②設 $n = k$ 時成立，則

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k) \leq \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_k f(x_k), \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \ \forall \alpha_i \geqslant 0$$

且等號成立 $\Longleftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 或

$$f(x) = \left(\frac{x - x_k}{x_1 - x_k}\right) f(x_1) + \left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_k}\right) f(x_k)$$

③當 $n = k+1$ 時，$\forall\, \alpha_i \geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1$

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1}) = f\left(\alpha_1 x_1 + \cdots + (\alpha_k + \alpha_{k+1})\left(\frac{\alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1}}{\alpha_k + \alpha_{k+1}}\right)\right)$$

$$\leqslant \alpha_1 f(x_1) + \cdots + (\alpha_k + \alpha_{k+1}) f\left(\frac{\alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1}}{\alpha_k + \alpha_{k+1}}\right)$$

$$\leqslant \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_k f(x_k) + \alpha_{k+1} x_{k+1}$$

且等號成立 $\Longleftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1}$，或 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_{k+1} \quad x_1 \neq x_{k+1}$時

$$f(x) = f\left(\alpha_1 x_1 + \cdots + (\alpha_k + \alpha_{k+1})\left(\frac{\alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1}}{\alpha_k + \alpha_{k+1}}\right)\right)$$

$$= \frac{x - \dfrac{\alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1}}{\alpha_k + \alpha_{k+1}}}{x_1 - \dfrac{\alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1}}{\alpha_k + \alpha_{k+1}}} f(x_1) + \frac{(x_1 - x)}{x_1 - \dfrac{\alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1}}{\alpha_k + \alpha_{k+1}}} \left[\frac{\alpha_k}{\alpha_k + \alpha_{k+1}} f(x_k) + \right.$$

$$\left. \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k + \alpha_{k+1}} f(x_{k+1}) \right] \quad \forall\, \alpha_k > 0 \quad \alpha_{k+1} > 0 \quad \alpha_i > 0$$

$$\begin{cases} \text{取 } \alpha_{k+1} = 1 \quad \alpha_k = 0 \\ f(x) = \dfrac{x - x_{k+1}}{x_1 - x_{k+1}} f(x_1) + \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_{k+1}} f(x_{k+1}) \text{ 為一線性函數} \end{cases}$$

所以　Jensen 不等式事實上是等價於凸函數之定義。

接下來這定理提供了一判別凸函數之方法：

定理：若$f(x)$之二次導數存在，

$\because$　　$f(x)$ 為凸函數 $\Longleftrightarrow f''(x) \geqslant 0$

證：$\Rightarrow$　　$f(x)$ 為凸函數　　$x_1 \geqslant x_2$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 - x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_1 - x_2}{2}\right) - 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqslant 0$$

$$\text{令 } t = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; h = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

$$\Rightarrow f(t + h) + f(t - h) - 2f(t) \geqslant 0$$

若 $f''(x) < 0$　$\exists$　$\delta > 0$，當 $0 < u \leqslant h$

$$f'(t + u) - f'(t - u) < -\delta u$$

$$\Rightarrow \int_0^h f'(t + u)\, du - \int_0^h f'(t - u)\, du \leqslant \int_0^h (-\delta u)\, du$$

$$\Rightarrow f(t + h) + f(t - h) - 2f(t) < -\frac{1}{2} \delta h^2 < 0 \quad \text{矛盾}$$

$$\therefore \quad f''(x) \geqslant 0$$

$\Leftarrow$　令 $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$

$$f(x_i) = f(X) + (x_i - X) f'(X) + \frac{1}{2} (x_i - X)^2 f''(\xi_i), \; x_i \leqslant \xi_i \leqslant X, \; 1 \leqslant i \leqslant n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \geqslant f(X) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)$$

$\Rightarrow f(x)$ 為一凸函數

㈡Cauchy 不等式

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leqslant (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) \quad a_i, b_i \geqslant 0, \forall i$$

且等號成立 $\Longleftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$

證：取一函數 $f(x)=x^2$，$\because f''(x)=2>0 \Rightarrow f(x)$ 爲一凸函數

$$\therefore \quad (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)^2 \leqslant (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2) \quad \alpha_i \geqslant 0 \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

令 $t_i=\alpha_i t \quad t=\sum\limits_{i=1}^{n} t_i$

$$\Rightarrow (\sum_{i=1}^{n} t_i x_i)^2 \leqslant (\sum_{i=1}^{n} t_i x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} t_i)$$

令 $t_i=b_i^2$，$x_i=\dfrac{a_i}{b_i}$

$$\Rightarrow (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leqslant (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)$$

$\because f(x)=x^2$ 不爲一線性函數

$\therefore$ 等號成立 $\Longleftrightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n \Longleftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$

㈢ $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \quad \forall \alpha_i \geqslant 0 \quad \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

$x_i \geqslant 0$

且等號成立 $\Longleftrightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n$

證：取函數 $f(x)=-\ell n x$，$f''(x)=\dfrac{1}{x^2}>0 \Rightarrow f(x)$ 爲一凸函數，

$\Rightarrow -\ell n(x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}) = -(\alpha_1 \ell n x_1 + \alpha_2 \ell n x_2 + \cdots + \alpha_n \ell n x_n)$

$\geqslant -\ell n(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n)$

$\because f(x)=-\ell n x$ 爲遞減函數 $\Rightarrow x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$

又因 $f(x)=-\ell n\, x$ 不爲一線性函數

$\therefore$ 等號成立 $\Longleftrightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n$

㈣算術平均數≥幾何平均數

$\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$ 等號成立 $\Longleftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n$

證：由㈢式中取 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=\dfrac{1}{n}$ 即得

(五) $xy \leqslant \dfrac{x^{\lambda_1}}{\lambda_1}+\dfrac{y^{\lambda_2}}{\lambda_2}$，$\dfrac{1}{\lambda_1}+\dfrac{1}{\lambda_2}=1 \quad x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$，$\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$

等號成立 $\Longleftrightarrow x^{\frac{1}{\lambda_2}}=y^{\frac{1}{\lambda_1}}$

證：由(三)式中取 $n=2$，$\alpha_1=\dfrac{1}{\lambda_1}$，$\alpha_2=\dfrac{1}{\lambda_2}$，$x_1=x^{\lambda_1}$，$x_2=y^{\lambda_2}$

等號成立 $\Longleftrightarrow x_1=x_2 \Longleftrightarrow x^{\lambda_1}=y^{\lambda_2} \Longleftrightarrow x^{\frac{1}{\lambda_2}}=y^{\frac{1}{\lambda_1}}$

(六) Hölder 不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{\alpha}}\Big)^{\alpha}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{1}{\beta}}\Big)^{\beta} \quad \alpha+\beta=1 \quad \alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0, a_i \geqslant 0, b_i \geqslant 0$$

等號成立 $\Longleftrightarrow \dfrac{a_1^{\frac{1}{\alpha}}}{b_1^{\frac{1}{\beta}}}=\dfrac{a_2^{\frac{1}{\alpha}}}{b_2^{\frac{1}{\beta}}}=\cdots\cdots=\dfrac{a_n^{\frac{1}{\alpha}}}{b_n^{\frac{1}{\beta}}}$

證：由(五)式 $\dfrac{a_i b_i}{a^{\alpha} b^{\beta}} \leqslant \alpha \dfrac{a_i^{\frac{1}{\alpha}}}{a}+\beta \dfrac{b_i^{\frac{1}{\beta}}}{b}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a^{\alpha} b^{\beta}} \leqslant \frac{\alpha}{a}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{\alpha}}\Big)+\frac{\beta}{b}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{1}{\beta}}\Big)$$

取 $a=\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{\alpha}}$，$b=\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{1}{\beta}}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant a^{\alpha} b^{\beta}(\alpha+\beta)=a^{\alpha} b^{\beta}=\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{\alpha}}\Big)^{\alpha}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{1}{\beta}}\Big)^{\beta}$$

等號成立 $\Longleftrightarrow \dfrac{a_i^{\frac{1}{\alpha}}}{a}=\dfrac{b_i^{\frac{1}{\beta}}}{b} \; \forall i \qquad \dfrac{a_1^{\frac{1}{\alpha}}}{b_1^{\frac{1}{\beta}}}=\dfrac{a_2^{\frac{1}{\alpha}}}{b_2^{\frac{1}{\beta}}}=\cdots=\dfrac{a_n^{\frac{1}{\alpha}}}{b_n^{\frac{1}{\beta}}}=\dfrac{a}{b}$

(七) Hölder 不等式之推廣 $p, q, r \cdots \geqslant 0 \quad p+q+\cdots+r=1$

$a_i \geqslant 0$，$b_i \geqslant 0$，……，$l_i \geqslant 0$

$$a_1 b_1 \cdots l_1+\cdots+a_n b_n \cdots l_n \leqslant (a_1^{\frac{1}{p}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{p}})^{p}(b_1^{\frac{1}{p}}+\cdots+b_n^{\frac{1}{p}})^{q}\cdots(l_1^{\frac{1}{r}}+\cdots+l_n^{\frac{1}{r}})^{r}$$

證：由 $\dfrac{a_i b_i \cdots l_i}{a^{p} b^{q} \cdots l^{r}} \leqslant P\dfrac{a_i^{\frac{1}{p}}}{a}+q\dfrac{b_i^{\frac{1}{q}}}{b}+\cdots+r\dfrac{l_i^{\frac{1}{r}}}{l}$

取 $a=\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{p}}$，$b=\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{1}{q}}$，……，$l=\sum_{i=1}^{n} l_i^{\frac{1}{r}}$ 即可得

等號成立 $\Longleftrightarrow \dfrac{a_i^{\frac{1}{p}}}{a}=\dfrac{b_i^{\frac{1}{q}}}{b}=\cdots=\dfrac{l_i^{\frac{1}{r}}}{l} \Longleftrightarrow a_1:b_1:\cdots:l_1=a_2:b_2:\cdots:l_2=$

$\cdots=a_n:b_n:\cdots:l_n$

(八) $a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\cdots+a_nb_nc_n\leqslant(a_1{}^3+\cdots+a_n{}^3)^{\frac{1}{3}}(b_1{}^3+\cdots+b_n{}^3)^{\frac{1}{3}}(c_1{}^3+\cdots+c_n{}^3)^{\frac{1}{3}}$

等號成立 $\Longleftrightarrow a_1^{\frac{1}{3}}:b_1^{\frac{1}{3}}:c_1^{\frac{1}{3}}=a_2^{\frac{1}{3}}:b_2^{\frac{1}{3}}:c_2^{\frac{1}{3}}=\cdots=a_n^{\frac{1}{3}}:b_n^{\frac{1}{3}}:c_n^{\frac{1}{3}}$

$$a_1b_1c_1d_1+a_2b_2c_2d_2+\cdots+a_nb_nc_nd_n\leqslant(a_1{}^4+a_2{}^4+\cdots+a_n{}^4)^{\frac{1}{4}}(b_1{}^4+\cdots+b_n{}^4)^{\frac{1}{4}}$$

$$(c_1{}^4+\cdots+c_n{}^4)^{\frac{1}{4}}(d_1{}^4+\cdots+d_n{}^4)^{\frac{1}{4}}$$

等號成立 $\Longleftrightarrow a_1^{\frac{1}{4}}:b_1^{\frac{1}{4}}:c_1^{\frac{1}{4}}:d_1^{\frac{1}{4}}=\cdots=a_n^{\frac{1}{4}}:b_n^{\frac{1}{4}}:c_n^{\frac{1}{4}}:d_n^{\frac{1}{4}}$

此乃Hölder 不等式之特殊情形。利用Hölder 不等式即可證出下不等式

(九)Minkowski 不等式，$\lambda>1$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

等號成立 $\Longleftrightarrow x_ky_k\geqslant0\quad\forall\ k=1、2、\cdots、n\quad \dfrac{x_1}{y_1}=\dfrac{x_2}{y_2}=\cdots\cdots=\dfrac{x_n}{y_n}$

證：$\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{\lambda}\leqslant\sum_{k=1}^{n}|x_k||x_k+y_k|^{\lambda-1}+\sum_{k=1}^{n}|y_k||x_k+y_k|^{\lambda-1}$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{\lambda}\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{\lambda}\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}$$

$$\therefore\ \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

由Hölder不等式之等號情形知

等號成立 $\Longleftrightarrow \dfrac{|x_1|^{\lambda}}{|x_1+y_1|^{1-\lambda}}=\cdots=\dfrac{|x_n|^{\lambda}}{|x_n+y_n|^{1-\lambda}}$，$\dfrac{|y_1|^{\lambda}}{|x_1+y_1|^{1-\lambda}}=\cdots=\dfrac{|y_n|^{\lambda}}{|x_n+y_n|^{\lambda}}$

且 $x_ky_k>0\ \forall\ k$

$\Longleftrightarrow |x_1|^{\lambda}:|x_2|^{\lambda}:\cdots:|x_n|^{\lambda}=|y_1|^{\lambda}:|y_2|^{\lambda}:\cdots:|y_n|^{\lambda}$

$\Longleftrightarrow |x_1|^\lambda : |x_2|^\lambda : \cdots : |x_n|^\lambda = |y_1|^\lambda : |y_2|^\lambda : \cdots : |y_n|^\lambda$

$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$ $\quad (\because x_k y_k > 0 \quad \forall \ k \quad)$

(十)Minkowsk；不等式之推廣

$$(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k + \cdots + z_k|^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}} \leqslant (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}} + \cdots + (\sum_{k=1}^{n} |z_k|^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}$$

等號成立 $\Longleftrightarrow x_k, y_k, \cdots, z_k$ 均同號 $\forall k$，且

$$x_1 : y_1 : \cdots : z_1 = x_2 : y_2 : \cdots : z_2 = \cdots = x_n : y_n : \cdots : z_n$$

(土) $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n} + b_1^{\alpha_1} \cdots b_n^{\alpha_n} \leqslant (a_1 + b_1)^{\alpha_1} \cdots (a_n + b_n)^{\alpha_n}$

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \ \forall \ \alpha_i \geqslant 0$ ，$a_i \geqslant 0$ ，$b_i \geqslant 0$

證：取函數 $f(x) = ln(1 + e^x)$

$f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0 \Rightarrow f(x)$ 為一凸函數，令 $x_i = ln\frac{b_i}{a_i}$

$$\Rightarrow f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = ln(1 + e^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i ln\frac{b_i}{a_i}}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i ln(1 + e^{ln\frac{b_i}{a_i}})$$

$$\Rightarrow ln(1 + (\frac{b_1}{a_1})^{\alpha_1} (\frac{b_2}{a_2})^{\alpha_2} \cdots (\frac{b_n}{a_n})^{\alpha_n}) \leqslant ln(1 + \frac{b_1}{a_1})^{\alpha_1} \cdots (1 + \frac{b_n}{a_n})^{\alpha_n}$$

$\because f(x) = ln\ x$ 遞增

$$\Rightarrow 1 + (\frac{b_1}{a_1})^{\alpha_1} (\frac{b_2}{a_2})^{\alpha_2} \cdots (\frac{b_n}{a_n})^{\alpha_n} \leqslant (1 + \frac{b_1}{a_1})^{\alpha_1} \cdots (1 + \frac{b_n}{a_n})^{\alpha_n}$$

$$\Rightarrow a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n} + b_1^{\alpha_1} \cdots b_n^{\alpha_n} \leqslant (a_1 + b_1)^{\alpha_1} \cdots\cdots (a_n + b_n)^{\alpha_n}$$

$\because$ $f(x) = ln(1 + e^x)$ 不為線性函數

$\therefore$ 等號成立 $\Longleftrightarrow ln\frac{b_1}{a_1} = ln\frac{b_2}{a_2} = \cdots = ln\frac{b_n}{a_n}$ $\quad \frac{b_1}{a_1} = \cdots = \frac{b_n}{a_n}$

(圭)當 $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = s \neq 1$ 時

$$c_1^{\beta_1} c_2^{\beta_2} \cdots c_n^{\beta_n} + d_1^{\beta_1} \cdots d_n^{\beta_n} < (c_1^s + d_1^s)^{\frac{\beta_1}{s}} \cdots (c_n^s + d_n^s)^{\frac{\beta_n}{s}} \quad \beta_i \geqslant 0,$$

$c_i \geqslant 0$ ，$d_i \geqslant 0$

證：只需令 $c_i = a_i^{\frac{1}{s}}$ $\quad d_i = b_i^{\frac{1}{s}}$ $\quad \beta_i = s\alpha_i$ 代入(土)即可

同理等號成立 $\Longleftrightarrow \dfrac{d_1}{c_1}=\dfrac{d_2}{c_2}=\cdots=\dfrac{d_n}{c_n}$

由(土)，(土)之推廣即可得到

(畫) $a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_n^{\alpha_n}+b_1^{\alpha_1}\cdots b_n^{\alpha_n}+\cdots+l_1^{\alpha_1}\cdots l_n^{\alpha_n}\leqslant(a_1+b_1+\cdots+l_1)^{\alpha_1}\cdots(a_n+b_n+\cdots+l_n)^{\alpha_n}$

$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$，$\alpha_i\geqslant 0$，$a_i\geqslant 0$，$b_i\geqslant 0$，…，$l_i\geqslant 0$

等號成立 $\Longleftrightarrow a_1:b_1:\cdots:l_1=\cdots=a_n:b_n:\cdots:l_n$

(吉) $a_1^{\beta_1}a_2^{\beta_2}\cdots a_n^{\beta_n}+b_1^{\beta_1}b_2^{\beta_2}\cdots b_n^{\beta_n}+\cdots+l_1^{\beta_1}\cdots l_n^{\beta_n}\leqslant(a_1^s+b_1^s+\cdots+l_1^s)^{\frac{\beta_1}{s}}\cdots(a_n^s+\cdots+l_n^s)^{\frac{\beta_n}{s}}$　$a_i\geqslant 0$，$b_i\geqslant 0$，…，$l_i\geqslant 0$．$s=\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\neq 1$

等號成立 $\Longleftrightarrow a_1:b_1:\cdots:l_1=a_2:\cdots:l_2=a_n:b_n:\cdots:l_n$

(圭) $\{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^r+(b_1+\cdots+b_n)^r\}^{\frac{1}{r}}\leqslant(a_1^r+b_1^r)^{\frac{1}{r}}+(a_2^r+b_2^r)^{\frac{1}{r}}+\cdots+(a_n^r+b_n^r)^{\frac{1}{r}}$　$r>1$，$a_i\geqslant 0$．$b_i\geqslant 0$

證：取函數 $f(x)=(1+x^r)^{\frac{1}{r}}$　$x>0$

$$f''(x)=(1+x^r)^{\frac{1}{r}}\left[-\frac{1}{r^2}ln(1+x^r)+\frac{1}{r}\frac{(lnx)x^r}{1+x^r}\right]>0$$

$\Rightarrow f(x)$ 爲凸函數

令 $x_i=\dfrac{b_i}{a_i}$　$\alpha_i=\dfrac{a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}$　$\Rightarrow\left[1+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\right)b_i\right)^r\right]^{\frac{1}{r}}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{a}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\right)\left[1+\left(\dfrac{b_i}{a_i}\right)^r\right]^{\frac{1}{r}}$

$\Rightarrow\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^r+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\right)^r\right]^{\frac{1}{r}}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\left[a_i^r+b_i^r\right]^{\frac{1}{r}}$

$f(x)$ 不爲線性函數　∴等號成立 $\Longleftrightarrow\dfrac{b_1}{a_1}=\dfrac{b_2}{a_2}=\cdots=\dfrac{b_n}{a_n}$

(共) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right)ln\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\,lny_i$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$，$\alpha_i\geqslant 0$，$y_i\geqslant 0$

證：取函數 $f(y)=ylny$　∵ $f''(y)=\dfrac{1}{y}>0$　∴ $f(x)$ 爲凸函數

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right)ln\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i ln y_i$$

且等號成立 $\Longleftrightarrow$ $y_1=y_2=\cdots=y_n$

利用此不等式即可證明平均數不等式

㈦ t 階平均

設 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$x_i\geqslant 0$，$\alpha_i\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$

t 階平均之定義爲：

$$M_t(x,\alpha)=\begin{cases}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\,t}\right)^{\frac{1}{t}} & 當\ t\neq 0\\ \prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i} & 當\ t=0\\ \max\{x_1,\cdots,x_n\} & 當\ t\to\infty\\ \min\{x_1,\cdots,x_n\} & 當\ t\to-\infty\end{cases}$$

則可得到 $M_t(x,\alpha)$ 是 t 的增函數

即　$k\leqslant t\Rightarrow M_k(x,\alpha)\leqslant M_t(x,\alpha)$

證：首先證明 $M_t(x,\alpha)$ 爲一連續函數

①

$$\because \lim_{t\to 0}\ell n\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\,t}\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\frac{\ell n\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\,t}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\,t}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\,t}}}{1}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{d}{dt}e^{ln\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\,t}}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\,t}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i ln x_i)(x_i^{\,t})}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\,t}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i ln x_i}{1}$$

$$=ln\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}\qquad \because ln\ 爲一連續函數$$

$$\therefore \lim_{t\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\,t}\right)^{\frac{1}{t}}=\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}$$

② $\lim_{t\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\,t}\right)^{\frac{1}{t}}$　設 $x_k=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\frac{x_i}{x_k}\right)^t\right)^{\frac{1}{t}}x_k=\lim_{t\to\infty}\left(\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\alpha_i\left(\frac{x_i}{x_k}\right)^t+\alpha_k\right)^{\frac{1}{t}}x_k=x_k=\max\{x_1,\cdots,x_n\}$$

③ $\lim_{t\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i{}^t\right)^{\frac{1}{t}}$　　令 $x_l=\min\{x_1,\cdots,x_n\}$

$$=\lim_{t\to-\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\frac{x_i}{x_l}\right)^t\right)^{\frac{1}{t}}x_l=x_l=\min\{x_1,\cdots,x_n\}$$

由①②③及 $M_t(x,\alpha)$ 之定義知 $M_t(x,\alpha)$ 為一連續函數

考慮 $t\neq 0$ 時

$$\frac{d}{dt}M_t(x,\alpha)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i{}^t\right)^{\frac{1}{t}}=\frac{d}{dt}\left(e^{ln\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i{}^t}\right)^{\frac{1}{t}}=\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{1}{t}ln\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i{}^t}\right)$$

$$=e^{\frac{1}{t}ln\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i{}^t}\left[\left(-\frac{1}{t^2}\right)ln\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i{}^t+\frac{1}{t}\frac{\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i{}^t\right)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i{}^t}\right]$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i{}^t\right)^{\frac{1}{t}}\left[\left(-\frac{1}{t^2}\right)ln\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i{}^t+\frac{1}{t}\frac{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i ln x_i)(x_i{}^t)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i{}^t}\right]$$

$$=\frac{M_t(x,\alpha)\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(ln x_i{}^t)x_i{}^t-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i{}^t\left(ln\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i{}^t\right)\right]}{t^2\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i{}^t\right)}$$

由⑯令 $y_i=x_i{}^t\Rightarrow\frac{d}{dt}M_t(x,\alpha)\geqslant 0$

$\therefore M_t(x,\alpha)$ 為遞增，且 $\frac{d}{dt}M_t(x,\alpha)=0\iff y_1=y_2=\cdots=y_n$

$\iff x_1=x_2=\cdots=x_n$

$\therefore M_k(x,\alpha)=M_t(x,\alpha)\iff x_1=x_2=\cdots=x_n$，$k\neq t$

(六)平均數不等式

定義：$\zeta_k(x)=\left(\frac{x_1{}^k+\cdots+x_n{}^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}}$　　$x=(x_1,\cdots,x_n)$, $x_i>0$

$$\zeta_0(x) = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$\Rightarrow \zeta_k(x)$ 爲 k 的一個增函數，即 $k \leqslant t \Rightarrow \zeta_k(x) \leqslant \zeta_t(x)$

證：由⑰取 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$ 即可

(九)由⑱式可得到

$\zeta_{-1}(x) \leqslant \zeta_0(x) \leqslant \zeta_1(x)$

且 $\zeta_{-1}(x)$ 即爲 $x_1, \cdots, x_n$ 之調和平均數

$\zeta_0(x)$ 爲幾何平均數，$\zeta_1(x)$ 爲算術平均數

因此有

調和平均數 ≤ 幾何平均數 ≤ 算術平均數

事實上有了平均數不等式後，上列的許多不等式也可以由其導出，總之凸函數爲不等式之證明提供了較簡便的方法，其他有關矩陣之不等式亦可由其導出。

參考資料

林義雄、林紹雄：理論分析初步（修訂一版），1978，900頁

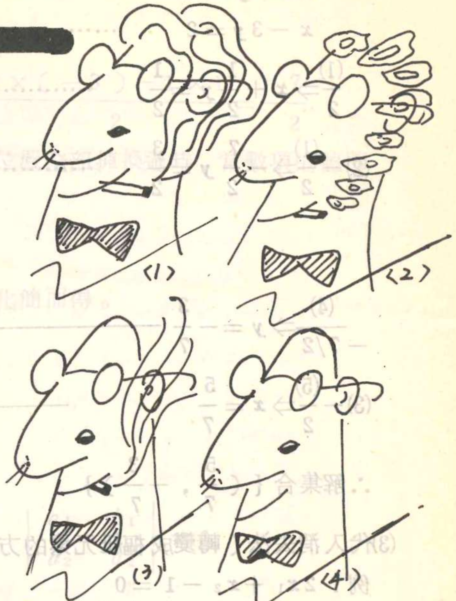
Hardy Littlewood: Inequilities.

Royden : Real Analysis.

Walter Rudin : Real and Complex Analysis,

聯立方程組

林麗雪

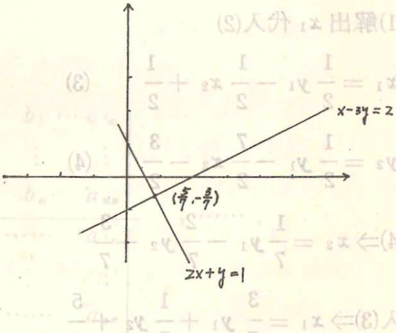


光頭佬的吸烟美容法

§1　方程組之解

(1)幾何法：求圖形的交點

例：$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$



圖形交點 $\left(\frac{5}{7}, -\frac{3}{7}\right)$ ∴方程組解 $\left\{\left(\frac{5}{7}, \frac{-3}{7}\right)\right\}$

(2)加減消去法（簡化成矩陣列運算）

魏劉徽九章算術「方程章」第八卷第一題，解上中下禾一秉各幾斗的問題時，其本質乃為加減消去法。由此可知加減法的觀念古時即已存在，我們把它數學化後即成今日的加減消去法，再簡化成矩陣列運算。

例：

$$2x+y=1 \quad \cdots\cdots(1) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$
$$x-3y=2 \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\frac{(1)}{2} \Rightarrow x+\frac{1}{2}y=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots(3) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$(2)-\frac{(1)}{2} \Rightarrow -\frac{7}{2}y=\frac{3}{2} \quad \cdots\cdots(4)$$

$$\frac{(4)}{-7/2} \Rightarrow y=-\frac{3}{7} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{array}\right)$$

$$(3)-\frac{(5)}{2} \Rightarrow x=\frac{5}{7} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{array}\right)$$

∴解集合 $\{(\frac{5}{7}, -\frac{3}{7})\}$

(3)代入消去法（轉變成樞紐元素的方法）

例：$2x_1+x_2-1=0$

$x_1-3x_2-2=0$

令 $y_1=2x_1+x_2-1 \quad (1)$

$y_2=x_1-3x_2-2 \quad (2)$

	x_1	x_2	常數項
y_1	2	1	-1
y_2	1	-3	-2

由(1)解出 x_1 代入(2)

$$x_1=\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$y_2=\frac{1}{2}y_1-\frac{7}{2}x_2-\frac{3}{2} \quad (4)$$

	y_1	x_2	常數項
x_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$

由(4)$\Rightarrow x_2=\frac{1}{7}y_1-\frac{2}{7}y_2-\frac{3}{7}$

代入(3)$\Rightarrow x_1=\frac{3}{7}y_1+\frac{1}{7}y_2+\frac{5}{7}$

	y_1	y_2	常數項
x_1	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\boxed{\frac{5}{7}}$
x_2	$\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\boxed{-\frac{3}{7}}$

$y_1=y_2=0$

∴方程組解集合 $\{(\frac{5}{7}, -\frac{3}{7})\}$

說明：

1. 畫圓圈者為樞紐元素。x_1 與 y_1 交換時，其值為原來倒數。
2. 同列者除以樞紐元素且變號。

同行者除以樞紐元素。

3. 其餘者皆按下法求之。

例如 $-\frac{7}{2}$ 之求法為 $\begin{matrix} ② & 1 \\ 1 & -3 \end{matrix}$ $\qquad \frac{2\times(-3)-1\times 1}{2}=-\frac{7}{2}$

4. 繼續上述作法，找另一樞紐元素，直到變數位置全部掉換過時，常數項的值即為方程組的解。

5. 以上之方法可由

$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2-c_1=0 \\ b_1x_1+b_2x_2-c_2=0 \end{cases}$$ 用代入消去法，化簡而得。

(4)行列式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

推廣至 n 個聯立方程組

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ &\vdots \\ &a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{aligned}$$

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}},\ \cdots\cdots,$$

$$x_n=\frac{\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{n-1} & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{n(n-1)} & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix}}\qquad \begin{vmatrix} a_{11}\cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

§ 2 聯立方程組與幾何圖形：

上節解聯立方程組的第一種方法，是由幾何圖形的交點求解，反之，我們亦可由「秩」的觀念得知聯立方程組的幾何意義。

今就三維空間來討論其幾何意義。

設聯立方程組

$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=d_1$ ……平面 E_1

$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=d_2$ ……平面 E_2

$a_{31}x+a_{32}y+c_{33}z=d_3$ ……平面 E_3

$A_{1*}=(a_{11},a_{12},a_{13})$ $\qquad$ $B_{1*}=(a_{11},a_{12},a_{13},d_1)$

$A_{2*}=(a_{21},a_{22},a_{23})$ $\qquad$ $B_{2*}=(a_{21},a_{22},a_{23},d_2)$

$A_{3*}=(a_{31},a_{32},a_{33})$ $\qquad$ $B_{3*}=(a_{31},a_{32},a_{33},d_3)$

(i) $\gamma(A)=1$ $\Leftrightarrow A_{1*}, A_{2*}, A_{3*}$ 平行或共線

(a) $\gamma(B)=1$ $\Leftrightarrow B_{1*}, B_{2*}, B_{3*}$ 平行或共線行

$\Leftrightarrow E_1, E_2, E_3$ 重合

$\Leftrightarrow$ 解空間的維度 $\dim S=2$ 。解空間爲仿射空間。

(b) $\gamma(B)=2$

$\Leftrightarrow$ (甲) B_{1*}, B_{2*}, B_{3*} 恰有兩個線性相依（譬如說 B_{1*}, B_{2*}）

$\Rightarrow E_1, E_2$ 兩平面重疊，E_3 和 E_1（或 E_2）平行

$\Rightarrow$ 解集合爲空集合

$\Leftrightarrow$ (乙) B_{1*}, B_{2*}, B_{3*} 兩兩線性獨立

$\Rightarrow E_1, E_2, E_3$ 三平面平行

$\Rightarrow$ 解集合爲空集合

(ii) $\gamma(A)=2 \Leftrightarrow A_{1*}, A_{2*}, A_{3*}$ 共面。

設 A_{1*}, A_{2*}, A_{3*} 所決定的平面爲 π

(a) $\gamma(B)=2 \Rightarrow E_1, E_2, E_3$ 包含一異於 0 之共同點 P。

E_1, E_2 交線 ℓ_1，$\ell_1\perp\pi$

E_2, E_3 交線 ℓ_2，$\ell_2\perp\pi$ 　則 $\ell_1=\ell_2=\ell_3$

E_1, E_3 交線 ℓ_3，$\ell_3\perp\pi$

(甲) A_{1*}, A_{2*}, A_{3*} 恰有二個線性相依（比如 A_{1*}, A_{2*}）

$\Rightarrow E_1, E_2$ 兩平面重疊，E_3 和 E_1（或 E_2）交於一線

(乙) A_{1*}, A_{2*}, A_{3*} 兩兩線性獨立

$\Rightarrow E_1, E_2, E_3$ 三平面相交於一直線。

$\Rightarrow$ 解空間的維度 $\dim S=1$

(b) $\gamma(B)=3 \Longleftrightarrow B_{1*}, B_{2*}, B_{3*}$ 線性獨立

(甲) A_{1*}, A_{2*}, A_{3*} 恰有二個線性相依（比如 A_{1*}, A_{2*}）

設 $A_{2*}=\gamma A_{1*}$，則 $B_{2*}\neq\gamma B_{1*}$

故 $E_1 /\!/ E_2$ 但 $E_3 \not\!/\!/ E_1$，$E_3 \not\!/\!/ E_2$

(乙) A_{1*}, A_{2*}, A_{3*} 兩兩線性獨立

E_2，E_2 交線 ℓ_1

E_2，E_3 交線 ℓ_2　　則 ℓ_1 ℓ_2 ℓ_3 兩兩不能相交

E_3，E_1 交線 ℓ_3

否則設若 ℓ_1 與 ℓ_2 交於一點 P 則 P 在 E_1，E_2，E_3 上，與 E_1，E_2，E_3 無共同交點矛盾。

(iii) $\gamma(A)=3 \Longleftrightarrow A_{1*}, A_{2*}, A_{3*}$ 線性獨立

$\gamma(B)=3 \Longleftrightarrow B_{1*}, B_{2*}, B_{2*}$ 線性獨立

$\Rightarrow E_2, E_2, E_3$ 交於一點。

$\Rightarrow$ 解空間維度 $\dim S=0$

綜合以上之討論可得一結論：

聯立方程組有解 $\Longleftrightarrow \gamma(A)=\gamma(B)$ 且滿足 $\gamma(A)+\dim S=3$

推廣：n 個聯立方程組可看成 n 個列空間或 n 個行空間，且可證明行秩＝列秩＝秩。

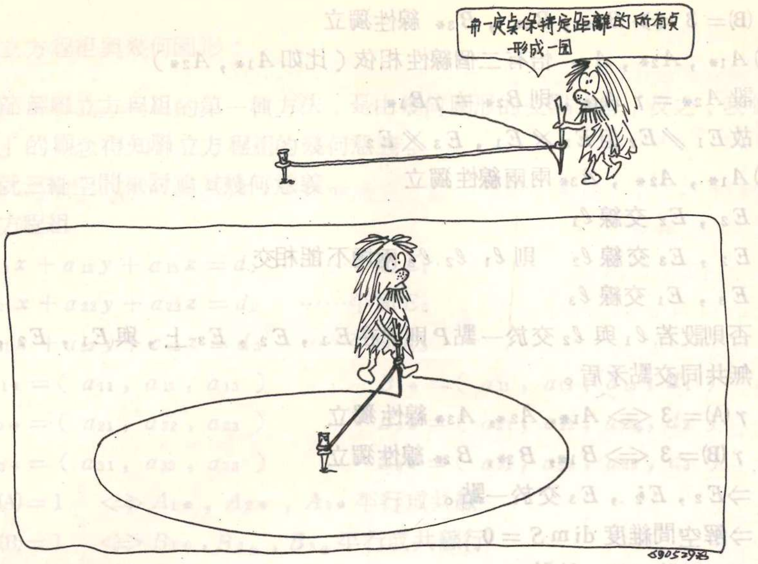
聯立方程組有解 $\Longleftrightarrow \gamma(A)=\gamma(B)$ 照樣成立

且滿足 $\gamma(A)+\dim S=n$

特殊情形：

當 $d_1=d_2=d_3=0$ 時，聯立方程組為齊次聯立方程組。齊次聯立方程組可看成一種線性變換 T，解此方程組即為求 T 的零空間。且 $\dim S=\dim N(T)$。又可證明 T 的零空間為一向量子空間，所以可導出 R^n 中任何一子空間 V 都可寫成聯立方程組的解空間，即

$V=\{\vec{x} \mid \vec{x}A=\vec{0}\}$　　　　$A_{n\times k}$ 階矩陣



INTERESTING EXAMPLE IN INTEGRAL.

廖敏偉

In the Fubini's theorem of integral calculus, We have $f(x,y):[a,b]\times[c,d]\to R$ is integrable if $f(x,y)$ is continuous, and $\int_{[a,b]}(\int_{[c,d]}f(x,y)dy)dx$, $\int_{[c,d]}(\int_{[a,b]}f(x,y)dx)dy$ exist, and $\int_{[a,b]}(\int_{[c,d]}f(x,y)dy)dx=\int_{[c,d]}(\int_{[a,b]}f(x,y)dx)dy=\int_{[a,b]\times[c,d]}f$

Now we give on example as following such that

$\int_{[a,b]}(\int_{[c,d]}f(x,y)dy)dx$, $\int_{[c,d]}(\int_{[a,b]}f(x,y)dx)dy$ exist but $\int_{[a,b]}(\int_{[c,d]}f(x,y)dx)dy$ does not exist.

We need some definitions and theorems before getting this example. We show these definitions and theorems as follows:

DEFINITION:

A subset B of R^n has (n-dimensional) measure 0 if for every $\epsilon>0$, there is a cover $\{U_1, U_2, U_3, \ldots\}$

of B by closed rectangles such that $\sum_{i=1}^{\infty} V(U_i) < \epsilon$

where $V(U_i)$ is the volume of U_i

DEFINITION:

IF $C \subset R^n$, the characteristic function χ_C of C is defined by

$$\chi_c(x) = \begin{cases} 0 & x \notin c \\ 1 & x \in c \end{cases}$$

THEOREM:

A is some closed rectangle, the function $\chi_c : A \to R$ is integrable if and only if the boundary of C has measure 0.

Now we construct a set $C \subset [0,1] \times [0,1]$ such that C contains at most a point on each horizontal and on each vertical line, but the boundary of C= $[0,1] \times [0,1]$

If such set C exists, then $\iint_{[0,1 \times 0,1]} \chi_c(x,y)dxdy$ does not exist, because the boundary of C has measuring not equaling to 0. (By theorem).

But $\int_{[0,1]}(\int_{[0,1]} \chi_c(x,y)dx)dy = \int_{[0,1]} 0\ dy = 0$

($\because$ for every fixed y, there is at most one point $h \in [0.1]$

such that $\chi_c(x,y) = \begin{cases} 1 & x = h \in [0,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

$$\int_{[0,1]} \chi_c(x,y)dx = 0$$

Similarily,

$$\int_{[0,1]}(\int_{[0,1]} \chi_c(y,x)dy)dx = \int_{[0,1]} 0\ dx = 0 \quad)$$

so the example is obtained.

Now the main work is how to construct this set $C \subset [0,1] \times [0,1]$ such that C contains at most a point on each horizontal line and each vertical line.

We construct this set C as follows:

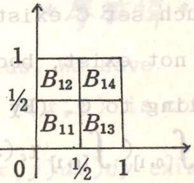
For the purpose that C contains at most a point on each horizontal and each vertical line. What we are seeking is one-to-one coresspondence f with domain $[0,1]$ and range $[0,1]$, and the graph $\{(x, f(x))\}$ is dense in $[0,1]\times[0,1]$ (i.e. the boundary of $C = [0,1]\times[0,1]$)

We start by defining f(x) for $x\in[0,1]\cap Q$, in stages.

Let the points of $B = ((0,1]\cap Q) \times ((0,1]\cap Q)$ be arranged in sequence: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ...

We define $f(x_1)=y_1$ for the zero stage.

For stage one we partition B into four disjoint parts by vertical and horizontal bisecting lines, $((0,\frac{1}{2}]\cap Q)\times((0,\frac{1}{2}]\cap Q)$ $((0,\frac{1}{2}]\cap Q)\times((\frac{1}{2},1]\cap Q)$, $((\frac{1}{2},1]\cap Q)\times((0,\frac{1}{2}]\cap Q)$, $((\frac{1}{2},1]\cap Q)\times((\frac{1}{2},1]\cap Q)$ and denote these parts in any order: B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}



Denote by $(x_{11}\ y_{11})$ the first point of the sequence $\{(x_{11}, y_{11})\}$ that belongs to B_{11} and $x_{11}\neq x_1$, $y_{11}\neq y_1$, and let $f(x_{11})=y_{11}$

Denote by (x_{12}, y_{12}) the first point of the sequence $\{(x_n, y_n)\}$ that belongo to B_{12}, and $x_{12}\neq x_1$, $x_{12}\neq x_{11}$, $y_{12}\neq y_1$, $y_{12}\neq y_{11}$ and let $f(x_{12})=y_{12}$

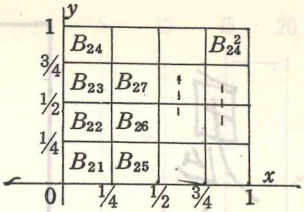
After $f(x_{13})$ is defined similarily to be equal to y_{13}

We denote by (x_{14}, y_{14}) the first point of $\{(x_n, y_n)\}$ that belongs to B_{14} and $x_{14}\neq x_1$, $x_{14}\neq x_{11}$, $x_{14}\neq x_{12}$, $x_{14}\neq x_{13}$, $y_{14}\neq y_1$ $y_{14}\neq y_{12}$, $y_{14}\neq y_{13}$ and let $f(x_{14})=y_{14}$

This complete stage one.

Stage two is similar with B partioned into $4^2=16$ parts by further vertical and horizontal bisections B_{21}, B_{22} ...., B_{24^2}

for each of these parts in turn we define $f(x)$ at a rational point not yet in its domain and having as value a rational point not yet in its range.



IF this procedure is infinitely continued, with B partioned into 4^n congruent parts at stage n.

so a function f having the specified properties for $(0,1] \cap Q$ is obtained, Finally, we extend the domain and range of f into $[0,1]$ by defining $f(x)= x$ for $[0,1] / ((0,1] \cap Q$

so the graph $\{(x,f(x)\}$ of such f has the properties that containing at most one point on each horizontal and each vertical line, and densing in $[0,1] \times [0,1]$ (ie the boundary of C= $[0,1] \times [0,1]$)

so such set C is obtained, and we complete the entire work.

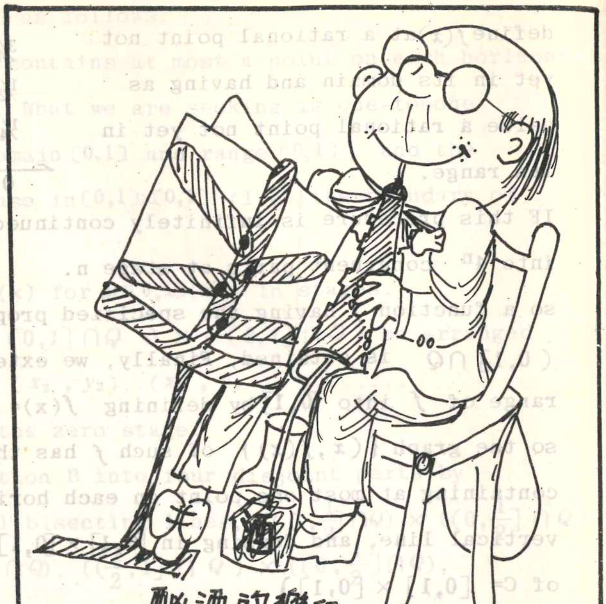
REFERENCES:

Calculus on Manifolds: Michael Spivak.

Counterexampes in Analysis: B.R.G. and J.M.H.O.

鬼腳對話錄

編輯小組



酗酒的樂師

人物：BB， OB， HH， MM， HB。

地點：師大分部學生宿舍。

時間：3月7日。

HB ：今天是林的生日；我們送點東西給他如何？

HH ：好啊！明天又是婦女節，順便也買些卡片送給班上女同學，大約75元就夠了。

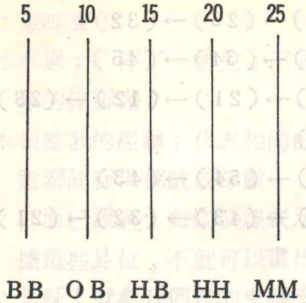
BB ：如果大家平攤15元也太沒意思了，不如我們來畫畫鬼脚，按 5元、10元、15元、20元、25元湊足 75元好嗎？

OB ：好極了，但什麼是畫鬼脚？

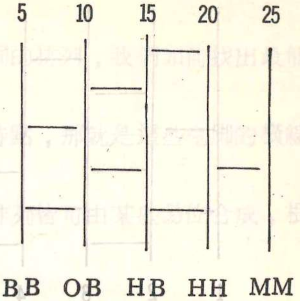
HB ：我也不懂呀！

HH ：虧你們還是大學生呢！怎麼連鬼脚都不懂？

BB ：（拿出筆和紙）畫鬼脚是先在紙上畫五條縱線，在各線下端記上各人的名字，上端寫上錢數。如圖一



（圖一）

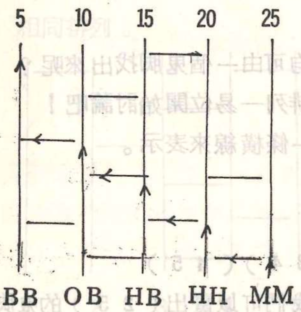


（圖二）

現在請那位在圖中加入一些聯絡相鄰兩線的橫線。

HB：（接了筆加些横線）鬼脚畫好了，這便是圖二。

BB：現在從下面的人名出發，沿縱線上昇，每遇到橫線須轉彎，終點便是他所該付的錢數。譬如MM，我用筆描給你看（說着便依箭頭方向把圖二描成圖三）。



（圖三）

他該付5元（他又按上法描出其他四人路線），BB該付10元，OB該付25元，HB該付20元，HH該付15元。

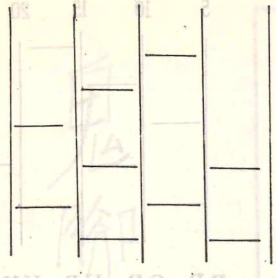
HH：畫鬼脚這遊戲也玩了好久了；但有一件事我始終納悶。

OB：什麼事？

HH：為什麼不同的人沿鬼脚總是到達不同的終點呢？

MM：這還不簡單，假設我們五人從下端一起出發，遇到橫線即相互對調，因橫線有限條而每一次對調為一一對應。綜合起來當然還是一對一。

BB：好極了，假如我們把每一個對調看成代數上的易位（transposition）。則更易看出，如圖四



1　2　3　4　5

（圖四）

BB：(12)→(23)→(32)

OB：(23)→(34)→(45)

HB：(32)→(21)→(12)→(23)→(34)

HH：(45)→(54)→(43)

MM：(54)→(43)→(32)→(21)

改寫成下列形式　$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

這正是我們代數上的排列群。

HB：這不就是說每個鬼脚都表示排列群中的一個排列嗎？

MM：正是。

HH：但反過來說，是不是每個排列群中的排列均可由一個鬼脚找出來呢？

OB：這倒是很好的問題；不過我們先從特殊的排列一易位開始討論吧！

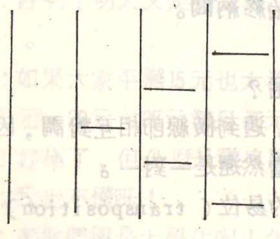
HB：很顯然地，每個相鄰數字的易位都可以用一條横線來表示。

BB：但如果是不相鄰的數字呢？

MM：這也可以，如(25)就是，因

(25)＝(45)(34)(23)(34)(45)

其中每個因子都是相鄰數字的易位，所以我們可以畫出(25)的鬼脚如下：



1　2　3　4　5

BB：對極了，記得上代數時，曾證明任意的易位都可以由這些相鄰數字的易位來合成。

HB：（跳了起來！）對呀！在群論中，我們知道每個排列群中的排列皆可表示成某些易位的合成而我們已證明每個易位皆可由鬼脚表示，因此排列群中的每個排列皆可由鬼脚表示出來。

大家：驚叫聲！

HH：不過；（停了一會兒）不同的鬼脚可能代表相同的排列，我們如何找出最簡單的鬼脚呢？

BB：根據我的經驗；代表相同的排列的鬼脚有一個特點，那就是這些鬼脚的横線數都同樣爲偶數或奇數。

MM：前面已證過，每條横線表示一個易位，而每一排列皆可由某些易位合成，根據這些易位，不就可以畫出來了嗎？

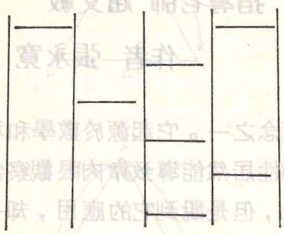
OB：是呀！就拿我們畫的鬼脚來說

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 5)(3\ 4)$$

$$= (12)(25)(3\ 4)$$

$$= (12)(45)(34)(23)(34)(45)(34)$$

如下圖，比較前面我們畫的鬼脚，一個横線數爲9，一個爲7，但都是表示相同排列。



1　2　3　4　5

HB：這就對了；每一個排列不是偶排列（even permutation），就是奇排列（odd permutation），所以相同的排列其鬼脚横線數不是全爲偶數就是全爲奇數了。

BB：眞奇妙！看似不同的鬼脚，却是殊途同歸。

HH：（一付若無其事）你才知道，不止這些，我曾畫了一千多個呢！

HB：好了！時間不早了，該買卡片去了！

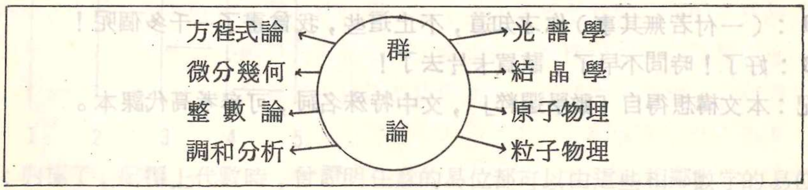
後記：本文構想得自「數學選粹」，文中特殊名詞，可參考高代課本。

羣與對稱

指導老師 趙文敏

作者 張永寬

群(group) 的概念是數學中最偉大的整合概念之一。它起源於數學和科學上對稱性的研究。非常令人驚訝地,檢查物體的對稱性居然能導致靠肉眼觀察無法得到的深沈洞察力——我們可以很容易解釋群的概念,但是說到它的應用,卻一點也不像它表面所顯示的那麼簡單。在數學裏,群的觀念是微分幾何(differential geometry)、拓樸學(topology)、整數論(number theory)和調和分析(harmonic analysis) 等領域的基礎;在科學上則是光譜學(spectroscopy)、結晶學(crystallography)和原子、粒子物理的要素。抽象的重要性,在群的觀念中是最明顯不過了。



讓我們從一個最簡單的幾何圖形——等邊三角形談起。所謂三角形的對稱就是一種移動三角形而不破壞它外表的方法,因此,對稱保持了三角形各頂點的距離和各邊間的夾角。譬如(見圖1),我們讓頂點1固定不動,並將三角形翻轉過來,使頂點2和3交換位置,這樣就完成一次對稱作用,叫做運算A。相似地,讓頂點

2不動，並翻轉三角形，可得到一個不同的對稱，叫做運算B；若固定頂點3，翻轉三角形，則得到運算C。此外，我們還可以逆時針方向旋轉三角形120度，使頂點1轉到頂點2，頂點2轉到頂點3，頂點3轉到頂點1，這個我們稱做運算R。類似地，若將三角形順時針方向旋轉，又可得到一個對稱作用，運算S。最後，如果讓三角形在原地不動，當然不會改變它的外形，就稱這個爲運算E。以上六種運算，都已經圖示在圖1中，是一個等邊三角形的所有可能的對稱。

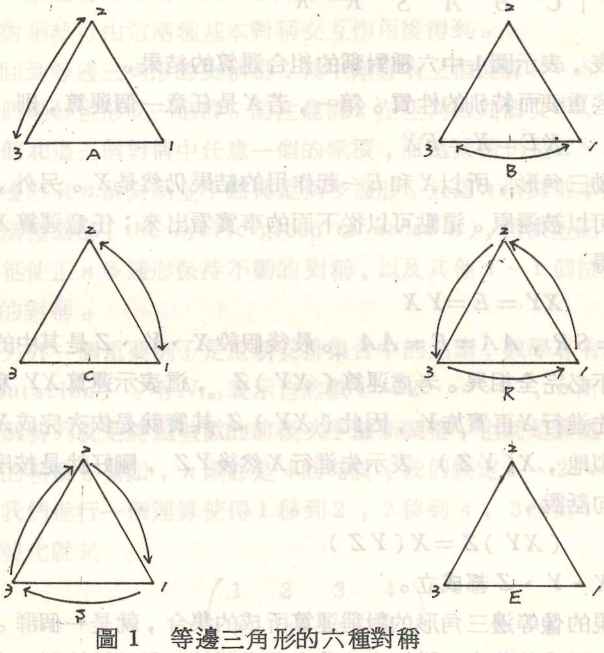


圖1　等邊三角形的六種對稱

讓我們更仔細地看看這六種運算。假如我們先完成運算R，然後接著完成A，會有什麼結果？是這樣的，R把頂點1移到2，然後A把2移到3，因此接連完成R和A的結果把1移到3。相似地，R把2移到3且A把3移到2，所以最後的結果把頂點2留在原地。還有，R把3移到1，而A把1留在原地，所以最後是把3移到1。因此，我們剛剛連續完成的兩種運算其實就是運算B。將這結論符號化，記成$RA=B$，此處R和A並列表示完成R接著完成A後的結果。

再看看另一個乘積RS，這表示先完成R再接著完成S。但因爲R是反時針方向旋轉而S順時針方向旋轉，所以$RS=E$，這個運算把三角形留在原地不動。事實上，連續完成任意兩個對稱運算，它的結果和某一個單獨的運算相同。這個結論可以整個展示在一個表內（圖2），列和行用這些運算的名稱命名，而先完成X再完成Y的結果則記在X列和Y行的交叉點。

	E	R	S	A	B	C
E	E	R	S	A	B	C
R	R	S	E	B	C	A
S	S	E	R	C	A	B
A	A	C	B	E	S	R
B	B	A	C	R	E	S
C	C	B	A	S	R	R

圖2　乘法表，表示圖1中六種對稱的組合運算的結果。

這個表有一些重要而特別的性質。第一，若X是任意一個運算，則

$$XE=X=EX$$

這是因爲E不移動三角形，所以X和E一起作用的結果仍然是X。另外，這些運算中的任何一個都可以被還原。這點可以從下面的事實看出來：任意運算X一定可以找到一個Y，使得

$$XY=E=YX$$

譬如，$RS=E=SR$，$AA=E=AA$　。最後假設X、Y、Z是其中的任意三個運算，它們可以不必完全相異。考慮運算$(XY)Z$　，這表示運算XY 和Z的乘積，但是XY 表示先進行X再實施Y，因此$(XY)Z$ 其實就是依次完成X、Y、Z的結果而已。相似地，$X(YZ)$ 表示先進行X然後YZ，剛好就是按序完X、Y、Z的意思。換句話說，

$$(XY)Z=X(YZ)$$

對任何對稱運算X、Y、Z都成立。

任何系統表現的像等邊三角形的對稱運算所成的集合，就是一個群。更正式地說，群是一些東西所成的集合，附加上此集合元素間的一個乘法法則，它有三個性質：

1. 群中必存在一個元素e，使得對於該群中任意元素x，恒有$xe=x=ex$。
2. 群中的任意元素x，必定存在一個y使得$xy=e=yx$。
3. 群中任意的x、y、z，$(xy)z=x(yz)$必成立。

至於群的另外一個例子，讓我們檢驗一個正五邊形和它的對稱性。這時變成十種對稱運算了（圖3），有一個使正五邊形保持不動，另外有四個分別按序使五邊形逆時針方向72、144、216、288 度。還有五個分別對應於五個頂點翻轉五邊形：先固定一個頂點，然後以此頂點和此頂點對邊中點的連線爲軸，將五邊形翻轉過來。一般說來，若我們檢查一個正n多邊形，就會找到一個包含$2n$ 個運算的對稱群。

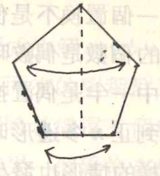


圖3　正五邊形的兩種對稱形式，左圖表示旋轉作用，右圖表示翻轉作用。所有的十種對稱都可由這兩種基本對稱交互作用後得到。

暫時回到等邊三角形的對稱群，其中剛好有三個運算R、S、E並沒有翻轉三角形，它們剛好也形成一個群。請注意圖2 左上角的九個文字，它們是E、R、S中任意一個和這三個對稱中任意一個的乘積，而這乘積仍是E、R或S。一般說來，正n多邊形有n個對稱並不翻轉這個多邊形，且這n個對稱本身剛好構成一個群，叫做n階循環群（the cyclic group of order n），習慣上記成Z_n。這個群裏面的元素包括使正n多邊形保持不動的對稱，以及其他$n-1$個按逆時針方向旋轉正n多邊形的對稱。

群的另外一個重要例子是重新安排集合中的元素，數學專有名詞叫做置換或排列（permutation）。令$N_{(n)}$表示自然數1、2、………，n所成的集合。所謂$N_{(n)}$的一個排列就是將這些數的前後次序重新調整，也就是讓這些數在它們本身之間做某種的替換。譬如，n剛好是4的時候，我們假定1、2、3、4已經按序排好，然後我們進行一個運算使得1移到2，2移到4，3移到1，4移到3。把這個運算符號化就是

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

正如我們所期待的，如果你連續完成兩次$N_{(n)}$的置換，它的結果和另一個置換相同。$N_{(n)}$的所有置換是另一個群的例子，叫做n次對稱群（the symmetric group of degree n），記成S_n。它剛好有$n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdots(2)\cdot(1)$個置換在裏面。

在上文中我們已經看到正n多邊形的$2n$個對稱運算可以分成兩類：有n個對稱不把正n邊形翻過來，另外有n個對稱則把它翻轉過來。$N_{(n)}$的n！個置換也可分成兩類。爲了說明這點，讓我們檢查上面提過的$N_{(4)}$的置換使1、2、3、4保持次序的情形。它把1換到2且把2換到4，因此1和2置換後的數（2和4）的次序和原來的一樣；但它把2換到4且把4換到3，所以2和4置換後的數（4和3）的次序和原來的相反。事實上，如果我們用這種方法比較這四個數中的任意兩個，共有六組可供比較，將會發現有三次次序相同，有三次相反。

一般的情形，對於 S_n 中的置換我們仍用這種方法。對於 1 到 n 中的任一組數 i 和 j，一個置換不是使它們保持相同的次序就是相反。當一個置換中不具相同次序的數組的個數是偶數時，稱之為偶置換；如果是奇數，就稱做奇置換。我們已經知道 S_n 中一半是偶置換，也就是說 S_n 中有 $n!/2$ 個偶置換和 $n!/2$ 個奇置換。

在談到正 n 多邊形時，我們看到那些不翻轉多邊形的對稱運算，本身構成了一個群。同樣的情形也發生在置換上，S_n 中的 $n!/2$ 個偶置換本身也構成一個群，叫做交代群（alternating group），記成 A_n。

伽羅瓦理論（Galois Theory）

一元二次方程式求解的問題是初等數學教育的標準教材之一。例如，已知方程式

$$2x^2+2x+5=0$$

則根據我們學過的根的公式，可以求得

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{-36}}{4}$$

這個解只用加、減、乘、除四則運算和開平方根便可以表示出來。同樣地，十六世紀已經發現如果我們面對一個三次方程式，像

$$2x^3+5x^3+x-7=0$$

我們仍可找到一個只用四則運算和開立方根就能表示的根的公式。至於四次方程式，像

$$x^4-3x^3+7x^2-x+18=0$$

則要用到開四次方根。但是幾世紀以來，縱使花費了大量心血，對於五次方程式却找不到類似的公式。直到 1832 年藉著群論的使用，年輕的法國數學家伽羅瓦（Évariste Galois）（1811 ～ 1832）才完全的解决了整個問題。

伽羅瓦的構想是對於每一個多項式方程式伴隨一個群，這個群的性質和方程式解的本質有非常密切的關連。尤其是，他造出了一個群來反映這個多項式方程式根的對稱性。這眞是數學史上最引人注目的思想之一。

讓我們用一些例子來說明，首先是方程式 $x^5-1=0$。它有五個解，它們是 1，再加上四個數

$$(-1+\sqrt{5}+\sqrt{-10-2\sqrt{5}})/4$$
$$(-1-\sqrt{5}+\sqrt{-10+2\sqrt{5}})/4$$
$$(-1-\sqrt{5}-\sqrt{-10+2\sqrt{5}})/4$$
$$(-1+\sqrt{5}-\sqrt{-10-2\sqrt{5}})/4$$

如果我們把這四個數的第一個記成 a，則 $a^5=1$，因為 a 本來就是這多項式的一個根。因此 $(a^2)^5=a^{10}=(a^5)^2=1$，故 a^2 也是它的根，事實上 a^2 就是四個數

中的第二個。如果我們將這四個數分別命名爲 a、b、c、d，則 $b=a^2$，$c=a^3$，$d=a^4$。我們用 e 來表示另外一個解，1。

伴隨這方程式的伽羅瓦群（Galois group）是由方程式的解 a、b、c、d、e 的一些置換所組成。先前，當我們考慮幾何圖形時，跟著而來的對稱群是由一些保持圖形幾何性質——如長度、角度的運算組成。現在我們將考慮這五個解的那些置換，它們保持解的代數性質。例如，因爲 $a^2=b$，所以如果一個置換在伽羅瓦群中，並且把 a 換成 x 而 b 換成 y，那麼 x^2 一定等於 y。這就是所謂的保持關係。特別地，假如這置換把 a 換成 c，那麼它一定把 b 換成 c^2。可是 $c=a^3$，所以由 $a^5=1$，$c^2=a^6=a$。因此如果把 a 換成 c，就一定把 b 換成 a。同樣地，因爲 c 是 a 的立方，而 a 被換成 c，所以 c 被換成 c 的立方，也就是 $(a^3)^3=a^9=a^4=d$。還有，因爲 d 是 a 的四次方，經過計算後我們知道 d 一定被換成 b。因此，如果這置換把 a 換成 c，則 b 換成 a，c 換成 d，d 換成 b，而 e 不動。

更一般地，如果我們知道伽羅瓦群中的置換把 a 換成那一個數，這個置換便可用相同的方法決定出來。事實上，數 a 可被換成數 a、b、c、d 中的任何一個。剛好有四個置換在這方程式的伽羅瓦群中，他們全部列在圖 4 中。每一列表示一個置換，依次是 a、b、c、d、e 置換的對象。

不過讓我們再看另一個五次方程式

$$x^5-x-1=0$$

看起來似乎和第一個方程式沒有多大區別。它也有五個解。可是在這裏，它的伽羅瓦群却是由五個解的全部 120 個置換所組成，這是非常不一樣的地方。

a	b	c	d	e
a	b	c	d	e
a	b	c	d	e
a	b	c	d	e
a	b	c	d	e

（圖 4）

伽羅瓦理論的最主要結果是一個多項式方程式的解，可以用四則運算和開方根的方法表示，僅當這伽羅瓦群其有某種特別的性質；或者從根本上講，這個群是用一種非常好的方法造出來的（見下頁的方框）。對於我們所討論的第二個五次方程式，這個結論使得它沒有一個根可以用四則運算和開方法表示——它的對稱群太複雜了。

伽羅瓦理論同時也非常適當地解釋了爲什麼二次、三次、四次方程式有這麼好的性質。概略地講，整個概念是：由二個、三個或四個東西的置換所構成的群，剛好不會太複雜，以致於所有無法避免用這種方法所造出的群，都不會太複雜。事實

上，處理這些方程式的方法，都可從這理論中得到。伽羅瓦理論的確是一個引人注目而且成功的理論，它來自一些看起來毫不相干，其實却息息相關的概念。這種型態的調和在數學裏是屢見不鮮的。

伽羅瓦理論的主要結果

理論結構

1. 令 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ 表一個有理多項式。

2. 令 r_1、r_2、……、r_n 表方程式 $f(x)=0$ 的所有根。

3. 令 G 表示這方程式的伽羅瓦群，因此 G 由 r_1、r_2……、r_n 這 n 個根的置換所組成。

4. 令 F 表示所有由這 n 個根經過四則運算所得的數所成的集合。F 是一個體（field），換句話說，它是一個數系，它裏面的數可以自由的進行四則運算。

5. 考慮包含在 F 中的數系以及包含在 G 中的群。對於每一個數系就有一群和它對應，對於每一個群數就有一個數系和它對應。

主要定理

包含在 F 中的數系和包含在 G 中的群之間，有一種自然的一對一對應關係。

如何使用這個結論

將有關根的本質的問題轉移到有關數系 F 的問題上，再轉移到有關群 G 的問題上。

李氏群（Lie Groups）

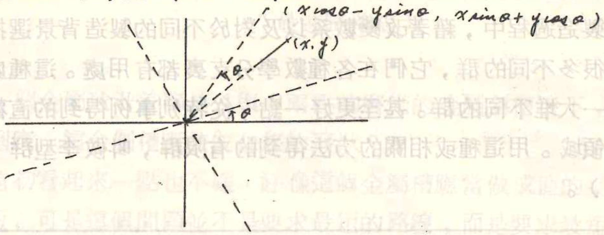
還有什麼工作我們可以想當然耳的再嘗試一遍！爲什麼不試著將群的理論應用到其他各式各樣的方程式上，像源自微積分而最初應用到物理科學的微分方程？在尋找微分方程正確解的基本方法成敗上，是否有一種相似的解釋存在？這個問題激發了挪威數學家沙孚斯·李（Sophus Lie, 1842～1899）去發展另一類群，距今剛好是一世紀以前。

這一類的群實在很難爲它下一個明確的定義，我們將只討論它的一些例子。首先看看平常解析幾何和微積分所用的 $x-y$ 座標平面。平面上對於原點——座標軸的交點——依逆時針方向做 θ 角度的旋轉，可以看成是這平面的一個對稱作用，因爲它既保距又保角。利用初等三角學可以很容易算出在旋轉作用下，點 (x, y) 將會被移到：

$$(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)$$

此處 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 表示 θ 的餘弦和正弦函數（圖 5）。所有的旋轉構成一個群，叫

做李氏群（Lie group），這是爲了尊崇他的發現而命名的。的確，先完成一次θ_1角度的旋轉再接著進行一次θ_2角度的旋轉，其結果剛好是一次$\theta_1+\theta_2$角度的旋轉。這事實告訴我們任意兩個旋轉的乘積法則。不難檢驗出來，成爲群所需的性質它都滿足了。例如，零角度的旋轉可以當做元素e。若α是一個θ角度的旋轉，而旋轉$2\pi-\theta$角度的β是它的互補旋轉（Compiementary rotation）（此時$2\pi-\theta$和θ的和爲2π或 360°），則$\alpha\beta=e=\beta\alpha$。



圖五

李氏群的基本特徵是連續性：他們藉著像角度θ這類不斷變動的參數來描繪。這種情形似乎和由置換或多邊形的對稱運算所形成的有限、離散群不一樣。然而，在李氏群和有限群之間却有著非常基本的關連。這點早就爲人所知，可是僅止於表面而已。只有今天我們才對這層關係達到了一個非常深入的了解。

爲了指出這個關聯，讓我們回到平面上的旋轉群，並用稍微不同的方法描述它。令$a=\sin\theta$，$b=\cos\theta$，因此a、b是滿足$a^2+b^2=1$的兩個數（這個等式剛好就是著名的畢氏定理在一個斜邊爲1，兩股分別爲a、b的直角三角形上的應用）。反過來說，若數a、b滿足$a^2+b^2=1$，則它們擁有一個唯一的旋轉：恰好有一個角度θ使得$a=\sin\theta$，$b=\cos\theta$。因此我們可以把這個旋轉記成$r(a,b)$。

現在若$r(a,b)$和$r(a',b')$是兩個旋轉，則依次完成它們的結果仍然是一個旋轉，因此一定存在一個公式表示這個事實。的確，公式如下：

$$r(a,b)\,r(a',b')=r(ab'+a'b,\,-aa'+bb')$$

不過這只是一個代數式子（可以從下頁的方框中得到），並不包括 sine 和 cosine 等超越函數在內。這使得一個簡單但偉大的構想成爲可能。直到現在a和b只表示普通的數，它們需滿足等式$a^2+b^2=1$。但是數學裏還有許多不同的數系，在數系裏我們能行加、減、乘、除等運算。譬如，複數系由所有形如$u+iv$的數所組成，其中u、v是平常的實數，i是-1的平方根。另外有理數系是由所有的商$\frac{m}{n}$組成，其中m、n是整數而n不爲零。如果我們取一個像這樣的數系，對其中所有a、b考慮符號$r(a,b)$，a、b滿足$a^2+b^2=1$，然後根據前文的公式定義乘法，我們就得到了一個群！畢竟，像這樣由一些東西所成的集合，再附加一個乘法法則所構成的系統，我們不難證明它滿足成爲一個群所需要的所有條件。

在數學的這許多數系中，有些數系所含的元素才不過有限個。例如，我們可以造出一個只含五個元素的數系，這些元素分別記成 0、1、2、3、4 ——不過這時它們並不是一般的數。我們可以在這五個元素上定義加法和乘法，使得減法和除法變成可能，以及全部的一般計算法則都成立。現在如果這數系是有限的，則由相關的符號 $r(a, b)$ 所組成的群也會變成有限。這樣就產生了一個群，它由平面上旋轉作用形成的連續李氏群改造後得到的。

在這種製造過程中，藉著改變數系以及對於不同的製造背景選擇不同的李氏群，可以得到很多不同的群，它們在各種數學分支裏都有用處。這種處理方式使我們能同時研究一大堆不同的群。甚至更好一點，從特別事例得到的直觀洞察，可能被用到一般的領域。用這種或相關的方法得到的有限群，叫做李型群 (group of Lie type)。

一個平面旋轉公式

1. θ 角度的旋轉把點 (x, y) 移到點 $(bx-ay, ax+by)$，其中 $a=\sin\theta$，$b=\text{con}\,\theta$。

2. θ' 角度的旋轉把點 (x', y') 移到點 $(b'x'-a'y', a'x'+b'y')$，其中 $a'=\sin\theta'$，$b'=\cos\theta'$。

3. 如果令 $x'=bx-ay$，$y'=ax+by$，然後代入第二個旋轉的式子中，則我們得到一個式子，表示點 (x, y) 經第一次和第二次旋轉後會被移到什麼地方：

$$(b'(bx-ay)-a'(ax+by), a'(bx-ay)+b'(ax+by))$$
$$=((-aa'+bb')x-(ab'+a'b)y,$$
$$(ab'+a'b)x+(-aa'+bb')y)$$

4. 如果令 $a''=ab'+a'b$，$b''=-aa'+bb'$，則 (x, y) 被移到 $(b''x-a''y, a''x+b''y)$。然而，連續完成這兩次旋轉，剛好就是一次 $\theta+\theta'$ 角度的旋轉，因此

$$\sin(\theta+\theta')=ab'+a'b$$
$$\cos(\theta+\theta')=-aa'+bb'$$

當然，這兩個式子就是正弦和餘弦函數的複角公式。

5. 所以，如果前兩個旋轉的代數符號是 $r(a, b)$ 和 $r(a', b')$，則和依序完成它們相當的旋轉的代數符號是 $r(ab'+a'b, -aa'+bb')$。

（本文節譯自" Tonathan L. Alperin：Groups and Symmetry "，原文收錄在" Lynn A. Steen：Mathematics Today —— Twelve Informal Essays "）。

" 最速降落線 "

如果讓一個金屬球沿着聯接A與B兩點的磨光的金屬斜槽滾下，希望它能在最短的時間落到底，這金屬槽應該做怎樣的形狀？

這個問題初看起來一點也不難，好像這個金屬槽應當做成直的，因爲兩點之間以直線爲最短。可是這個問題並不是要求最短的路線，而是要求最短的時間。要知道：球下落的時間不僅跟路線的長短有關係，跟球滾下的速度也有關係。如果把金屬槽的中部下向彎曲，從A點開始的部分就比直槽更陡，因此，鉛球沿這部分滾下來所獲得的速度，一定比在同樣長短的直槽部分所獲得的速度來得快。可是也要注意到一點，倘若把槽的上半部做得太陡，那麼下面聯接B的部分便會很平坦，因此在前面部分球雖然跑得很快，可是到了後面部分球就跑得很慢，到達B點時可能還沒有沿着槽滾得快。

到底應當把槽做成什麼樣的形狀呢？意大利的物理學家兼天文學家伽利略曾經也考慮過這個問題，他認爲這個槽應當做成圓弧形。可是五十年後，瑞士的數學家貝努里兄弟用精密的計算證明不應當如此，這個槽應當彎曲成擺線的弧（如在下圖中最下面的一個槽）。從這個時候起，擺線便獲得了" 最速降落線 "的名字。

關於這個問題，許多卓越的學者，如牛頓、德·羅彼塔、萊布尼茨等都曾經獨立作過解答，不過雅科·貝努里的解答意義最大，他的方法，後來發展成爲一個新的數學分科——變分學，因而在數學史上起過重大的作用。

ALL NON-ABELIAN GROUPS (UP TO ISOMORPHISM) OF ORDER LESS THAN 16.

指導老師 趙文敏
作者 林鵬裕

In the course of Algebra I, We have made much discussion on abelian groups, but hardly any on the structure of non-abelian groups. The purpose of this article is to find all the non-abelian groups of order less than 16 (up to isomorphism). As to the structure of non-abelian groups whose order is between 15 and 32, please consult the bibliography 〔6〕, P.134

Let F〔A〕 be the free group generated by the set A and suppose that we want to form a new group as much like F〔A〕 as it can be, subject to certain equations. Each equation can be written in a form in which the right-hand side is 1, the identity. Thus we can write the equations to be $r_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$ where $r_i \in F[A]$. Clearly, if we require that $r_i = 1$ then we will have to have $x(r_i^n)x^{-1} = 1$, for any $x = F[A]$ and $n \in Z$.

Furthermore, any finite product of the form $\Pi x_j(r_{ij}^{n_j})x_j^{-1}$ where r_{ij} need not be distinct, is equal 1 in the new group. Hence, the set of all these finite products is a normal subgroup R of F[A] and the group we are looking for is F[A]/R. We can view this group as described by the generating and the set $\{r_i\}$ Hence we define:

Let A be a set and let $\{r_i\} \subseteq F[A]$ Let R be the least normal subgroup of F[A], containing $\{r_i\}$ An isomorphism ϕ of F[A]/R onto a group G is a presentation of G. The sets[A] and $\{r_i\}$ give a group presentation. The set A is the set of generators for the presentation and each r_i is a relator. An equation $r_i = 1$ is a relation.

The group presentation with generators x_j and relators r_i is denoted by $(x_j : x_i = 1)$.

The following theorems will be used without proof throughout this article:

1. Every group G' is a homomorphic image of a free group. i.e. every group has a presentation. (see[1], p.143.)
2. If n=pq, with p&q are primes and q>p and q≡1 (mod p). then there is exactly one non-abelian group of order n(see[1], p. 156).
3. For $H_m \otimes K_n$, if $H_m = (a)$, $K_n = (b)$, $0(a) = m$, $0(b) = n$ then for the group presentation $(a, b : a^m = 1, b^n = 1, ba = a^r b)$ gives a group of order mn if and only if $r^n \equiv 1 \ (mod m)$ (see [1], p 155).
4. Any non-abelian group has at least six elements (see [3], p. 100).
5. $\forall k \in N - \{1\}$, it must exist a non-abelian group with

order k^3 (see [6])

6. For each even integer k greater than 4, there exists a non-abelian group with order k (see [6]).

7. Any group of order P or P^2 must be abelian, where P is a prime. (see [3] p. 163)

8. Let G be a group O(G)=pq, p>q are primes, If $q \nmid P-1$ then G is a cyclic. (see [4] p. 75)

9. Let p>q are primes, if q|p-1, then there exists a non-abelian group of order pq. (see [4]p. 75)

10. Let p>q are primes, then any two-abelian groups of order pq are isomorphic (see [4] p. 75)

11. Let G be an abelian group in which every element has finite order For each prime p, let

$$S_p = \{x : x \in G \ , \ x^{p^k} = 1 \ , \ foe\ some\ integer\ k\}$$

Then S_p is a subgroup of G and every $x \in G$ has a unique representation $x = y_1 y_2 \cdots\cdots y_k$, where $y_i \in S_{pi}$ In particular, if G is finite and $|G| = m = P_1^{e1} \cdots\cdots P_k^{ek}$ is the factorization of m into distinct prime powers, then $G \cong S_{p_1} \otimes S_{p_2} \otimes \cdots\cdots \otimes S_{p_k}$ and $|S_{p_i}| = P_i^{ei}$ (see [2] , p.144)

By theorems 4,5,6,7,8,9, if G be a non-abelian group and O(G)= k , k<16, then k {6,8,10,12,14}

1. Non-abelian groups of order 6.

Let G be a non-abelian group of order 6.

Since 6=3×2, then by Sylow Theorem, G contains a normal subgroup H of order 3 and H is a cyclic. Let a be a generator of H, then G/H of order 2. (i.e. G/H $\cong Z_2$), $\forall b \in G$, $b \notin H$, then $b \neq 1$ and $b^2 \in H$, Since O(b)|6, hence O(b)=2.

$\therefore a^3 = 1$, $b^2 = 1$

$\because$ H is normal

$\Rightarrow bab^{-1} \in H$

$\Rightarrow bab^{-1}$ *will equal to* a *or* a^2

(1) If $bab^{-1} = a \Rightarrow ba = ab$, it contradicts to the assumption that G is non-abelian.

(2) If $bab^{-1} = a^2 \Rightarrow ba = a^2 b$ By theorem, 2 and 3. the group presentation, $(a, b : a^3 = 1, b^2 = 1, ba = a^2 b)$ gives a group G of order 6.

Since $ba = a^2 b \neq ab$, G is non-abelian.

Thus, G is the only non-abelian group of order 6 and $G \cong S_3$

2. Non-abelian groups of order 8.

Let G be a non-abelian group of order 8.

Since G contains no element of order 8, hence every elements (except identity) of G must be of order 4 or 2.

If $\forall a, b \in G, a^2 = 1, b^2 = 1 \Rightarrow ab \in G$, $(ab)^2 = 1$

$$\Rightarrow ba = a^2 bab^2 = a(ab)(ab)b = ab$$

This is a contradiction.

Hence there exists an element $a \in G$ of order 4. If $b \notin (a)$ then $G = \{a^0, a, a^2, a^3, ba^0, ba, ba^2, ba^3\}$. So a , b are generators of G and $a^4 = 1$, Since (a) is of index 2, (a) is normal, then $G/(a) \cong Z_2$ *and* $b^2 \in (a)$: *If* $b^2 = a$ *or* a^3, *then* $0(b) = 8$ these are impossible, Thus, $b^2 = a^2$ *or* $b^2 = 1$

On the other hand, since (a) is normal, we have $bab^{-1} \in (a)$

But $0(bab^{-1}) = 0(a)$. hence $bab^{-1} = a$ or $bab^{-1} = a^3$ If $bab^{-1} = a$

Then ba=ab this is impossible. since G is non-abelian Thus $bab^{-1} = a^3$ *or* $ba = a^3 b$

Hence, there are two possible group presentations of order 8.

① G_1 : $(a, b : a^4 = 1, b^2 = 1, ba = a^3 b)$

② G_2 : $(a, b : a^4 = 1, b^2 = a^2, ba = a^3 b)$

Since the dihedral group D_4 satisfies the relations in G_1 and the quaternion group $(\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, *where* $i^2 = j^2 = k^2 = -1)$ satisfies the relations in G_2 then we have $G_1 \cong D_4$., G_2 is isomorphic to the quaternion group.

Hence there are exactly two non-isomorphic non-abelian groups of order 8.

3. Non-abelian groups of order 10.

Let G be a non-abelain group of order 10, then G contains no elements of order 10. Since 10=5×2, by sylow Theorem, G contains a normal subgroup H of order 5 and H is cyclic. If a is a generator of H, then G/H is of order 2 and $G/H \cong Z_2$.

Let $b \in G$, $b \notin H$, $\Rightarrow b^2 \in H$

then $b^2 = 1$, *otherwise* $0(b) = 10$

Since H is normal $\Rightarrow bab^{-1} \in H$

$\Rightarrow bab^{-1}$ *will equal to* a, a^2, a^3, *or* a^4

(1) *If* $bab^{-1} = a \Rightarrow ba = ab \quad \longrightarrow\longleftarrow$

(2) *If* $bab^{-1} = a^2 \Rightarrow ba = a^2 b$

$\Rightarrow a = b^2 a = ba^2 b = a^2 bab = a^4 b^2 = a^4$

$\Rightarrow a^3 = 1 \rightarrow\leftarrow \text{since } 0(a) = 5$

(3) *If* $bab^{-1} = a^3 \Rightarrow ba = a^3 b$

$\Rightarrow a = b^2 a = ba^3 b = a^3 ba^2 b = a^6 bab$

$= a^9 b^2 = a^9 = a^4 \rightarrow\leftarrow as\ (2)$

(4) If $bab^{-1} = a^4 \Rightarrow ba = a^4 b$ By theorem 3 the group presentation

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^4 b)$$

gives a group G of order 10. Since D_5 satisfies all the relations of G, we see that there is exactly one non-abelian group of order 10.

4. Non-abelian groups of order 12.

Suppose G is a non-abelian group and $0(G)=12=2^2\times3$, then by Sylow Theorem, G have 2-sylow-subgroup (2-SSG). and 3-SSG. The 2-SSG are all isomorphic to either the cyclic group, C_4, of order 4, or to the Klein 4-group, K_4. Also by Sylow Theorem, the number of 2-SSG is 1 or 3, the number of 3-SSG is 1 or 4. Consequently, there are at most eight possibilities according to the number and the type of the sylow subgroups.

Case 1:

Since any two 3-SSG intersect in {1}and so these four subgroups would account for 9 elements in G. Any 2-SSG adds three more distinct elements, since 2-SSG and a 3-SSG intersect in {1} . Now we have a tolal of 12 elements and hence there could not exist another distinct 2-SSG in G. Hence there is no group of order 12. with four 3-SSG and three 2-sylow-subgroups.

Case 2:

If there is one 2-SSG, A, and one 3-SSG, C_3. Since each is normal and $A\cap C_3=\{1\}$ *while* $|A\cap C_3|=|AC_3|=12$, it follows that $G\cong A\times C_3$

Since A and C_3 are abelian, we see that G is abelian.

Case 3:

If G has one 2-SSG which is C_4 and four 3-SSG.

Let $C_4=(a)$, and (b) be a 3-SSG, then $a^4=1$ and $b^3=1$

Since C_4 is normal, we have $bab^{-1}\in C_4$ *and* $0(bab^{-1})=0(a)$ *Thus* $bab^{-1}=a$ or $bab^{-1}=a^3$

(1) If $bab^{-1} = a$, $\Rightarrow ba = ab \quad \rightarrow\leftarrow$

(2) $bab^{-1} = a^3 \Rightarrow ba = a^3 b$

$\Rightarrow a = b^3 a = b^2 a^3 b = b(a^9 b)b = a^{27} b^3 = a^3$

$\Rightarrow a^2 = 1 \quad \rightarrow\leftarrow$

Therefore there is no non-abelian groups of order 12 which have one 2-SSG, C_4, and four 3-SSG.

Case 4:

If G has one 2-SSG, V_4, where $V_4 \cong K_4$, and has four 3-SSG. Since $V_4 \cong K_4$ We can let

$V_4 = \{ 1, r, s, rs \}$, $rs = sr = t$, $s^2 = t^2 = r^2 = 1$

and let (a) be a 3-SSG.

Since V_4 is normal, then we have $ara^{-1} \in V_4$

(1) If $axa^{-1} = x$, for all $x \in V_4$, *then* $G = (a) \cup V_4$ is abelian

(2) Without loss of generality., We may assume

$ara^{-1} = s$

$\Rightarrow ar = sa$

$\Rightarrow r = a^{-1} s a$

$\Rightarrow a^{-1} ra = a^{-2} sa^2 = asa^{-1} \quad (\because a^3 = 1)$

If $asa^{-1} = s$, $\Rightarrow as = sa \quad \rightarrow\leftarrow$

If $asa^{-1} = r \Rightarrow a^{-1} ra = r \Rightarrow ra = ar \quad \rightarrow\leftarrow$

Hence $asa^{-1} = rs = t \Rightarrow ata^{-1} = ara^{-1} asa^{-1} = st = s^2 r = r$

Thus we have the relation
$$\begin{aligned} ar &= sa \\ as &= ta \\ at &= ra \end{aligned}$$

This shows that $\{ a, r, s, t : a^3 = r^2 = s^2 = t^2 = 1 \ ar = sa \ as = ta,$ $at = ra , rs = sr = t \}$ gives a non-abelian group G of order 12. Since the alternating group A_4 satisfos the relation, then we know $G \cong A_4$

Case 5:

If G has three 2-SSG, each isomorphic to K_4, and G has one 3-SSG, $C_3=(a)$.

Let A= $\{1, r, s, rs : rs = sr = t, s^2 = t^2 = r^2 = 1\}$ be a 2-SSG

Since C_3 is normal, it follows that $rar^{-1} = rar \in C_3$, $sas^{-1} = sas \in C_3$ If $rar = a^2$, $sas = a^2 \Rightarrow (rs)a(sr) = r(sas)r = ra^2r = a$

So without loss of generality we may assume

$rar = a$ If $sas = a \Rightarrow rsars = rsasr = rar = a$

We see that G= $C_3 \cup A$ is abelian, Hence we assume that $sas = a^2$ this implies

$$rsars = srars = sas = a^2$$

Therefore we have the relations $ra = ar$

$$sa = a^2 s$$

Let $x = ra = ar$, $y = s$ then we have

$$x^6 = (ra)^6 = (ra)(ar)(ra)(ar) = ra^2r^2a^2r^2a^2r = r^2 = 1$$

$$y^2 = s^2 = 1$$

$$yx = sra = rsa = ra^2s = x^5y$$

Then by theorem 3, We know that the group presentation

$$\{x, y : x^6 = 1, y^2 = 1, yx = x^5 y\}$$

gives a group G of order 12. Since $yx = x^5y \neq xy$, hence G is non-abelian. Since the dihedral group D_6 satisfies the relation, we have $G \cong D_6$

Case 6:

If G has three 2-SSG each is a cyclie group of order 4. and has one 3-SSG.

Let B=(b) be a 2-SSG, A=(a) be a 3-SSG, then $a^3 = 1$, $b^4 = 1$ Since A is normal, we have $bab^{-1} \in A$ then bab^{-1} will equal to a or a^2

(1) $If\ bab^{-1} = a \Rightarrow ba = ab \rightarrow\leftarrow$

(2) $If\ bab^{-1} = b^2 \Rightarrow ba = a^2b$ By theorem 3, the group

presentation $\{ a , b : a^3 = 1 , b^4 = 1 , ba = a^2b \}$

gives a group G of order 12. Since $ba=a^2b \neq ab$

G is non-abelian.

From the proceeding discussion, there is three non-abelian groups of order 12 with group presentations:

① $\{ a , r , s , t : a^3 = r^2 = s^2 = t^2 = 1 , ar = sa , as = ta , at = ra , rs = sr = t \} \cong A_4$

② $\{ a , b : a^6 = 1 , b^2 = 1 , ba = a^5b \} \cong D_6$

③ $\{ a , b : a^3 = 1 , b^4 = 1 , ba = a^2b \}$

5. Non-abelian groups of order 14.

Let G be non-abelian group of order 14.

Since $14=7\times2$, by sylow Theorem, G contains a normal subgroup H of order 7 and H is cyclic. Let (a)=H.

then $G/H \cong Z_2$ and $a^7 = 1$

Let $b \in G$, $b \notin H$, then $b^2 \in H$ and $b^2=1$ otherwise, $0(b)=14$.

Since H is normal, then $bHb^{-1} = H$. In particular, $bab^{-1} \in H$

Hence bab^{-1} will equal to $a , a^2 , a^3 , a^4 , a^5 , a^6$

(1) If $bab^{-1} = a \Rightarrow ba = ab \rightarrow\leftarrow$

(2) If $bab^{-1} = b^2 \Rightarrow ba = a^2b$

$$\Rightarrow a = b^2a = ba^2b = a^2bab = a^4b^2 = a^4$$

$$\Rightarrow a^3 = 1 \rightarrow\leftarrow \text{since } 0(a) = 7$$

(3) If $bab^{-1} = a^3 \Rightarrow ba = a^3b$

$$\Rightarrow a = b^2a = ba^3b = baa^2b = a^3ba^2b = a^6bab = a^6a^3b^2$$

$$= a^2b^2 = a^2$$

$$\Rightarrow a = 1 \qquad \rightarrow\leftarrow$$

(4) If $bab^{-1} = a^4 \Rightarrow ba = a^4b$

$$\Rightarrow a = b^2a = ba^4b = a^4ba^3b = a^8ba^2b = a^8a^4bab$$

$$= a^{12} a^4 b^2 = a^{16} b^2 = a^2 b^2 = a^2$$

$$\Rightarrow a = 1 \quad \rightarrow\leftarrow$$

(5) $If \quad bab^{-1} = a^5 \Rightarrow ba = a^5 b$

$$\Rightarrow a = b^2 a = ba^5 b = a^5 ba^4 b = a^5 a^5 ba^3 b$$

$$= a^{10} a^5 ba^2 b = a^{20} bab = a^{20} a^5 b^2$$

$$= a^4 b^2 = a^4$$

$$\Rightarrow a^3 = 1, \quad \rightarrow\leftarrow \text{ since } 0(a) = 7$$

(6) $If \quad bab^{-1} = a^6 \Rightarrow ba = a^6 b$, by theorem 3, the group presentation $\{ a, b : a^7 = 1 , b^2 = 1 , ba = a^6 b \}$ gives a group G of order 14. Since D_7 satisfies all the relations of G, hence there is exactly one non-abelian group of order 14.

BIBLIOGRAPHY

1. John. B. Fraleigh : A First course in Abstract Algebra.
2. Dean. R. A. : Elements of Abstract Algebra.
3. Burton : Abetract and Linear Algebra.
4. Herstein : Topics in Algebra.
5. H.S.M. Coxeter. W.O. Moser: Generators and Relations for Discrete Groups.
6. 師大數學，12期，陳創義：簡單非交換群形態。

正規子羣

指導老師 趙文敏

作者 陳火炎

在研究不是單純群（ simple group ）的群時，常常要找出它的正規子群，因此常常引用由正規子群及正規子群的正規子群組成的正規子群列，這裏我們討論這種重要的子群列。

群G的有限個子群G_i所成的子群列

(*) $$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_k = \{1\}$$

叫做G的一個正規群列，k叫做此正規群列的長，這裏$G_{i+1} \lhd G_i \ \forall i$ 。

任意群除了單位群（ $i.e.$ $G = \{1\}$ ）外，顯然都有正規群列。例如$G \supset \{1\}$就是群G的正規群列。若G不為單純群，H為異於G及$\{1\}$的正規子群，那麼$G \supset H \supset \{1\}$也是$G$的正規群列。

商群列G/G_1，G_1/G_2，…，$G_{k-1}/\{1\}$叫做正規群列(*)的商群列。一個群的兩個正規群列，若它們的長相等，依照某一個順序可以使第一個正規群列的商群與第二個正規群列的商群一對一對應，並且所對應的商群又都同構，那麼這兩個正規群列叫做等價（ equivalent ）。

例如秩為 6 的循環群(a)的兩個正規群列$(a) \supset (a^2) \supset \{1\}$，$(a) \supset (a^3) \supset \{1\}$為等價，這是因為它們的商群列都是由秩為 2 及 3 的兩個循環群組成的。

（**）若$G=H_0\supset H_1\supset\cdots\supset H_l=\{1\}$也是$G$的一個正規群列，如果$G$的正規群列（*）中每個子群$G_i$與（**）中某一個子群$H_j$相等，則（**）叫做（*）的加細（refinement）。

一個群的任意兩個正規群列顯然不一定等價，但是它們的加細能否等價？下面我們來討論（*），（**）的等價加細。

首先我們來考慮（*），（**）如何加細其長才相等，商群依怎樣的順序同構？因爲（*）的長爲k，（**）的長爲ℓ，假如我們在（*）中每二個子群G_{i-1}，G_i之間都插入$\ell-1$個子群G_{ij}，在（**）中每二個H_{j-1}，H_j之間都插入$k-1$個子群H_{ij}，即假如有

(1)
$$G_{i-1}=G_{i0}\supseteq G_{i1}\supseteq\cdots\supseteq G_{il}=G_i,\ i=1,2,\cdots,k,$$
$$H_{j-1}=H_{0j}\supseteq H_{1j}\supseteq\cdots\supseteq H_{kj}=H_j,\ j=1,2,\cdots,\ell,$$

那麼這二個加細都包含$k\ell$個子群，若前者第i組的ℓ個商群順次的與後者各組的第i個商群同構，即

(2)
$$G_{ij-1}\big/G_{ij}\cong H_{i-1j}\big/H_{ij},$$

那麼這兩個加細也就等價了。

我們知道適合條件(2)的G_{ij}，H_{ij}，當然也適合條件(1)，但如何來挑選適合條件(2)的這些G_{ij}及H_{ij}呢？因爲$G_{i-1}\supseteq G_{ij}\supseteq G_i$，$H_{j-1}\supseteq H_{ij}\supseteq H_j$我們可以取$G_{ij}=G_iK_{ij}$，$K_{ij}\subseteq G_{i-1}$；$H_{ij}=H_iL_{ij}$，$L_{ij}\subseteq H_{j-1}$。

因此條件(2)即變爲條件 $G_iK_{ij-1}\big/G_iK_{ij}\cong H_jL_{i-1j}\big/H_jL_{ij}$

根據第三同構定理知我們只要取$K_{ij}=G_{i-1}\cap H_j$，$L_{ij}=H_{j-1}\cap G_i$就行了，也就是說，我們取

$$G_{ij}=G_i(G_{i-1}\cap H_j),\ H_{ij}=H_j(H_{j-1}\cap G_i)$$

條件(2)即告成立。

再者，若$G_{ij-1}=G_{ij}$，那麼$G_{ij-1}\big/G_{ij}=\{1\}$，因此$H_{i-1j}=H_{ij}$，反之，若$H_{i-1j}=H_{ij}$，那麼$G_{ij-1}=G_{ij}$。

這就是說把這樣的G_{ij}插入G_{i-1}，G_i之間，刪去相等的所得到長不大於$K\ell$的（*）的加細與把H_{ij}插入H_{j-1}，H_j之間，刪去相等的所得到（**）的加細等價，故我們有下面

Schreier 定理。

定理 1：一個群的任意兩個正規群列有等價的加細

例如$G=(a)$爲秩 12 的循環群，$(a)\supset(a^2)\supset\{1\}$，$(a)\supset(a^3)\supset\{1\}$

是它的兩個正規群列，這時$G_0=H_0=(a)$，$G_1=(a^2)$，$H_1=(a^3)$，$G_2=H_2=\{1\}$，於是我們有

$$G_{11}=G_1H_1=G_0,\qquad G_{21}=G_1\cap H_1=(a^6)$$
$$H_{11}=H_1G_1=H_0,\qquad H_{12}=H_1\cap G_1=(a^6)$$

因此$(a)\supset(a^2)\supset(a^6)\supset\{1\}$，　　$(a)\supset(a^3)\supset(a^6)\supset\{1\}$

是上面兩個正規群列的等價加細。

定義1：一個正規群列如果沒有異於它自身的加細，就叫做合成群列（composition series）。

顯然有限群是有合成群列的。一個正規群列有時可以加細成爲合成群列，例如上面的$(a)\supset(a^2)\supset(a^6)\supset\{1\}$就是加細$(a)\supset(a^2)\supset\{1\}$所成的合成群列。但也有時不論如何加細終不能使它成爲合成群列的，例如$G=(a)$的無限循環群，$G\supset G_1\supset\cdots\supset G_{k-1}\supset G_k=\{1\}$是它的任意正規群列，如果$G_{k-1}=(a^m)$，那麼$G_{k-1}$，$\{1\}$之間還有正規子群$(a^{2m})$存在，所以這時無論如何加細不能使這正規群列成爲合成群列。因此任一群不一定都有合成群列。一個正規群列也不一定都能夠加細成爲合成群列。

根據定理1，我們立即得到下面關於合成群列的兩個主要定理。

定理2：一個群的任意兩個合成群列等價。

這定理叫做Jordan-Hölder定理。因此，一個群如果有合成群列，那麼它的合成群列的長是一定的，這長又叫做這群的長。

定理3：一個群如果有合成群列，那麼它的任意正規群列都能夠加細成爲合成群列。

下面我們來討論正規群列是合成群列的充要條件。

若G爲一群，H是它的正規子群，如果G中除G及H自身外，不再有包含H的正規子群，那麼H稱爲G的一個極大正規子群。若H爲G的正規子群，令$\overline{G}=G/H$，則很容易看出H爲G的極大正規子群若且唯若$\overline{G}$爲單純群。因此可得正規群列(*)是合成群列的充要條件是G_{i-1}/G_i（$i=1,2,3,\cdots,k$）爲單純群，由定理2可知這些單純群G_{i-1}/G_i由G所唯一決定。

引用正規群列，我們也可以把群來分類。

定義2：若群G有商群都是可換的正規群列，就稱G爲可解群（Solvable group），而此群列稱爲G的可解群列（Solvable series）。

顯然，任意交換群均爲可解群。因爲秩爲質數的群是循環群，故也是交換群，所以群的一個正規群列中每個商群的秩如爲質數，那麼這個群就是可解群。因爲有

限可換群只有秩爲質數時才是單純群，故我們可以明瞭可解群是有限群時，它的合成群列的商群的秩均爲質數。

定理4：當$n \geq 5$，S_n爲不可解群。

證明：$S_n \supset A_n \supset \{1\}$ 爲S_n的一個正規群列。

因爲其商群爲$\sigma(2)$（表秩爲2的循環群）及A_n，且當$n \geq 5$時，A_n爲一單純群，故$S_n \supset A_n \supset \{1\}$爲一合成群列，但$A_n$的秩不爲質數，再由Jordan-Hölder定理知，S_n爲不可解群。

雖然可換群是可解群，但可解群可不一定是可換群，且可解群的任意正規群列的商群也不一定都是可換群。例如S_4的正規群列$S_4 \supset \{1\}$的商群S_4就不是可換群。但由定理1及第一同構定理，我們能夠加細使它成爲商群都是可換群的正規群列，因此如可解群有合成群列，那麼合成群列的商群都是可換單純群。

設$D(G)$爲G的換位子群（Commutator Subgroup），$D^2(G)$爲$D(G)$的換位子群，$D^{m+1}(G)$爲$D^m(G)$的換位子群。於是，若$D^k(G)=\{1\}$，我們可得$G=D^0(G) \supset D(G) \supset \cdots \supset D^k(G)=\{1\}$。是$G$的正規群列，且其商群均爲可換群，故此時的$G$是可解群。反之，若$G$爲可解群，它的正規群列$G=G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_k=\{1\}$的商群$G_{i-1}/G_i$都是可換群，因$G/G_2$爲可換群，則$D(G) \subseteq G_1$，又因$G_1/G_2$亦爲可換群，所以$D(G_1) \subseteq G_2$，但$D^2(G) \subseteq D(G_1)$，所以$D^2(G) \subseteq G_2$，對於一般而言，我們有$D^i(G) \subseteq G_i$。

於是$D^k(G)=\{1\}$。因此我們得到下面可解群的充要條件。

定理5：群G是可解群的充要條件是存在某一正整數k，使得$D^k(G)=\{1\}$，即G有正規群列 $G=D^0(G) \supset D(G) \supset \cdots \supset D^k(G)=\{1\}$。

下面是可解群的四個重要性質。

定理6：可解群的子群是可解群。

證明：設H爲可解群G的子群，因$D^k(H) \subseteq D^k(G)=\{1\}$，所以$H$是可解群。

定理7：可解群的商群是可解群。

證明：令$G=G_0 \supset \cdots \supset G_n=\{1\}$ (3)爲可解群列，今$G \supset H \supset \{1\}$爲正規群列，由定理1知存在有一與(3)式等價的加細令此等價加細爲$G=K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset H \supset \cdots \supset \{1\}$。

考慮群列 $G/H \supset K_1/H \supset K_2/H \supset \cdots \supset H/H=\{1\}$。

由第一同構定理的系可得 $\dfrac{(K_i/H)}{(K_{i+1}/H)} \cong \dfrac{K_i}{K_{i+1}}$ 爲交換群，因此$\dfrac{G}{H}$爲可解群。

定理8：若$H \lhd G$，且H及G/H均爲可解群，則G爲可解群。

證明：令$G/H \supset K_1^* \supset K_2^* \supset \cdots \supset \{1\}$ 爲可解群列，由對應定理知存在子群K_i

且$K_{i+1} \lhd K_i$，K_i/K_{i+1} 爲可換群，且$G=G_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset H$。

又H爲可解群時，故有一可解群列$H=H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset \{1\}$。

因此將此兩群列連結起來得一G的可解群列$G=G_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset H \supset H_1 \supset \cdots \supset \{1\}$。因此$G$爲可解群。

定理9：若H及K均爲可解群，則$H \times K$亦爲可解群。

證明：若$G=H\times K$，則$H \lhd G$且$G/H \cong K$，由定理8知G爲可解群。

最後我們來介紹二類重要的可解群。

定理10：每一有限p群G是可解群。

證明：設G的秩爲p^n，我們對n來作歸納。

當$n=1$時，G爲循環群，顯然此定理成立，設C爲G的中心（Center），因爲C的秩大於1，所以$\bar{G}=G/C$的秩爲p^k，$k<n$，根據歸納法假設，$\bar{G}$爲可解群，因爲C爲可換群，故爲可解群，由定理8，我們得證G爲可解群。

下面是範圍較大的一類可解群。

設H爲群G的正規子群，那麼由所有形狀像$a^{-1}h^{-1}ah$，$a\in G$，$h\in H$的換位子（Commutator）生成的子群，用$D[G,H]$來表示它，顯然$D[G,G]=D(G)$。因H爲G的正規子群，所以$a^{-1}h^{-1}ah\in H$，因此$D[G,H]\subseteq H$，對任意$g\in D[G,H]$，我們有$aga^{-1}g^{-1}\in D[G,H]$，於是$aga^{-1}\in D[G,H]$，所以$D[G,H]$爲G的正規子群。

今令$D[G,G]=G_1$，$D[G,G_1]=G_2$，…，$D[G,G_{i-1}]=G_i$，若存在某一正整數m，使得$G_m=D[G,G_{m-1}]=\{1\}$，那麼G稱爲零冪群（nil-potent group），顯然可換群是零冪群。

定理11：零冪群是可解群。

證明：設G爲零冪群，則$G_m=D[G,G_{m-1}]=\{1\}$，因爲$D(G)=G_1$，$D(G_1)=D[G_1,G_1]\subseteq D[G,G_1]=G_2$，所以$D^2(G)=D(G_1)\subseteq G_2$。對於一般而言，$D^i(G)\subseteq G_i$，但$G_m=\{1\}$，所以$D^m(G)=\{1\}$，於

是G為可解群。

與上面類似，對於環也有合成環列，且一個環的任意兩個合成環列也等價。同樣，體也有所謂的合成體列，體K的子體列（subfield series）。

$$K=K_0\supset K_1\supset\cdots\supset K_l=\varDelta\ ,\ \varDelta \text{為質體}$$

其中K_{i-1}是K_i的正規擴張體，並且各體間不存在眞中間正規擴張體，叫做合成體列。若K_i關於K_{i-1}的次數為n_{i-1}，那麼

$$n_0,\ n_1,\cdots,\ n_l$$

叫做K的次數列。當次數列中的數均為質數時，K叫做可解體。

參考資料

Rotman：The Theory of groups, 2nd Edition, P. 103 ～P. 120.

謬　　論

命題　如果一群摩托車騎士中有一位戴安全帽，則這一群騎士全體都戴安全帽。

證明　設這群騎士的人數為n，我們要對n做數學歸納。

起步：如果一群騎士的人數為1，則這一位戴了安全帽就等於全體都戴了安全帽。

假設：若一群騎士的人數為$n-1$，則命題是對的。

遞推：若一群騎士有n位，設為

$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$。

若其中有一位戴安全帽，設為a_1。考慮$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{n-1}$這一群騎士，他們一共有$n-1$位，而且$a_1$戴了安全帽，所以由數學歸納法的假設部分知，

$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{n-1}$

都戴了安全帽。再考慮

$a_1, a_3, \cdots\cdots, a_n$

這一群騎士，他們也有$n-1$位，而且a_2戴了安全帽（前面已經證過），所以又推得他們都戴安全帽。這樣a_n也戴了安全帽。你看，

$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$

都戴了安全帽，不是嗎？所以命題為眞。

系　臺北市的騎士都戴安全帽。

證明　考慮臺北市所有的騎士，他們之中至少有一位戴安全帽（不信，你到街上看看。）因為我們已經證明命題為眞，所以臺北市的騎士都戴安全帽。

淺談羣論——商羣

易正明

群在代數上佔一重要之角色，此乃環、體以及更高深的代數理論，皆以其結構爲基礎。

記得當我拿到甸甸的一本，起初總是正、反面分不清，那時學長便提醒着：不要小看它，這一學期因它的出現將使你忙的昏頭轉向，但搞懂了將因它而得更多的喜悅和樂趣。

我們都知道，函數就是一種關係（relation）。而一種關係～成爲等價關係（equivalence relation）必須具備三個條件：

(a) $a \sim a$

(b) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

(c) $a \sim b$ & $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

若集合 X，具有等價關係則：

(i) $[a] = [b]$，或 $[a] \cap [b] = \phi$

(ii) $X/\sim = \{ [a] \mid a \in X \}$ 且 $\bigcup X/\sim = X$

註：$[a] = \{ b \in X \mid b \sim a \}$ 是含 a 的等價集（equivalence class）。

明顯地，一個等價關係對應一種分割（partition）（註），換言之，集合中的等價關係視爲分割此集合。

設 G 爲一群，H 爲 G 的一個子群，在 G 中定義一個關係 $\equiv_{\ell}$（mod H）如下：

$a \equiv_{\ell} b \ (\bmod H) \Longleftrightarrow a^{-1}b \in H$。

我們欲證$\equiv_{\ell}$（$\bmod H$）爲一個等價關係。

證：(i) $a^{-1}a = e \in H$，故 $a \equiv_{\ell} a \ (\bmod H)$　　（e 是單位元）

(ii) $a \equiv_{\ell} b \ (\bmod H)$，則$a^{-1}b \in H$

因爲H是G的一個子群，故由$a^{-1}b \in H$，得$b^{-1}a = (a^{-1}b)^{-1} \in H$，

因此$b \equiv_{\ell} a \ (\bmod H)$

(iii) 若$a \equiv_{\ell} b \ (\bmod H)$，　$b \equiv_{\ell} c \ (\bmod H)$

則$a^{-1}b$，　$b^{-1}c \in H$

因爲$(a^{-1}b)(b^{-1}c) \in H$

$a^{-1}c \in H$　故 $a \equiv_{\ell} c \ (\bmod H)$

因此$\equiv_{\ell}$（$\bmod H$）是一個等價關係　#

有了等價關係，接着就是找出等價集，此時等價集恰是左旁集。

註：$aH = \{ah \mid h \in H\}$ 稱爲H在G中的一個左旁集。

證：$[a] = \{x \in G \mid a \equiv_{\ell} x \ (\bmod H)\}$

若$x \in [a]$，則$a \equiv_{\ell} x \ (\bmod H)$

$a^{-1}x \in H$　必存在$h \in H$，滿足$h = a^{-1}x$

$h = a^{-1}x \Rightarrow x = ah \in aH$，故$[a] \subset aH$ ………(1)

若$b \in aH$，則必存在一個$h \in H$，使得$b = ah$，$h \in H$

$a^{-1}b = h \in H \Rightarrow a \equiv_{\ell} b \ (\bmod H)$

$a \equiv_{\ell} b \ (\bmod H) \Rightarrow b \in [a]$，故$aH \subset [a]$ …(2)

由(1)，(2)得$[a] = aH$

$\equiv_{\ell}$（$\bmod H$）爲一等價關係自然地對應一分割，且知$[a] = aH$，

故：(i) $a, b \in H$，恆有$aH = bH$或$aH \cap bH = \phi$

(ii) $\bigcup_{a \in G} aH \in G$　成立

函數$H \to aH$爲一對一且映成，及上式(i) 可得 Lagrenge 定理。

$o(G) = [G : H] \times o(H)$

同理，我們亦可定義$a \equiv_{r} b \ (\bmod H)$爲$ab^{-1} \in H$ 亦可得一個等價關係，又等價集 $[a] = Ha$右旁集。

故：(i) a，$b \in H$，恆有$Ha = Hb$或$Ha \cap Hb = \phi$

(ii) $\bigcup_{\theta a \in G} Ha = G$　亦成立。

特殊地，當$Ha = aH$，$\forall a \in G$，則H爲G的正規子群（normal subgroup）如此商群，即被定義，記爲G/H。

$G/H = \{ aH \mid a \in G \}$

註：因爲 $Ha = aH$ 故以 $\equiv_{\ell}(\bmod H)$ 和 $\equiv_{r}(\bmod H)$ 分割皆同義，一般以 $\equiv_{\ell}(\bmod H)$ 來定義。

玆就商群所演生的 Z_n，K_4，S_3 模式加以探討。

例題(一) $Z_n = \{ [0], [1], [2], \cdots\cdots, [n-1], \}$

$(Z_1 +)$ 爲整數以加深運算所形成的群

$H = nZ = \{ nk \mid k \in Z \} = (n)$ 是 (Z_1+) 的一個子群

但 $(Z, +)$ 是循環群（cyclic group）。故 $H = (n)$ 是 $(Z, +)$ 的正規子群。

因此 $Z/(n)$ 有 $0+(n), 1+(n), 2+(n), \cdots, (n-1)+n$ 共 n 個

故得 $Zn = Z/nZ = Z/(n) = \{ [0], [1], [2], [3], \cdots\cdots, [n-1] \}$

例題(二) $K_4 = \{ e, a, b, ab \}$ 爲 Klein 4-group.

cent $G_s = \{ e, r_2 \}$ 爲 G_s 的正規子群

G_s 爲正方形對稱作用演生而成（symmetries af the square）

$G_s = \{ e, r_1, r_2, r_3, h, v, d_1, d_2 \}$

參見圖①：得 $e = (1)$，$r_1 = (1234)$，$r_2 = (13)(24)$，

$r_3 = (1432)$，$h = (12)(34)$，$v = (14)(23)$

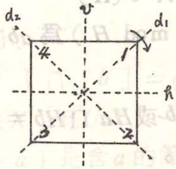
$d_1 = (24)$，$d_2 = (13)$

$G_s/\text{cent}\,G_s$ 有 cent $G_s = e\{e, r_2\} = \{e, r_2\} = r_2 G_s$

$r_1 \text{ cent } G_s = r_1\{e, r_2\} = \{r_1, r_3\} = r_3 G_s$

$h \text{ cent } G_s = h\{e, r_2\} = \{h_1, v\} = v \text{ cent} G_s$

$d_1 \text{cent} G_s = d_1\{e, r_2\} = \{d_1, d_2\} = d_2 \text{ cent } G_s$



圖①

註：$e = (1)$，$r_1 = (1234)$，$r_2 = (13)(24)$，$r_3 = (1432)$，

$h = (12)(34)$，$v = (14)(23)$，$d_1 = (24)$，$d_2 = (13)$

	e cent G_s	h cent G_s	$d_1$cent G_s
e cent G_s	e cent G_s	h cent G_s	$d_1$cent G_s
r_1 cent G_s	$r_1$cent G_s	$d_1$cent G_s	h cent G_s
h cent G_s	h cent G_s	e cent G_s	$r_1$cent G_s
d_1 cent G_s	$d_1$cent G_s	$r_1$cent G_s	e cent G_s

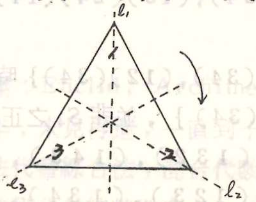
$\therefore \; G_s \big/ \text{cent}\, G_s$ 亦爲一種K_4

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

圖②

例題㈢ $S_3 = \{ e \,,\, r_1 \,,\, r_2 \,,\, \ell_1 \,,\, \ell_2 \,,\, \ell_3 \}$

取$K_4 = \{ (1), (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$



圖③

$S_4 \big/ K_4$ 有 $(12)K_4 = \{ (12), (34), (1324), (1423) \}$

$(13)K_4 = \{ (13), (1234), (24), (1432) \}$

$(23)K_4 = \{ (23), (1342), (1243), (14) \}$

$(123)K_4 = \{ (123), (134), (243), (142) \}$

$(132)K_4 = \{ (132), (234), (124), (143) \}$

$(1)K_4 = \{ (1), (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$

$e = (1)$, $r_1 = (123)$, $r_2 = (132)$, $\ell_1 = (23)$, $\ell_2 = (13)$, $\ell_3 = (12)$

$\therefore$ the qustient group $S_4 \big/ K_4$ 爲S_3

若㈢之K_4爲：$\{ (1), (12), (34), (12)(34) \}$

即$K_4 = \{ (1), (12), (34), (12)(34) \}$

則 S_4/K_4 有 $(13)K_4=\{(13),(123),(134),(1234)\}$

$(14)K_4=\{(14),(124),(143),(1243)\}$

$(23)K_4=\{(23),(132),(234),(1342)\}$

$(24)K_4=\{(24),(142),(243),(1342)\}$

$(13)(24)K_4=\{(13)(24),(1423),(1324),(14)(23)\}$

	K_4	$(13)K_4$	$(14)K_4$	$(23)K_4$	$(24)K_4$	$(13)(24)K_4$
K_4	K_4	$(13)K_4$	$(14)K_4$	$(23)K_4$	$(24)K_4$	$(13)(24)K_4$
$(13)K_4$	$(13)K_4$	K_4	$(14)K_4$	$(23)K_4$	$(13)(24)K_4$	$(24)K_4$
$(14)K_4$	$(14)K_4$	$(13)K_4$	K_4	$(13)(24)K_4$	$(24)K_4$	$(23)K_4$
$(23)K_4$	$(23)K_4$	$(13)K_4$	$(13)(24)K_4$	K_4	$(24)K_4$	$(14)K_4$
$(24)K_4$	$(24)K_4$	$(13)(24)K_4$	$(14)K_4$	$(23)K_4$	K_4	$(13)K_4$
$(13)(24)K_4$	$(13)(24)K_4$	$(24)K_4$	$(14)K_4$	$(23)K_4$	$(13)K_4$	K_4

由上表知 $S_4/K_4=\{K_4,(13)K_4,(14)K_4,(23)K_4,(24)K_4,(13)(24)K_4\}$ 並非符合群之條件，即 S_4/K_4 不可定義。

當 $K_4=\{(1),(12)(34),(13)(24)(14)(23)\}$ 時，顯然 S_4/K_4 爲 S_3 之型式。

但 $K_4=\{(1),(12),(34),(12)(34)\}$ 時，則無意義，此乃 $K_4=\{(1),(12),(34),(12)(34)\}$，並非 S_4 之正規子群。

因 $(13)K_4=\{(13),(132),(143),(1432)\}$

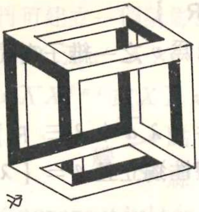
$K_4(13)=\{(13),(123),(134),(1423)\}$

$(13)K_4\neq K_4(13)$

綜上所得，一個商群（quotient group），必須由其正規子群來分割，而其本身已具備了等價關係（equivalence relation）。顧名思議商集的商就是除，套上 Lagrange theorem，可得 $o(G/N)=\dfrac{o(G)}{o(N)}$。由例題更可見其一般。

註：$o(G)$ 表示群 G 所含有的元素個數。

註：分割卽指對一個集合的分割，而其分割後的子集滿足等價關係所得的性質。



錯在那裏？

每個交角均為90°

射影幾何學

指導老師 王詩頌

作者 戈良芬

古代幾何學經希臘三傑：Euclid，Archimedes，Apollonius 之整理；增修而大備，然其間中綴多年，未見再進，一直到十七世紀笛卡爾（1596－1560）發明解析幾何，以解析法代替綜合法，混合代數學、三角學於幾何學，使數與形密切連繫，雖進步甚速，然則失其純粹性矣！

射影幾何學始於法之 poncelet（1788－1867）以研究射影性質為主，特別注意位置及方向，極有助於近世綜合幾何學之進展。射影幾何自誕生演進以來，已在數學中佔一重要席位，其中最大特色是它常被利用來賦予解決某些極為困難或非屬直覺的定理予以簡短有力的證明。因為射影幾何學中的定理往往來源特異而其結論卻出人意料，所以已經被認為遠比歐氏幾何學中更來得神秘與怪誕，然而這也說明了射影方法的威力。

現在大略地比較一下歐氏幾何學與射影幾何之相異處：

歐氏幾何：以直尺及圓規為作圖工具，以度量識別圖形之異同。

射影幾何：僅以直尺為作圖工具，以射影性來識別圖形之異同。

在射影幾何學中，它沒有圓（circle）無距離（dist ance），無在其間（Betweenness or intermediacy），無平行線（parallelism）等名詞，沒有這些名詞而建立的一套幾何學，您是否會覺得驚訝呢？

若給予 $V=R^3$，$F=R$ 且點：一維子空間，以 $A=\{\lambda\vec{a}\mid\lambda\in R\}$ 表

之。

線：二維子空間，以$\ell=\{\lambda\vec{a}+u\vec{b}，\lambda，u\in \mathrm{R}\}$

在這些約定下，R^3 為射影平面，$S=\{A\mid A$為v之一維子空間$\}$，$F=\{\ell\mid \ell$為 R^3 之二維子空間$\}$，則須滿足

（Ⅰ）任選二個相異二點，恰可決定一直線。$A=\{\lambda\vec{a}\mid\lambda\in \mathrm{R}\}$，$B=\{\lambda\vec{b}\mid\lambda\in \mathrm{R}\}$，若$A\neq B\Longleftrightarrow\vec{a}$，$\vec{b}$線性獨立且$\ell=\{\lambda\vec{a}+u\vec{b}\mid\lambda，u\in \mathrm{R}\}\in F$。

（Ⅱ）共平面之相異兩線恰有一交點。

$\ell_1\neq\ell_2$，$\because \dim(\ell_1+\ell_2)=\dim\ell_1+\dim\ell_2-\dim(\ell_1\cap\ell_2)$，

又$\dim(\ell_1+\ell_2)>2$，$\therefore\dim(\ell_1+\ell_2)=3\Rightarrow\dim(\ell_1\cap\ell_2)=1$，

故$\ell_1\cap\ell_2$代表一點（i.e,射影平面無平行觀念）其中$\ell_1+\ell_2=\{u_1+u_2\mid u_1\in\ell_1，\vec{u}_2\in\ell_2\}$ dim即dimensiou（維度）。

（Ⅲ）射影平面包含不共線三點。

設$\{\vec{e}_1，\vec{e}_2，\vec{e}_3\}$為 R^3 之基底$\Rightarrow\{\lambda\vec{e}_1\}\ \{u\vec{e}_2\}\ \{v\vec{e}_3\}$為不共線之三點。

（Ⅳ）每一直線至少含相異三點

$\ell=\{\lambda\vec{a}+u\vec{b}\mid\lambda,u\in \mathrm{R}\}$，取$A=\{\lambda\vec{a}\mid\lambda\in \mathrm{R}\}$，$B=\{u\vec{b}\mid u\in \mathrm{R}\}$，$C=\{\lambda(\vec{a}+\vec{b})\mid\lambda\in \mathrm{R}\}$，則$A，B，C$為相異三點。

現在讓我們介紹二個變換：在射影幾何中討論的是幾何圖形中的射影性質，即點的共線與線的共點（即諸線交於一點）。

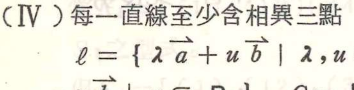
1.射影變換（projectivities）

首先介紹二個名詞：

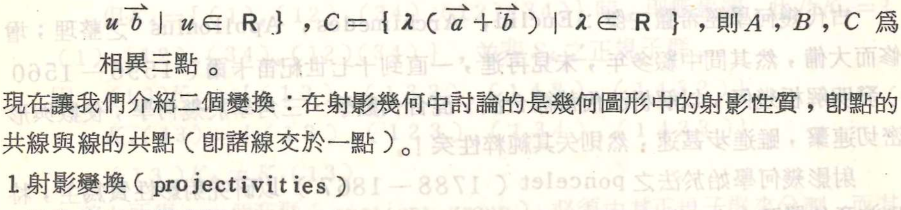
(a)點列（range）：在同一直線上所有點所成之集合。

(b)線束（pencil）：在同一平面上經過同一點之所有直線所成之集合。

考慮「點列」與「線束」之關係：設X是一個變點，而x是線束的相關線（corresponding line)。$X\ \overline{\wedge}\ x$表示X與x是相關的（incident）如圖：



吾人推廣此一變換如下：



我們令此一系列（sequence），由點開始或由線結束（當然任兩交替元素是相異的）於是我們可建立一個射影變換：

$$X \,\overline{\Lambda}\, x \,\overline{\Lambda}\, X' \,\overline{\Lambda}\, x' \,\overline{\Lambda}\, X'' \,\overline{\Lambda}\, x'' \,\overline{\Lambda} \cdots\cdots \overline{\Lambda}\, X^{(n)} \,\overline{\Lambda}\, x^{(n)}$$

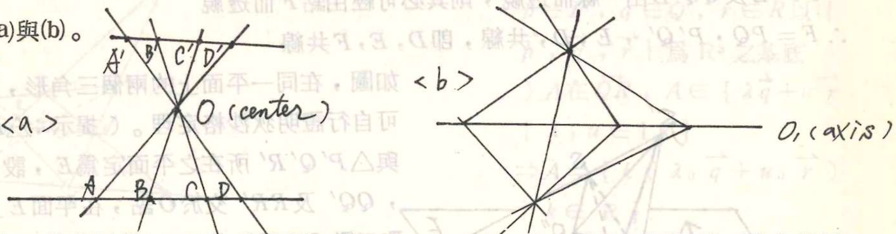
吾人可寫成 $x \,\overline{\Lambda}\, X^{(n)}$ 或 $X \,\overline{\Lambda}\, x^{(n)}$ 或 $X \,\tilde{\Lambda}\, X^{(n)}$

即點 ↗ 點 ↘ 線　　線 ↗ 點 ↘ 線　　此即為射影變換

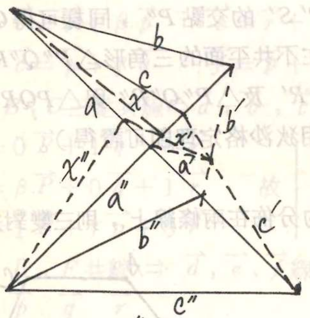
2.透視變換（perspectivites）：

即兩個"基本對應"（Elementary correspondence）之合成對應，用"$\overline{\overline{\Lambda}}$"（two bar）表之。其置換可描述如下（transformation）：一線束由兩條相異線所截而得到兩個相異點列，則稱此相異點列為由透視中心 O 之透視所相關（Ralated by a perspectivity with center O）或兩線束同射影於一個點列，則稱此兩線束被軸 O_1 之透視所相關（Related by a Perspectivity with axis O_1）

如圖(a)與(b)。



若已知三條相異線 a, b, c 經過同一點，且 a'', b'', c'' 為已知通過另一點之相異三線，我們可以建立一個透視變換，使其合成有 $abc \,\overline{\Lambda}\, a''b''c''$ 之結果，如圖：



$$\left.\begin{aligned} a' &= (a \cdot a'')(b' \cdot c') \\ b' &= (a \cdot b'')(b \cdot a'') \\ c' &= (a \cdot c'')(a'' \cdot c) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow abc \overset{a''}{\overline{\overline{\Lambda}}} a'b'c' \overset{a}{\overline{\overline{\Lambda}}} a''b''c'' \\ &\Rightarrow abc \,\overline{\Lambda}\, a''b''c'' \end{aligned}$$

同理，如果 x 是任一變線（variable line）

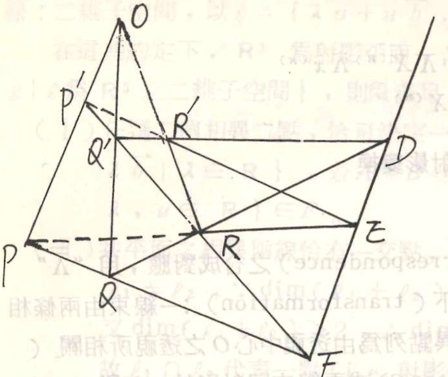
則我們有 $abcx \overset{a''}{\overline{\overline{\Lambda}}} a'b'c'x' \overset{a}{\overline{\overline{\Lambda}}} a''b''c''x''$

$\Rightarrow abcx \,\overline{\Lambda}\, a''b''c''x''$　　（ie 再透視變換 $\xrightarrow[\text{分成}]{}$ 射影變換）

在下面我們將提出在射影幾何中佔有極其重要地位之狄沙格定理（Desargue's Theorem），Pappus 定理及奇妙的對偶原理（Duality）。

狄沙格定理：設兩三角形在同一平面上或相異二平面上，若三雙對應頂點之連線共

點，則對應邊之交點共線。



〔證明〕：$\triangle PQR$，$\triangle P'Q'R'$為兩已知三角形，PP'，QQ'，RR'交於點O

$D=QR\cdot Q'R'$，$E=PR\cdot P'R'$，$F=QP\cdot Q'P'$

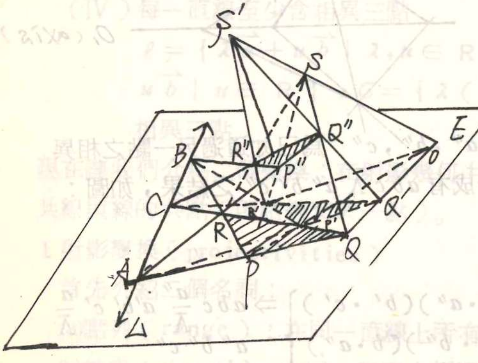
現欲證明D,E,F共線

考慮兩三角形$\triangle PP'E$及$\triangle QQ'D$

$$\because \begin{cases} R'=P'E\cdot Q'D \\ R=PE\cdot QD \text{共線} \\ O=PP'\cdot QQ' \end{cases}$$

$PP'E$及$QQ'D$由一線而透視，則其必可經由點F而透視

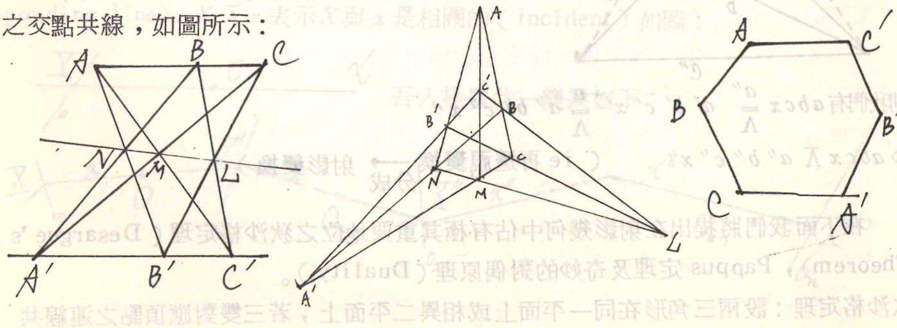
$\therefore F=PQ\cdot P'Q'$，$E$，$D$，共線，即$D$，$E$，$F$共線



如圖，在同一平面上的兩個三角形，讀者可自行證明狄沙格定理。（提示：$\triangle PQR$與$\triangle P'Q'R'$所在之平面定為E，設PP'，QQ'及RR'交於O點，在平面E上外取二點S，S'使與O共線，則PP'交SS'於O，所以P，P'，S，S'共平面，取PS與$P'S'$的交點P''，同樣可得Q''及R''，在不共平面的三角形$\triangle P''Q''R''$與$\triangle P'Q'R'$及$\triangle P''Q''R''$與$\triangle PQR$上分別應用狄沙格定理即可證得）。

2. Pappuss 定理：

如果一個六邊形（hexagon）上ㄟ個頂點交替的分佈在兩條線上，則三雙對邊之交點共線，如圖所示：



證明：∵ A, B, C 共線，且 A'，B'，C' 共線，所以包含一個射影變換

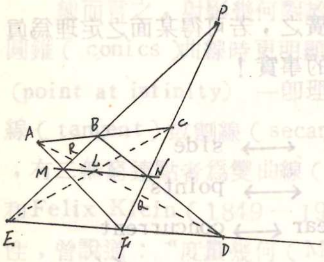
$ABC \,\overline{\wedge}\, A'B'C'$，$\left\{ \begin{matrix} B'C \\ BC' \end{matrix} \right.$，$\left\{ \begin{matrix} C'A \\ CA' \end{matrix} \right.$，$\left\{ \begin{matrix} A'B \\ AB' \end{matrix} \right.$ 爲六邊形之三雙對邊。而這三雙對應邊僅爲射影變換中的相關點之交叉連線（cross-joins）

$\left\{ \begin{matrix} BB' \\ CC' \end{matrix} \right.$ $\left\{ \begin{matrix} CC' \\ AA' \end{matrix} \right.$ $\left\{ \begin{matrix} AA' \\ BB' \end{matrix} \right.$ 這些交叉連線之交點 $L = B'C \cdot BC'$，$M = C'A \cdot CA'$

$N = A'B \cdot AB'$ 必須在射影軸上，所以 L，M，N 共線。

另外，若我們以向量的觀點看它：設（A, B, C），（D, E, F）爲二個共線之三

點組 $\left. \begin{matrix} AD, LE \text{交於} L \\ BE, AF \text{交於} M \\ CF, BD \text{交於} N \end{matrix} \right\} \Rightarrow L, M, N$ 共線



［證明］：取 $\triangle PQR$ 爲基底三角形（即 $\vec{p} \in P$，$\vec{q} \in Q$，$\vec{r} \in R$ 以 $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$ 爲 R^3 之基底）A 在 $\overleftrightarrow{QR}$，$A \in \{\lambda \vec{q} + u \vec{r} \mid \lambda, u \in 1R\}$

$\Rightarrow A = \{k(\lambda_0 \vec{q} + u_0 \vec{r}) \mid k \in R\}$

取 $\vec{a} = \vec{q} + \alpha \vec{r}$ $\quad \vec{d} = \vec{q} + \delta \vec{r}$ $\quad \vec{\ell} = \vec{q} + \lambda \vec{r}$

$\vec{b} = \vec{r} + \beta \vec{p}$ $\quad \vec{e} = \vec{r} + \varepsilon \vec{p}$ $\quad \vec{m} = \vec{r} + \mu \vec{p}$

$\vec{c} = \vec{p} + \gamma \vec{q}$ $\quad \vec{f} = \vec{p} + \xi \vec{q}$ $\quad \vec{n} = \vec{p} + \upsilon \vec{q}$

A，B，C 三點共線 $\Rightarrow \vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 線性相依。

$$\begin{aligned} \vec{a} &= 0\vec{P} + 1\vec{q} + \alpha \vec{r} \\ \vec{b} &= \beta \vec{P} + 0\vec{q} + 1\vec{r} \\ \vec{c} &= 1\vec{P} + \gamma \vec{q} + 0\vec{r} \end{aligned} \qquad \text{故} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ \beta & 0 & 1 \\ 1 & \gamma & 0 \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma + 1 = 0$$

D，E，F 共線 $\Rightarrow \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ 線性相依

$$\begin{array}{c|ccc} & \vec{p} & \vec{q} & \vec{r} \\ \hline \vec{d} & 0 & 1 & \delta \\ \vec{e} & \varepsilon & 0 & 1 \\ \vec{f} & 1 & \xi & 0 \end{array} \qquad \text{故} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \delta \\ \varepsilon & 0 & 1 \\ 1 & \xi & 0 \end{vmatrix} = \varepsilon\xi\gamma + 1 = 0$$

同理，A，M，F 共線 $\Rightarrow \alpha u \xi + 1 = 0$

B，N，D 共線 $\Rightarrow \beta \upsilon \delta + 1 = 0$

C，E，L 共線 $\Rightarrow \gamma \lambda \varepsilon + 1 = 0$

證明 L，M，N三點共線

$$\begin{array}{c|ccc} & \vec{p} & \vec{q} & \vec{r} \\ \hline \vec{\ell} & 0 & 1 & \lambda \\ \vec{m} & u & 0 & 1 \\ \vec{n} & 1 & v & 0 \end{array} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ u & 0 & 1 \\ 1 & v & 0 \end{vmatrix} = uv\lambda+1=\left(\frac{-1}{\alpha\,\xi}\right)\left(\frac{-1}{\beta\,\delta}\right)\left(\frac{-1}{\gamma\,\varepsilon}\right)+1$$

$$=\frac{-\ 1}{(\alpha\beta\gamma)(\xi\delta\varepsilon)}+1=0$$

$$(\because \alpha\beta\gamma=-1,\ \xi\delta\varepsilon=-1)$$

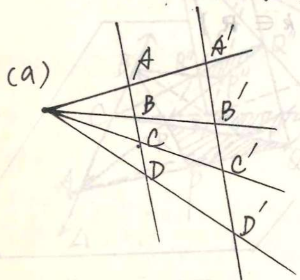
故 L，M，N三點共線。

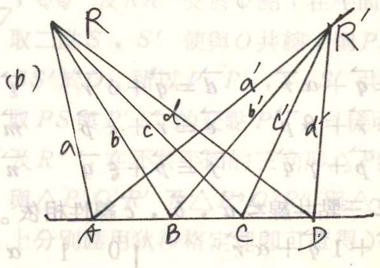
3. 對偶性 (Duality)

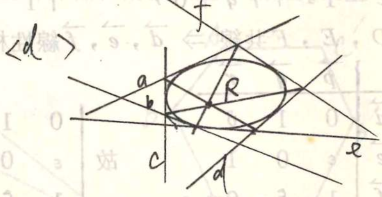
在射影幾何學中，若我們已經證出某一定理對一由線與點所構成之圖形爲眞，則此定理對由點與線所構成之前者的對偶圖形亦爲眞，推而廣之，若可得某面之定理爲眞，則其對偶 (Dual) 亦爲眞，這眞是一件有趣且奇妙的事實！

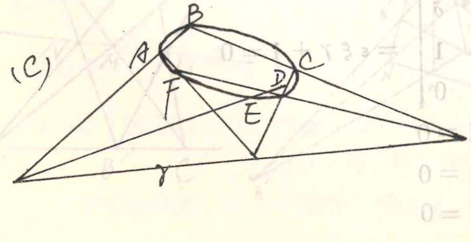
在對偶原則當中，我們須注意下列幾項：

Duality：	range $\longleftrightarrow$ pencil	vertex $\longleftrightarrow$ side
	line $\longleftrightarrow$ point	plane $\longleftrightarrow$ points
	axis $\longleftrightarrow$ center	collinear $\longleftrightarrow$ concurrent









上圖中，(a)，(b)與(c)，(d)互爲對偶圖形，Pascal 和 Brianchon 之圓錐定理就是有關一定理與其對偶的一顯著例子。

Pascal 定理　：在一圓錐橫截面上任畫六點，則三雙對邊之交點共線。（如圖 c ）

Brianchon 定理：任畫一圓錐橫截面的六條切線，則此六邊形三雙相對頂點之聯線共點。Γ 線之交點則稱爲 Brianchon 點，Pascal 定理中之線則稱爲 Pascal 線。因爲這兩個定理互爲對偶，故僅證明其中任一即可，再者任一圓錐之射影仍爲圓錐，稱自我對偶圖形（Self-dual configuration)，故只消任擇一圓錐即可。這兩個定理讓我們感到射影幾何學中所有之方法經濟且有效。而這些方法都可應用到更爲複雜之幾何圖形上，以證明若干無法用歐氏幾何學中之方法來證明的簡單，而此問題非屬直覺問題。

總而言之，射影幾何對於歐氏幾何作更深之探討乃是有極大用處的，而在證明圓錐（ conics)曲線時更明顯的顯示出，單一的射影幾何定理更可由選其無限遠點 (point at infinity) 一即理想點，而導出許多歐氏定理。例如線在無窮遠處爲切線（ tangent ）或割線（ secant ）且圓錐曲線有一無窮遠點者爲拋物線（ parabola) ，有二無窮遠點者爲雙曲線（ hyperbola）。Arther Cayley,（ 1821 — 1895) 和 Felix Klein（ 1849 — 1925 ）更加以强調射影幾何和非歐幾何具有相當的權威性，曾說道：“度量幾何（ Metrical Geometry ）是射影幾何的一部分（Descriptive Geometry ，而 Descriptive 即今之 Projective)，而射影幾何即爲最近世之綜合幾何學也。”

參考資料

1. H. S.M Coxeter：Projective Geometry.
2. Graustein：Introduction to Higher Geometry.
3. Bell：Coordinate Geometry of three dimensions.
4. 薛維格譯：數的世界。

非歐幾何學與幾何學基礎

指導老師 林福來
作者 張永寬

歐幾里德（Euclid）的幾何原本（Elements） 第五公設說「若兩直線爲一直線所截，使得一側之同側內角和小於兩直角，則將兩直線延伸，必在此側相交。」這個公設除了敍述上比其他公設複雜外，它還牽涉到一個微妙的對象——平行線。不相交的兩直線稱爲平行線，我們直觀上看到的只是平行線的一部份，若將它們向兩方延伸後是否都仍不相交呢？這牽涉到「無限遠」的概念，使得第五公設的本質顯得與衆不同而複雜。歐幾里得面對它時也顯得很矛盾，他想避免使用它，却又不得不使用它，因此直到第29個命題時，歐幾里得才首次用到第五公設。由於第五公設的複雜性，很多人便認爲它應該是一個定理，可以由其他四個公設推衍得到，而不該列爲公設，因此就要想辦法去證明第五公設。

非歐幾何（Non-Euclidean Geometry）從人們對歐幾里得第五公設獨立性（不能用其他四個公設證得）的懷疑開始，歷經各代有名的數學家企圖證明第五公設的失敗，直到Gauss，Lobatchevsky, Bolyai 才各自獨立發展成功，建立雙曲型幾何（Hyperbolic Geometry），後來又有Rimann所創的橢圓型幾何（Elliptic Geometry）。非歐幾何的出現雖然並沒有像Gauss所擔心的，被當時的數學家們視爲邪說異端而群起攻之，但至少他們基於兩種理由對非歐幾何採取不信任的態度。第一，非歐幾何是將歐氏幾何的第五公設用其逆命題替換後，按照邏輯推理方式建立起來的。兩千年來歐氏幾何的正確性已被人們接受，如今這套新幾何的基礎和

它背道而馳，雖然目前所推演出來的定理都正確而不互相矛盾，但大家總認爲如果經過和歐氏幾何一樣長久時間的考驗，非歐幾何一定會不敵而露出破綻的。第二，歐氏幾何的結論和我們日常接觸的事物是那麼密切的配合着，而非歐幾何在當時却找不出我們經驗世界中和它相對應的事物。雖然Gauss，Lobatcheusky等人仍堅信這套新幾何學是正確的，一般人却對它的眞實性感到懷疑。

1868年，義大利的幾何學家Beltrami首先在第二個問題上有所突破。他指出擬球面（psudo-sphere）上的幾何和雙曲型幾何一部份上的幾何完全一樣，亦即我們可以擬球面爲雙曲型幾何的模型，表現出它的局部幾何性質。如圖1左方的曲線，即爲曳物線。它具有下列性質：曲線上每一點的切線，從切點到切線與Y軸交點的距離恒爲常數。此時Y軸稱爲這曲線的漸近線。令這曳物線繞漸近線旋轉一圈就

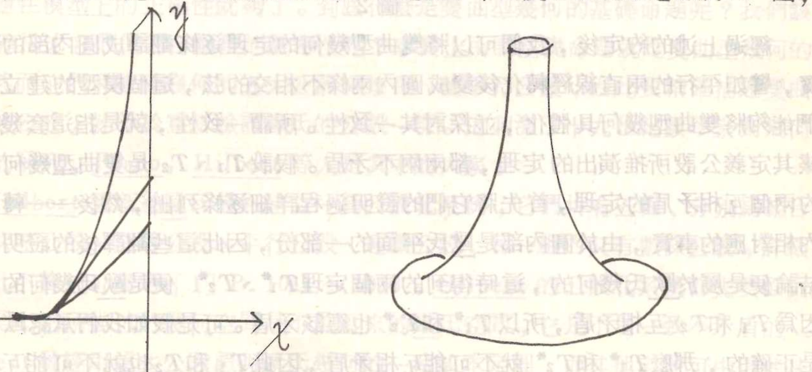


圖1

得到一個曲面，即所謂的擬球面。Beltrami 約定擬球面上的測地線稱爲直線，兩點之間的距離爲兩點之間測地線的長度。兩個圖形的點若一一對應，且保持點與點之間的相對距離，則稱它們全等。此外他也定義了擬球面上的角，而角度、面積的度量方法則和平常度量的方法一樣。於是雙曲型幾何可以在擬球面上的一部份表現出來，雖然這種對應只是局部性的，但是已經使數學家大大改變了對非歐幾何的態度。到了1870年，德國的數學家Klein 終於提出了一個模型完全將雙曲型幾何表現出來，這時人們才眞正認清了雙曲型幾何和整個非歐幾何的面貌。

Klein的模型取歐氏平面上單位圓的內部爲雙曲型幾何的平面，圓上除去兩端點的弦爲直線。如圖2所示P爲直線XY外一點，而介於（包括）直線QY和RX之間的任一過P的直線$X'Y'$都和XY不相交——即平行，這正是雙曲型幾何平行公設的表現。Klein定義線段ST的長度d爲$d = C\log(ST, XY)$，其中$C > 0$爲常數，(ST, XY)表示S、T、X、Y四點的交比（cross ratio）。我們可以很容易看出S或T若趨近於X或Y，則交比$(ST . XY)$也將趨近於無窮大，當然d也會趨近無窮大，這告訴我們直線XY看起來似乎長度有限，但在這種度量方

法下却是無限的，換句話說，直線是可以向兩方無限延伸的。此外，Klein 還定義圓爲“與一定點等距的動點的軌跡”，以及角的度量方法。

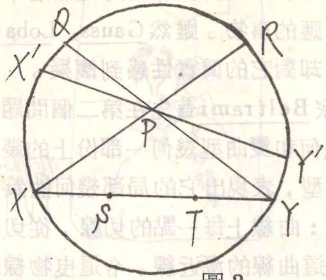


圖 2

經過上述的約定後，我們可以將雙曲型幾何的定理逐條翻譯成圓內部的幾何事實，譬如平行的兩直線經轉化後變成圓內兩條不相交的弦，這個模型的建立使得我們能夠將雙曲型幾何具體化，並探討其一致性。所謂一致性，就是指這套幾何中根據其定義公設所推演出的定理，都兩兩不矛盾。假設 T_1、T_2 是雙曲型幾何中得到的兩個互相矛盾的定理，首先將它們的證明過程詳細逐條列出，然後一一轉化成圓內相對應的事實，由於圓內部是歐氏平面的一部份，因此這些翻譯後的證明過程和結論便是屬於歐氏幾何的，這時得到的兩個定理 T_1^*、T_2^* 便是歐氏幾何的定理。因爲 T_1 和 T_2 互相矛盾，所以 T_1^* 和 T_2^* 也應該矛盾。可是假如我們承認歐氏幾何是正確的，那麼 T_1^* 和 T_2^* 就不可能互相矛盾，因此 T_1 和 T_2 也就不可能互相矛盾，換句話說，雙曲型幾何是一致的。

其他的非歐幾何也同樣模倣這方法，在歐氏空間建立一模型，說明他們的一致性，只是這時雙橢圓幾何是歐氏空間的一個球面，而單橢圓幾何則必須在四度空間上才能建立模型。

雖然我們已經利用模型來說明非歐幾何的一致性，但有一點必須强調的，這個一致性是相對的，而不是絕對的。我們必須先承認歐氏幾何是一致的，才能說非歐幾何是一致的；如果有人認爲非歐幾何中有矛盾存在，那麼這矛盾必然也存在歐氏幾何中。我們沒辦法直接證明非歐幾何的一致性，却採用這種方法來說明它，雖然有點投機取巧，可是至少使得大家不再懷疑非歐幾何，否則等於懷疑歐氏幾何，在沒有更好方法之前，我們也只好採用了。

二千多年來，歐幾里德的幾何原本除了第五公設的獨立性被人們爭論不休以外，一直被視爲數學邏輯推理的典範之作，但是隨時代的進步，數學家對數學論證嚴密性的要求也越來越高，而暴露出它的缺點。仔細追究歐氏的論證，將會發現到他除了使用他所下的定義和所擬的公設來證明外，還在不知不覺中利用了幾何圖形的直覺來幫助論證，而不是全靠邏輯推理。這些直覺有些可以再加以證明以合乎嚴密

性的要求，有些却沒辦法證明必須當成公設來使用。許多數學史家評註歐氏的幾何原本，指出其缺失所在，並加以補充完全，然而却沒有人想到要從根本上動手，一勞永逸的補救歐氏幾何的缺失，這件事直到十九世紀非歐幾何發展成功後，才刺激數學家們着手研究這件工作，這便是幾何學基礎的研究。

當Klein提出雙曲型幾何的模型時，爲了給一個嚴密的證明，解釋這模型確實能滿足這套幾何學，勢必要將它的所有定理仔細轉換上模型上的幾何事實，再加以驗證是否有矛盾產生。但是這樣做將是很可笑又不可能辦到，因爲所要檢驗的定理太多，而且定理和定理又可衍生定理，定理將會多至無窮多。可是假如我們能找出一些基礎命題，從這些基礎命題我們能推演出其他定理，那麼我們只要檢查這些基礎命題在模型上的正確性就夠了。到底什麼是雙曲型幾何的基礎命題呢？我們該如何精確描述它們以符合論證的嚴密性呢？事實上所謂基礎命題就是雙曲型幾何的公設，然而它們和歐氏幾何的五大公設只差在一個平行公設，因此要精確描述雙曲型幾何的公設，就等於重新檢討歐氏的公設一樣。這刺激了十九世紀數學家對幾何學基礎的研究，Peano，Hilbert等人是其中的大家。

Hilbert重新給歐氏幾何建立一套公設化系統，它們共有五組，分別爲結合公設、次序公設、全等公設、平行公設、連續公設，每一組內又有數條公設，詳細內容在此不贅述可參考［1］P. 1011～1013。Hilbert的公設化系統首先要面對的問題是，它所描述的幾何空間是不是原來的歐氏空間，它是不是一致不矛盾的。Hilbert曾經用這些公設證明歐氏幾何的一些基本定理，而其他定理可由這些基本定理導出，因此毫無疑問的，原來的歐氏幾何可以用這套新的公設化系統更精確的描繪出來。至於它的一致性，由於有了非歐幾何的良好經驗，Hilbert也採用建立模型的方式，和歐氏幾何相對照。他定義一個有序實數對（a，b）爲一個點；連比（$u:v:w$）爲直線，其中u、v不同時爲零；當$ua+ub+w=0$時，點（a，b）落在直線（$u:v:w$）上；全等就是一個剛性運動前後的兩個點集合等等。事實上，這個模型說穿了就是我們現在所熟悉的座標平面。

Hilbert的第二個問題是它的公設是否具有獨立性，是不是任一個公設都不能利用其他公設導出。這一點他失敗了，他的某些公設可以用前面的公設得到；但另一方面，他却成功的證出他的五組公設兩兩獨立存在，證明的方法仍然是建立模型。他任選四組公設，設法造出一個模型滿足這四組公設，但不滿足剩下的一組公設。假如後者和前者不獨立的話，它必可由前四組公設導出，因此它的結論必定會在模型上表現出來，不過這和我們選取的模型相矛盾，所以這五組公設必須兩兩獨立。譬如平行公設，他選用歐氏空間球體的內部做模型，顯然的，結合、次序、全等、連續四個公設在模型上成立，但平行公設不成立。假如平行公設可以由其他四組公設導出，球的內部一定滿足平行公設，但這是不可能的，因此平行公設是獨立的。

由於雙曲型幾何的平行公設是歐氏平行公設的逆命題，所以歐氏平行公設的獨立性便保證雙曲型幾何的平行公設的獨立性，因此只要歐氏幾何是眞實的，雙曲型幾何也就隨着確立。因爲假使它的平行公設不獨立，就可以由結合、次序、全等、連續四公設證出，反過來說就是歐氏的平行公設可以證明上述四公設的逆命題。現在歐氏幾何建立在這五組公設上，而它們却可以產生互相矛盾的結果，除非歐氏幾何不眞確，否則這種事便不可能發生。

二千年來多少數數家家爲證明歐幾里德的第五公設耗去了大量心血，而沒有人成功。可是當時機成熟時，却同時由不同人的手中孕育出非歐幾何，其影響至今仍然非常深遠，而在當時由於非歐幾何一致性的探討，更刺激了幾何學基礎的深入研究，這一段幾何發展史眞可說是「時勢造英雄，英雄造時勢。」

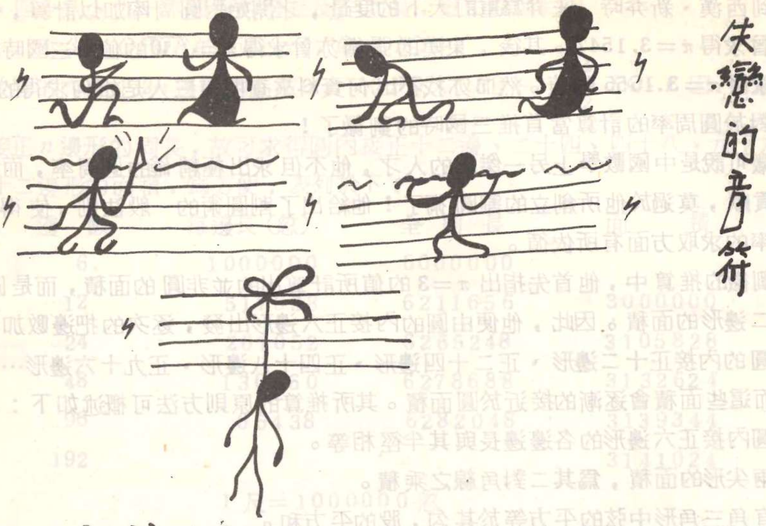
參考書目：

[1] Morris Kline : Mathematical Thought from Anciend to Morden Times New York Oxford University Press 1974. 2nd.

[2] 詹進吉譯　數學之內容方法及意義(三)　徐氏基金會出版66年2月14日三版。

[3] Walter Prenowitz & Meyer Jordan合著　劉鍾鼎譯　Basic concepts of Geometry（幾何學的基本觀念）　楓城出版社　67年7月初版。

[4] Karol Borsuk & Wanda Szmielew Toundations of Geometry 新月圖書公司　56年8月。



祖沖之‧π‧球體積公式

指導老師 洪萬生

作者 韋泉輝

或許因時代背景、社會觀念的緣故，古代的科學家並未受到人們的重視。中國歷代的科學家就這般的爲社會所忽視，被後人長期的遺忘了！

祖沖之是晉、南北朝時中國一位偉大的科學家，他卓越的成就卻因當時社會的關係而未爲人所重視；幸賴他曾於官宦途上有所建樹，才得以保留其大略生平於史書，並得以附上其科學發明而留於今日。

祖沖之的成就，即使在今日，也足令人欽服。他是一位傑出的天文學家，曾修正了當時的曆法，使中國的曆法向前邁進一大步；他亦是一位優秀的機械發明家；更令人稱奇的是，他是一位出色的樂器家和小說家。然而，他最偉大且令人欽佩的，莫過於他在數學上的成就了！西方有的博物館，曾把他與哥白尼、達爾文等世界性的偉人同奉在一起；在月球上的「火山口」，有一火山口也被現代西方科學家定名爲「祖沖之口」，由此可見其偉大的成就是如何受後世的人們所崇敬了！

本文中所要討論的，就是在中國數學上兩項至其方大放光采而爲後人所嘆服的成就：圓周率的計算與球體積公式的導出。

一圓周率的計算

在漢以前，中國對於圓周率的值，取的都是3的近似值。這個粗陋的值亦是其他文明古國埃及、巴比倫所通用的。我想，這也是當時社會並不需要非常精確的π值，而3的值確是有其非常簡便之處。

直到西漢、新莽時，王莽爲重訂天下的度量，才開始對圓周率加以計算，當時的劉歆曾求得$\pi=3.1547$。其後，東漢的張衡亦曾求得$\pi=\sqrt{10}$的值。三國時的王蕃亦曾求得$\pi=3.1555$的值。然而亦找不出何資料來查明這三人是如何求得的。在當時，對於圓周率的計算當首推三國時的劉徽了！

劉徽可說是中國數學上另一傑出的人才，他不但求出極精確的圓周率，而其最主要的貢獻，莫過於他所創立的割圓術了！他給出了割圓術的一般法則，使得後人在圓周率的求取方面有所依循。

在劉徽的推算中，他首先指出$\pi=3$的值所計算出的並非圓的面積，而是圓內接正十二邊形的面積。因此，他便由圓的內接正六邊形出發，逐次的把邊數加倍，而算出圓的內接正十二邊形、正二十四邊形、正四十八邊形、正九十六邊形……的面積。而這些面積會逐漸的接近於圓面積。其所推算的原則方法可概述如下：

㈠圓內接正六邊形的各邊邊長與其半徑相等。

㈡兩尖形的面積，爲其二對角線之乘積。

㈢直角三角形中弦的平方等於其勾，股的平方和。

㈣圓的內接正多邊形，邊數愈增，則其面積與圓面積愈相近。

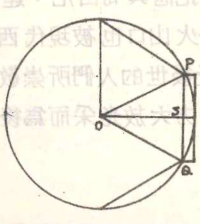
㈤設S_n、S_{2n}各爲圓的內接正n邊形及正$2n$邊形的面積，S爲圓面積。則

$$S_{2n}<S<S_{2n}+(S_{2n}-S_n)$$

劉徽首先以㈠證明「徑一周三」爲內接正六邊形的邊長，以㈡證明用$\pi=3$所求得之πr^2並非圓面積，而是其內接正十二邊形的面積。因此，以3爲圓周率所求得圓的周長或面積均嫌太少。故乃以割圓周六等分出發，而後爲十二等分、二十四等分、四十八等分……順次遞求其內接正多邊形邊長及面積時，若割之愈細，則其面積與圓面積相差愈少。在九章算術方田章的圓田術中，劉徽就注有「割之不可割，則與圓合體而無所失矣。」

玆錄劉徽的推算過程如下：

如左圖$\overline{PQ}$爲圓內接正n邊形的一邊$\overline{PR}$、$\overline{QR}$則爲其內接正$2n$邊形的二邊，O爲圓心，由㈢得$OS=\sqrt{OP^2-PS^2}=\sqrt{r^2-(\frac{PQ}{2})^2}$



$SR=OR-OS=r-OS$

故圓的正$2n$邊形的周長爲$2nPR$。

因此，劉徽以半徑爲一尺的圓，用上述的方法，次第的求出其內接正十二、二

十四、四十八、九十六邊形的邊長及全周長，更由原則㈡得

兩尖形 $OPQR$ 的面積 $=(PQ\times OR)\div 2$

故圓的內接正 $2n$ 邊形的面積 $=n\times(PQ\times OR)\div 2=\frac{1}{2}PQ\cdot r$ 因 PQ 爲圓的內接正 n 邊形的周長，故可求得圓內接正十二邊、二十四、四十八、九十六、一百九十二邊形的面積，爲方便，表列於下：

邊　數	每邊長(忽)	全周長	面　積
6	1000000	6000000	
12	517638	6211656	3000000
24	261052	6265248	3105828
48	130860	6278688	3132624
96	65438	6282048	3139344
192			3141024

1 尺 = 1000000 忽

圓的內接正一百九十二邊形的面積爲 3.141024 平方尺，較之其內接正九十六邊形的面積多 0.001680 平方尺，以此值加入 3.141024 得 3.142704 平方尺。由原則㈤，得

$$3.141024<\pi<3.142704$$

或

$$3.14\frac{64}{625}<\pi<3.14\frac{169}{625}$$

在此附以說明的是，劉徽用了一個事實，即是當 $r=1$，$\pi r^2=\pi$ 值。所以只要在上述方法中，求圓之面積即可求 π 值了。

因此，由上述知，若圓周率如準確的取至小數點後第二位時，當爲 3.14 强此劉徽自知其率 3.14 爲微少。而若仔細觀察劉徽對於圓周率之求法，只使用了圓內切正多邊形的方法，即可求得 π 值的上、下限，實較希臘阿基米德以圓的內接外切正多邊形來求圓周率來的簡便，精確多了！

但是劉徽並不認爲割到 S_{192} 便是終結，他表示還可以如此的割下去。在九章算術的注文中就明白的寫著「割之彌細，所失彌少；割之又割，以至於不可割；則與圓周合體而無所失矣。」這可說明了劉徽對於極限概念已有相當認識。後來劉徽曾繼續割到 3072 邊；錢寶琮在其中國算學史就根據劉徽於注文中所述的而推得了 $\pi=3.14159$ 之值。

由於劉徽的貢獻，使得中國在 π 的研究上得以邁進，而後傳至祖沖之，更是求得一不朽的 π 值，而領先了世界數學千餘年。

在隋書律曆志裏就提到「宋末南徐州從事史祖沖之更開密法。以圓徑一億爲一丈，圓周盈數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸一分五釐九

毫二秒六忽，正數在盈朒二數之間。密率：圓徑一百十三，周三百五十五。約率：圓徑七，周二十二。」

祖沖之如何求得盈朒二數，已無可考。根據史家研究，除了「割圓術」之外，似乎是無其他方法。若是如此，則需做 S_n 到 6×2^{12} 。亦即 6×2^{n} 邊形的面積是爲3.14159251平方丈，而 6×2^{12} 邊形的面積是爲3.14159261平方丈。二數相差0.0000001 依劉徽的原則㈤

$$3.1415926<\pi<3.1415927$$

如此的分割，祖沖之所費的心力必是非常可觀的！

至於密率 $\frac{355}{113}$ 的發現，尤爲空前傑作。其如何造得亦無可考。因根據連分數的理論，$\frac{355}{113}$ 爲所有分數分母小於113者中最接近 π 值的。因此，有些近代研究中算史者以爲六朝時，中國數學已有連分數理論，然無確據。

根據錢寶琮在其中國算學史中的推論，其以爲當時劉以 $\frac{157}{50}$ 爲弱率，而稍早於祖沖之的何承天研究曾以 $\frac{22}{7}$ 爲彊率。於是祖沖之便以二者造密率。以彊弱率之分子、分母各相加得 $\frac{157+22}{50+7}=\frac{179}{57}$ 與周率相較，仍較朒數3.1415926爲弱，於是取 $\frac{179}{57}$ 與 $\frac{22}{7}$ 再求折衷，仍是太弱，如是遞求至第九次得 $\frac{22\times 9+157}{7\times 9+50}=\frac{355}{113}=$ 3.1415929 與周率正數最能相近，即取爲密率。此值至西元1573年，始在西方由德國數學家Otto 得出。

對於祖沖之所求得的 π 值，後來到了元朝時，趙友欽從圓的內接正方形算起，而逐次由四邊、八邊、十六邊。……求至16384($=4\times 2^{12}$)終於驗證了祖沖之在 π 值估取方面的正確性。

祖沖之所求的圓周率達到小數點後6位準確，實令後人爲之折服，更可由此顯示出中國古代數學的高度發展。在近數十年，一些日本研究中國數學史的學者，曾建議將其 $\frac{355}{113}$ 的傑出發現，修改稱爲「祖率」。後來，雖因種種的因素而未爲普遍接受，但是可由此見祖沖之在圓周率研究上所奠立的地位，而受後人崇敬的程度了。只是在趙友欽之後，中國人自已卻忘了如此精確的 π 值，更沒有後人超越他，實在是令人覺得惋惜遺憾！

二球體積公式

祖沖之除了在圓周率的計算上有卓越的成就。此外，我們介紹一下祖沖之另一

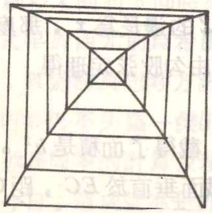
項數學上的傑出成就，就是有關球體積公式的導出。

在今日求球體積公式，只要利用微積分的方法，便可很快的求得結果。但是祖沖之在當時毫無利用微積分的技巧便得到結果，實令人稱奇。但仔細研究其方法，不免含有積分的概念。這亦可說明微積分的理論雖是等到十六世紀才為牛頓等人發明，然而積分的概念，卻是早在東西方的數學家所擁有了！

在九章算術中，提及球體積與外切等高圓柱體之比為 π ：4（註1）。劉徽指出這是錯誤的。並且提出了〝牟合方蓋〞和球體積之比，方是4與 π 之比。但是劉徽沒算出〝牟合方蓋〞的體積。劉徽說〝欲陋形措意，懼失正理，敢不闕疑，以俟能言者〞劉徽提出的問題終於在250年後被祖沖之天才的解決了。

以下就簡述祖沖之當時所用的方法：

我們要求的是一半徑為 r 的球體體積。接著，我們考慮另外一個立體：我們想像一刀一刀的平行於「大圓」切球，在球上即可切得大小不同的圓，我們若考慮這些圓的外接正方形（我們要這些正方形的邊都互相平行），這樣的正方形疊起來就成為一立體，即劉徽所提出的〝牟合方蓋〞。如圖(1)，是為半個〝牟合方蓋〞。一般人家用來罩菜的紗罩，好像這樣的半個〝牟合方蓋〞。



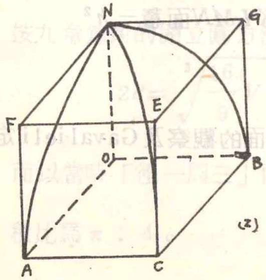
(1)

因為每個圓與其外接正方形的面積比為 π ：4。因此，根據〝等高柱體，體積比等於其同高之截面積比〞（註2）。

球：牟合方蓋 $=\pi$ ：4 ……………(a)

因此，若於上圖中，能求得牟合方蓋的體積，即可求得球的體積了！

那我們再看〝牟合方蓋〞裏面恰可容於一個與球直徑相同為邊長的立方體中。因此，我們考慮八分之一個〝牟合方蓋〞。因此這八分之一個牟合方蓋恰可置於一個邊長為 r 的正方體中。



(2)

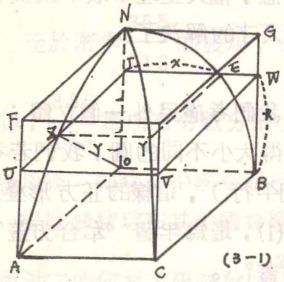
圖(2)中 $NOACB$ 為八分之一個〝牟合方蓋〞，而 $NGEFADBO$ 為一邊長為 r 的正方體。在圖中 $\overset{\frown}{NA}$，$\overset{\frown}{NB}$ 是為球的部分（上面的點，即為每邊所截圓與其外接正方形的相接點）而 $\overset{\frown}{NC}$ 是為每個正方形尖點所形成的軌跡。

因此，由圖(2)我們便可得，在上面立方體內，而在$NOACB$外的部分，我們稱為"蓋外"而

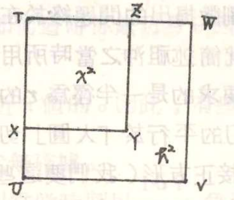
$$\frac{1}{8}(\text{牟合方蓋}) = r^3 - \text{蓋外} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (b)$$

因此，若能求得蓋外的體積，就能夠求得"牟合方蓋"的體積，而進一步可導得球的體積了！

所以，在圖(2)的圖形中，我們若再加上攔腰的一刀，我們就可得：



(3-1)



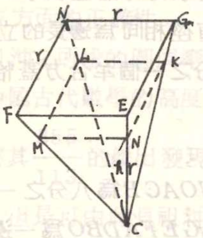
(3-2)

上面的這一刀，從正方體截得正方形$TUVW$（面積$=r^2$），而從八分之一個"牟合方蓋"上截得正方形$TZYZ$。若設正方形$TZYZ$的邊長爲x，那麼因爲$OZ=r$，$OT=h$，$ZT=x$，且這一刀垂直於ON。因此，由勾股弦定理得

$$r^2 - x^2 = h^2$$

這也就是告訴了我們，這攔腰的一刀從"蓋外"截得了面積是h^2。

最後，我們觀察一個錐體，其高爲r，而每一截面垂直於EC，距C點而高爲h的截面正方形其邊長恰爲h，如圖(4)



(4)

因$\triangle FCE$爲一等腰直角三角形。故$\triangle MNC \sim \triangle FEC$得$\triangle MNC$亦爲一等腰直角三角形。

$$\Rightarrow MN = h$$

正方形$KLMN$面積$=h^2$

這種錐體，在我國古書稱爲"陽馬"。而根據上面的觀察及Gavalieli定理的應用，我們馬上可得

蓋外的體積＝陽馬的體積

而陽馬的體積等於三分之一倍的柱體體積。即陽馬$=\frac{1}{3}r^3$。代入(b)式

$$\Rightarrow \frac{1}{8}(\text{牟合方蓋})=r^3-\frac{1}{3}r^3$$

$$\therefore \text{牟合方蓋}=\frac{16}{3}r^3 \quad \text{再代入(a)式}$$

$$\frac{16}{3}r^3:\text{球體積}=4:\pi$$

$$\Rightarrow \quad \text{球體積}=\frac{16}{3}\pi r^3$$

由上述的方法中，我們不難發現其完全是採用間接的方式。球→牟合方蓋，蓋外→陽馬，完全是以比較的方式先求出一體積而再推得所欲求者。如此的轉換，實令人佩服。而其僅以簡單的數學技巧，完全不涉及微積分的技巧，亦令人稱奇。不過，在其推算過程中，我們不難看出，在其比較「球與牟合方蓋」與「蓋外與陽馬」的體積時，所做平面的切割時，即有積分觀念的存在了！

見了祖沖之如此巧妙的證明，不由得令人讚服。其過程雖只用了簡單的數學，但可說是既精彩又曲折。同時亦顯示出了一些數學的精神及數學中美麗的技巧。雖然球體積公式早於西元前爲希臘的阿基米德所解決了（阿基米德曾以槓槓原理證出球體積公式，其過程及思考方法亦是非常漂亮！）但是祖沖之所用的方法仍是獨立得到的，其巧妙仍不失爲一傑出的成就！

觀於上述圓周率的計算及球體積公式的導出，使我們對於祖沖之的天才不覺崇敬。即使在今日，這成就亦是非凡！祖氏當時曾著有「綴術」一書，爲當時一部艱深的巨著。然而，在當時視科技爲「奇淫末巧」的時代，竟未有人加以重視而至失傳，至是可惜！隋書曾提及綴術此書「學官莫能究其精奧。是故廢而不理」。李約瑟在中國科學與文明書中曾提到過：「綴術」的最後一些版本，竟被後世的人用來做草稿練字！見了祖氏的成就，於崇敬佩服之餘，今人當更加努力，繼承先人發明的天賦，於科技方面多加研究，俾能趕上西方之科學，方可不負先人之業！

註1：按九章算術的開立圓方法：

$$2d=\sqrt[3]{\frac{16}{9}V} \quad d\text{爲球半徑}，V\text{爲球體積}$$

而以當時「徑一周三」而言，$V=\frac{1}{2}\pi^2r^3$ 即與圓球之外切等高圓柱體的體積比爲 $\pi:4$。

註2："二等高之柱體，若於等高處的截面積比爲一定，則二體積比即是此截面積比"。此定理爲義大利數學家Gavalieli（A.D.1598～1647）於西方首先引用。其實在中國祖沖之早已引用過了。

參考資料：

(1) 九章算術 戴震校
(2) 中國算學史（上卷） 錢寶琮著
(3) 中國數學簡史 李儼著
(4) 科學與古老中國 蔡仁堅著
(5) 中國算學之特色 三上義夫著 徐科棠譯
(6) 中國之科學與文明中譯本(四) 李約瑟著 傅溥譯
(7) 數學傳播 第一卷第四期 李宗元 祖沖之球體積公式及其他
(8) 數學傳播 第三卷第二期 洪萬生 割圓術始末
(9) 數學傳播 第三卷第一期 傅溥 中國數學之特色

怎樣分十七頭牛？

從前，傳說有這麼一個故事：

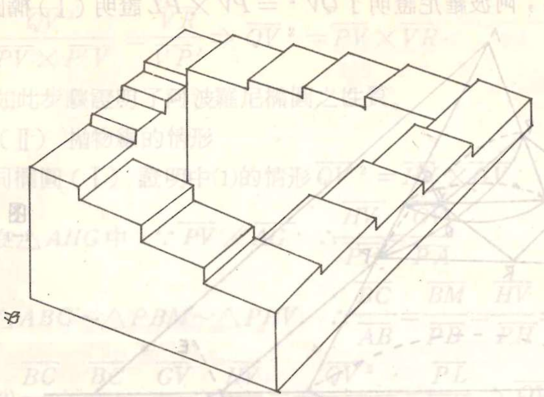
有一個農夫有十七頭牛。他在病重的時候，要把這十七頭牛給他的三個兒子。他說："長子分得一半，次子得三分之一，給幼子九分之一。"後來他死了。三個兒子不知道怎樣分法，他們就去請教鄰居。

聰明的鄰居知道了這件事，便帶了一頭牛來替他們分。因爲他帶了一頭牛來，就有了十八頭牛了。於是乎大兒子分了一半，得到九頭牛，二兒子分了三分之一，得到六頭牛，三兒子得到九分之一，得二頭牛。這樣三個人剛好分去了十七頭牛，最後恰巧剩下這位鄰居帶來的牛，於是這位鄰居又把自己的牛牽了回去。

你們看這樣的分法正確不正確呢？這樣分法和那位農人原來的意思符合嗎？爲什麼借來的這一頭牛仍舊會剩下來呢？

這位鄰居的分法很巧妙，實際上他是按比例進行分配的。因爲$\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}=9:6:2$，$9+6+2$一共是十七份，所以按9、6、2這數字分配，剛剛正好。

因此這個分法是完全正確的。既保存了活的牛，而且也完全依照了那位農人的原來意思。這位鄰居的算術眞好啊！



永遠下降的階梯

錯在那裏？

阿波羅尼Conic Section中第一冊之三性質

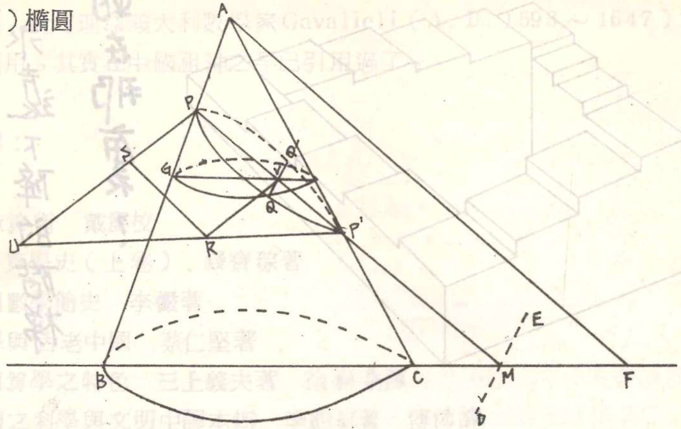
指導老師 洪萬生
作者 羅翠芳

古典希臘時期兩大偉大數學家爲歐幾里得和阿波羅尼，歐幾里得之成就爲幾何原本中數學之基本觀念，證明模式，定理佈局的邏輯性，而阿波羅尼之成就在Conic Section 八册，內容廣大、精鍊，佈局排列皆是上乘，而他在天文學上的成就亦是很大。

Conic Section八册，四百八十七個命題，現有四册是十二、十三世紀希臘文手稿複製，其次三册是阿拉伯文之譯本，第八册失傳。

第一册是定義圓錐及它的基本性質即是本文所證，已知圓 BC 及圓外一點 A，經過 A點並在圓周上移動之直線拓成圓錐兩個，過 A與圓心之直線稱爲圓錐之軸，若截過圓錐之一平面與平面和底交於 $\overleftrightarrow{DE}$，則 $\overline{BC}\perp\overline{DE}$，$\triangle ABC$ 稱軸三角形，$\overline{PP'}$ 爲截平面之交線，$\overline{QQ'}$ 爲截平面上平行 $\overline{DE}$ 的弦，阿波羅尼證明 $\overline{QQ'}$ 被 $\overline{PP'}$ 平分即 $\overline{VQ}$ 是 $\overline{Q'Q}$ 之半，其次作 $\overline{AF}$ 平行於 $\overline{PM}$ 並與 $\overline{BM}$ 交於 F，再作 $\overline{PL}$ 垂直於 $\overline{PM}$ 並且落在截面上，若在圓錐外適當的選擇一點 L，滿足 $\dfrac{\overline{PL}}{\overline{PP'}}=\dfrac{\overline{BF}\times\overline{FC}}{\overline{AF}^2}$ 則稱爲橢圓或雙曲線，如圖（Ⅰ）、（Ⅲ）；若滿足 $\dfrac{\overline{PL}}{\overline{PA}}=\dfrac{\overline{BC}^2}{\overline{BA}\times\overline{AL}}$ 如圖（Ⅱ）則稱爲拋物線，此處和一般之定義形同而語異；若是橢圓和雙曲線的情形，我們再劃 $\overline{P'L}$，從 V 引 $\overline{VR}$ 平行 $\overline{PL}$ 且與 $\overline{P'L}$ 交於 R（若是雙曲線，則 P' 位於另一支，而 $\overline{P'L}$ 必

需延長於 R ），再加上某些輔助線，阿波羅尼在橢圓和雙曲線的情況時證明了 $\overline{QV}^2 = \overline{PV} \times \overline{VR}$，若是拋物線，阿波羅尼證明了 $\overline{QV}^2 = \overline{PV} \times \overline{PL}$ 證明（Ⅰ）橢圓的情況如圖（Ⅰ）橢圓



①在 Q'，V，Q 三點所在之平面，截圓錐平行 $\overline{BC}$ 則得一圓交軸三角 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$ 於 G，H，則 $\overline{GH}$ 爲圓之直徑 $V \in \overline{GH}$ 且 $\overline{GV} \times \overline{HV} = \overline{QV}^2$

②$\triangle PLP' \sim \triangle VRP'$　$\therefore \dfrac{\overline{PL}}{\overline{PP'}} = \dfrac{\overline{VR}}{\overline{VP'}}$

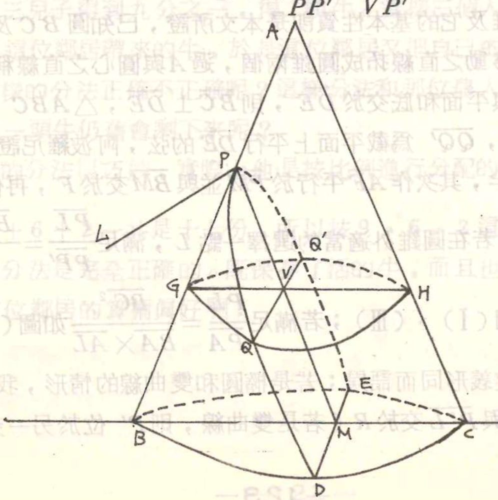
③$\triangle PGV \sim \triangle PBM \sim \triangle ABF$　$\therefore \dfrac{\overline{GV}}{\overline{PV}} = \dfrac{\overline{BM}}{\overline{PM}} = \dfrac{\overline{BF}}{\overline{AF}}$

④$\triangle HP'V \sim \triangle CP'M \sim \triangle CAF$　$\therefore \dfrac{\overline{HV}}{\overline{P'V}} = \dfrac{\overline{CM}}{\overline{PM}} = \dfrac{\overline{CH}}{\overline{AF}}$

由③④相乘得 $\dfrac{\overline{GV}}{\overline{PV}} \times \dfrac{\overline{HV}}{\overline{P'V}} = \dfrac{\overline{BF}}{\overline{AF}} \times \dfrac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = \dfrac{\overline{PL}}{\overline{PP'}}$

由①得知 $\overline{GV} \times \overline{HV} = \overline{QV}^2$　②得知 $\dfrac{\overline{PL}}{\overline{PP'}} = \dfrac{\overline{VR}}{\overline{VP'}}$

圖Ⅱ



$\therefore \dfrac{\overline{QV}^2}{\overline{PV}\times\overline{P'V}}=\dfrac{\overline{VR}}{\overline{VP'}} \Rightarrow \overline{QV}^2=\overline{PV}\times\overline{VR}$

如此步驟證明了阿波羅尼橢圓之性質。

證明（Ⅱ） 拋物線的情形

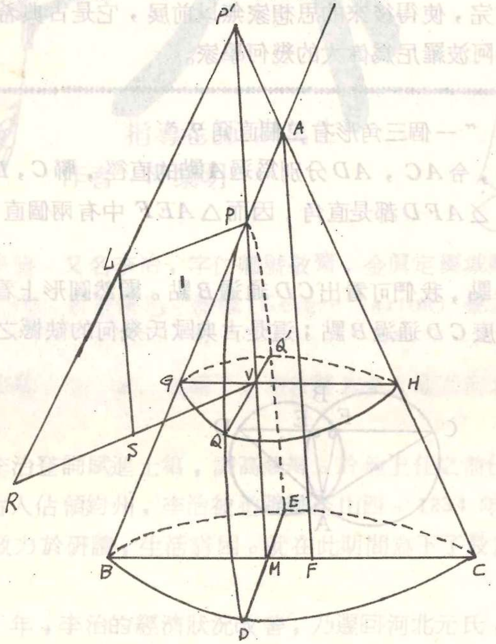
①同橢圓（Ⅰ） 證明中⑴的情形 $\overline{QV}^2=\overline{HV}\times\overline{GV}$

②在 $\triangle AHG$ 中 $\because \overline{PV}\parallel\overline{AG} \quad \therefore \dfrac{\overline{HV}}{\overline{PH}}=\dfrac{\overline{GV}}{\overline{PA}}$

③ $\triangle ABC\sim\triangle PBM\sim\triangle PHV \quad \therefore \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{BM}}{\overline{PB}}=\dfrac{\overline{HV}}{\overline{PH}}=\dfrac{\overline{GV}}{\overline{PA}}\quad \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BM}}{\overline{PM}}=\dfrac{\overline{HV}}{\overline{PV}}$

上⑶ $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\times\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{GV}}{\overline{PA}}\times\dfrac{\overline{HV}}{\overline{PV}}=\dfrac{\overline{QV}^2}{\overline{PV}\times\overline{PA}}=\dfrac{\overline{PL}}{\overline{PA}}\Rightarrow\overline{QV}^2=\overline{PV}\times\overline{PL}$

圖（Ⅲ）



證明（Ⅲ）雙曲線的情況

①同橢圓（Ⅰ）證明中⑴的情形 $\overline{QV}^2=\overline{HV}\times\overline{GV}$

② $\triangle ABF\sim\triangle PGV \quad \therefore \dfrac{\overline{BF}}{\overline{AF}}=\dfrac{\overline{GV}}{\overline{PV}}$

③ $\triangle PP'L\sim\triangle VP'R \quad \therefore \dfrac{\overline{PL}}{\overline{PP'}}=\dfrac{\overline{RV}}{\overline{P'V}}$

④$\triangle AFC \sim \triangle P'VH \quad \therefore \dfrac{\overline{CF}}{\overline{AF}}=\dfrac{\overline{HV}}{\overline{P'V}}$

由(2)×(4)得 $\dfrac{\overline{BF}\times\overline{CF}}{\overline{AF}^2}=\dfrac{\overline{GV}\times\overline{HV}}{\overline{PV}\times\overline{P'V}}=\dfrac{\overline{QV}^2}{\overline{PV}\times\overline{P'V}}$

$\dfrac{\overline{PL}}{\overline{PP'}}=\dfrac{\overline{RV}}{\overline{P'V}},\ \dfrac{\overline{PV}}{\overline{P'V}}=\dfrac{\overline{PL}}{\overline{PP'}}=\dfrac{\overline{BF}\times\overline{CF}}{\overline{AF}^2}=\dfrac{\overline{QV}^2}{\overline{PV}\times\overline{P'V}}\Rightarrow \overline{QV}^2=\overline{PV}\times\overline{VR}$

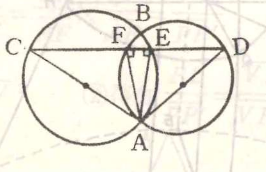
證明(I)(II)(III)是Conic Section 第一册中平面之三性質，可見阿波羅尼思維之細緻。

在阿波羅尼之前就有人研究圓錐曲線，尤其是阿里斯塔爾斯和歐幾里得均有關此方面的著作，阿基米得的著作也提到了一些結論，但阿波羅尼除去了其中不切題的部分，並且將它加以系統組織，他的成就是不朽的，幾乎Conic Section 八册將圓錐曲線的所有問題作完，使得後來的思想家無以前展，它是古典希臘幾何學的巔峰，使得當時的人尊稱阿波羅尼為偉大的幾何學家。

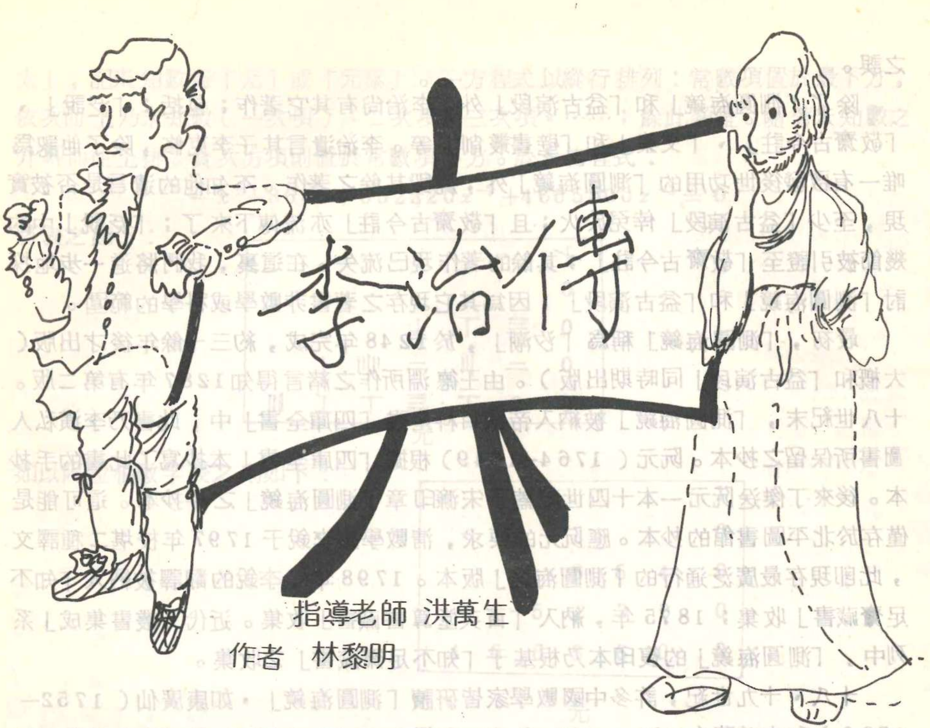
"一個三角形有二個直角？"

兩圓交於A，B兩點，令AC，AD分別為過A點的直徑，聯C，D，分別交圓於E，F。則$\angle AEC$，$\angle AFD$都是直角，因而$\triangle AEF$中有兩個直角；這顯然是荒謬的。

如果把圓畫得精細一點，我們可看出CD通過B點。顯然圓形上看來如此，但我們無法講出理由為什麼CD通過B點；這是古典歐氏幾何的缺憾之一。



李治傳



指導老師 洪萬生

作者 林黎明

李治；數學家。又名李治，字仁卿號敬齋，金眞定欒城縣人。生於西元1192年，卒於西元 1279年。曾被喬治·沙頓 (Gevgre Sarton) 譽爲當代最偉大的數學家之一。

他的父親李遹是金王朝一名屬下，稍後將其家人遷回河北龍城家鄉，李治獨往河北元氏求學。

1230年，李治登詞賦進士第，調高陵簿。於他上任之前任職河南鈞州知事。1232 年，蒙古人佔領鈞州，李治被迫避難至山西。1234 年，金落入蒙古人手中。此後，他便致力於研讀，生活窮困。就在此期間寫下了最重要的數學研究「測圓海鏡」。

大約1251 年，李治的經濟狀況改善，乃遷回河北元氏，定居於封龍山附近，仍過著隱居生活，但和張德輝、元裕交往甚篤；他們三人即著名的「封龍三老」。1257年，忽必烈召見李治，徵詢有關州政、選賢用能、佈署問題和地震的原因等。1259 年，李治完成另一部數學研究——「盆古演段」（計算新步驟）。1260年，元世祖登基。次年，任命李治官職，李治以年邁體弱爲由請辭。1264 年，元世祖始立翰林院，著手編纂遼、金兩朝的史書。次年，李治被迫參與。數月後，仍以年邁體弱爲由請辭，歸封龍山，許多學生拜師門下。

因和唐高宗同名，爲了避諱而易名李治；却引起後人之混淆，以爲李治是李治

之誤。

除了「測圓海鏡」和「益古演段」外，李治尚有其它著作；包括：「泛說」、「敬齋古今註」、「文集」和「壁書叢削」等。李治遺言其子李克修，除了他認為唯一有啟發後世功用的「測圓海鏡」外，燒毀其餘之著作。不知他的遺言是否被實現，至少「益古演段」倖免於火；且「敬齋古今註」亦流傳下來了；「泛說」中的幾節被引證至「敬齋古今註」；其餘的著作現已流失。在這裏，我們將進一步地探討「測圓海鏡」和「益古演段」；因為其它現存之著書非數學或科學的範圍。

最初，「測圓海鏡」稱為「汐潮」，於1248年完成，約三十餘年後才出版（大概和「益古演段」同時期出版）。由王德淵所作之緒言得知1287年有第二版。十八世紀末，「測圓海鏡」被納入帝國百科全書「四庫全書」中，此書乃李潢私人圖書所保留之抄本。阮元（1764—1849）根據「四庫全書」本抄寫了此書的手抄本。後來丁傑送阮元一本十四世紀蓋了宋濂印章「測圓海鏡」之手抄本。這可能是僅存於北平圖書館的抄本。應阮元的要求，清數學家李銳于1797年校堪二種譯文，此卽現存最廣泛通行的「測圓海鏡」版本。1798年，李銳的翻譯被納入「知不足齋藏書」收集；1875年，納入「百芙堂算書藏書」收集。近代「叢書集成」系列中，「測圓海鏡」的複印本乃根基于「知不足齋藏書」之收集。

十八、十九世紀，許多中國數學家皆研讀「測圓海鏡」，如康廣仙（1752—1786）和李善蘭（1811—1882）等。李儼（1892—1963）做此書之細則分析，但尚未為世人翻譯出來。

「益古演段」于1259年完成，1282年出版。它被認為是較早的「益古集」之後譯。「益古集」現已流失。「益古演段」被納入「知不足齋藏書」和「百芙堂算書藏書」收集。近代「叢書集成」系列中，「益古演段」之複印本乃根基於「知不足齋藏書」之譯文。由L·Van Hee譯成法文。

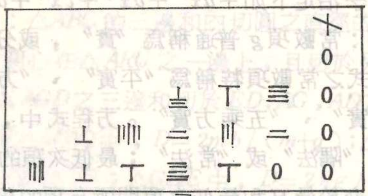
李治引入一種稱為「天元術」的代數步驟立多次方程式。天元術在中國和日本的數學史上佔了很重要的地位。自十四世紀初到西方的耶穌會士將代數引入中國，此間中國似乎無人了解此法。代數使得十八世紀的中國數學家，尤其是梅穀成，認識天元術和朱世傑的四元術的代數法，儘管他們並不熟悉其記號。當時有些熱心的中國學者知道最初的代數是由東方傳入歐洲，便儘可能地宣稱天元術是由中國傳至西方，且在那裏稱為著名的代數學。天元術在日本亦有很深的影響，卽著名的Tengenjutsu。例如，在十七世紀，一位日本數學家關孝和，從李治和朱世傑的代數中，發展成一個無窮展開式，此式現可利用微積分之計算法導之。

李治自稱非天元術之創始人。由「敬齋古今註」知其乃延襲太原（今山西）一位數學家彭澤（字彥材）的方法。對於彭澤我們幾乎一無所知。十四世紀初，朱世傑撰文提及李治友人之一，著名的詩人元好問亦精通天元術。天元術記常數項為「

太」，記未知數為「元」或「元素」。一方程式以縱行排列：常數項置於最下方，依次而上乃未知數（一次項）、二次項、三次項、……；餘此類推。隨著未知數之升冪而往上排。負次方項則置於常數項下方。於是方程式：

$$-x^2+8640+652320x^{-1}+4665600x^{-2}=0$$

將表之如下：



元

如以阿拉伯數字表之則如下：

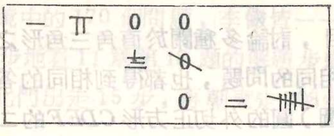
						−1
						0
			8	6	4	0
	6	5	2	3	2	0
4	6	6	5	6	0	0

元

以「元」和「太」分別標出未知數和常數項的位置。在益古演段中，李治將代數方程式的排列順序顛倒：即常數項置於最上方，依次而下乃一次項、二次項、三次項、……等。

例如：方程式　$1700-80x-0.25x^2=0$

可表為：



太

若以阿拉伯數字表之，則如下：

1	7	0	0		
		−8	0		
			−0	2	5

太

後來的中國數學家皆延用李治的表法。

李治於一數之最後一個數字劃一斜線表示負數。他也和同時代的秦九韶一樣用"0"記號，但並無證據顯示二者有過交往。中國稍早就已用零記號。嚴敦傑指出雖

然八世紀由印度引入〝點〞的觀念，十三世紀由伊斯蘭文化引進以圓的形狀表示零的觀念；然而十二世紀，中國曾獨自地由正方形演變至以圓來表示零記號。

李治將方程式應用至六次方。他沒有記下解此種方程式的過程，但已顯示那個時代的中國已懂得解六次方程式的方法。此解法一定和十九世紀初秦九部所描述的魯非尼和霍納的解法類似。李治定下如$+ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g=0$之高次方程式的各專有名詞：常數項$g$普通稱為〝實〞，或分別對一次、二次、三次、四次、五次、六次方程式之常數項特稱為〝平實〞、〝方實〞、〝二乘方實〞、〝三乘方實〞、〝四乘方實〞、〝五乘方實〞。方程式中，最高次項的係數（如此例中的a）稱為〝隅〞、〝隅法〞或〝常法〞；最低次項的係數（如此例中之f）稱為〝從〞或〝從方〞。介於最高和最低次項間所有項的係數都稱為〝廉〞。如一個三次方程式，x^2項的係數即稱為〝廉〞；四次方程式中，x^2項的係數稱為〝第一廉〞、x^3項的係數稱為〝第二廉〞。因此，如上所列之六次方程式中，e即第一廉；d稱第二廉；c稱第三廉；b稱第四廉。

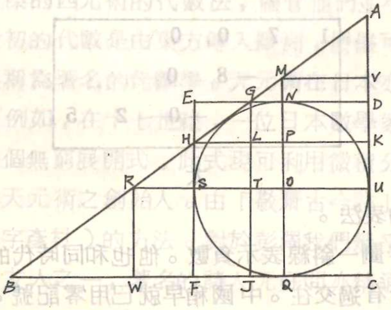
上面所說的，除了絕對項外，都僅適用於正數。李治於最高、最低次項和〝廉〞的前面加上〝益〞或〝虛〞表示負數。他不用不同之記號區分正和負的常數項，不像秦九部，他並不使〝常數項必為負〞成為規則。

看李治如何處理提出平方根後的餘數是件有趣的事。如其益古演段中第四十個問題所舉之例：

方程式 $-22.5x^2-648x+23002=0$

他令$y=nx$，此處$n=22.5$ 則方程式可改寫成：$-y^2-648y+517545=0$，由此式可得$y=465$，所以$x=20\frac{2}{3}$。秦九部亦用相同之解法。

〝測圓海鏡〞一書包括170個題目，討論多種關於直角三角形之內切圓或外接圓之類型問題。這些類型的題目都問相同的問題，也都得到相同的答案。此書開頭就有一直角三角形內切圓之圖解（如圖）圓的外切正方形$CDEF$的二邊沿著$\triangle ABC$的底和高，另二邊則和斜邊AB交於G和H；GJ和HK互相垂直，交於L點；過圓



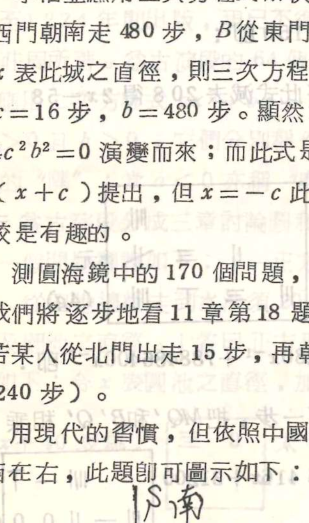
心O，$MNPOQ$ 平行 AC，交 AB 於 M，交 BC 於 Q，截 ED 於 N，截 HK 於 P;同樣地，過 O 點，$RSTOU$ 平行 BC，交 AB 於 R，交 AC 於 U，截 EF 於 S，截 GJ 於 T；且 MV 平行 BC，交 AC 於 V；RW 平行 AC，交 BC 於 W。

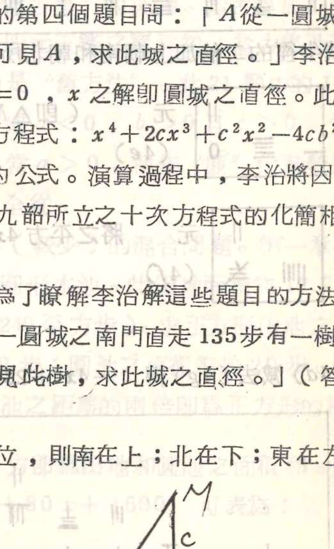
於是，得到圖中十五個三角形的三邊之特殊項。這些是由三角形的邊和圓間的關係來決定。例如：△ABC 的三邊和內切圓之直徑的關係如下：$D=2ab/(a+b+c)$。△ARU 的三邊和圓心在△ARU 之一邊上，且切於另二邊之圓的直徑關係如下：$D=2ar/(r+u)$。△AGD 之三邊和切於 ED, AG, AD 之圓的關係如下：$D=2ag/(g+d-a)$。同樣地，在△MBQ 中，$D=2mb/(m+q)$；△HBF 中，$D=shb/(h+f-b)$；△MRO 中，$D=2mr/O$；△GHE 中，$D=2hg/(h+g-e)$；△MGN 中，$D=2mg/(n-m)$；△HRS 中，$D=2hr/(s-r)$。以上所述皆於書中的第一章提到。第二章開始，李治即描述如何將這些結果應用至各種情況。例如，第二章的第二個題目問：「A 和 B 二人從一圓城的西門出發。首先，B 朝東走 256 步，然後 A 朝南走 480 步則可見 B，求此城之直徑。」△MBQ 的公式可直接應用於此題而求出城直徑。

李治並應用三次方程式解決類似問題。第三章的第四個題目問：「A 從一圓城之西門朝南走 480 步，B 從東門向前直走16 步則可見 A，求此城之直徑。」李治令 x 表此城之直徑，則三次方程式 $x^3+cx^2-4cb^2=0$，x 之解即圓城之直徑。此處 $c=16$ 步，$b=480$ 步。顯然地，前式乃由四次方程式：$x^4+2cx^3+c^2x^2-4cb^2x-4c^2b^2=0$ 演變而來；而此式是直接應用△MBQ 的公式。演算過程中，李治將因式 $(x+c)$ 提出，但 $x=-c$ 此解不合。此法和秦九韶所立之十次方程式的化簡相比較是有趣的。

測圓海鏡中的170 個問題，李儼皆一一研讀。為了瞭解李治解這些題目的方法，我們將逐步地看11 章第18 題的解題步驟：「從一圓城之南門直走 135步有一樹，若某人從北門出走 15 步，再朝東走 208步，則可見此樹，求此城之直徑。」（答曰 240 步）。

用現代的習慣，但依照中國的傳統方法標出方位，則南在上；北在下；東在左；西在右，此題即可圖示如下：





〈圖三〉

令 x 表城之半徑；c 表朝南所走之距離；c' 表朝北所走之距離；$b+b'$ 表朝東所走之距離。則 $c^2(b+b')^2$ 是〝實〞（即 $c^2(b+b')^2$ 為常數項）；$2c(b+b')^2$ 是〝從〞（即 $2c(b+b')^2$ 為 x 項係數）；$-2\{(b'+b')(c+c')\}-[(b+b')^2-\{(b+b')-(c+c')\}^2]$ 是〝第一益廉〞（即為 x^2 項之係數）；$-4(b+b')-4\{(b+b')+(c+c')\}$ 是〝第二益廉〞（即為 x^3 項係數）；-4 是〝虛隅〞（即 x^4 項係數）。然後解此四次方程式即可求出城半徑。其過程如下：

設一天元表城之半徑，加上朝南走的距離（即圖三中 $\triangle MRO$ 之高 MO，可表為 $x+135$）。

𝍠 元
𝍠 𝍫 𝍤 (4a)

將 $\triangle MB'Q'$ 之底 208 和 $x+135$ 相乘得：$208x+28080$ 即

𝍡 0 𝍧 元
𝍡 𝍰 0 𝍰 0 (4b)

此式除以 x 得：$208+28080x^{-1}$ 即

𝍡 0 𝍧 太
𝍪 𝍧 0 𝍧 0 (4c)

是 $\triangle MB'Q'$ 之斜邊 MB'。將之平方得：$43264+11681280x^{-1}+788486400x^{-2}$ 即

𝍣 𝍫 𝍡 𝍮 𝍣
𝍩 𝍠 𝍮 𝍧 𝍩 𝍡 𝍰 0 太
𝍦 𝍰 𝍧 𝍬 𝍧 𝍮 𝍣 0 0 (4d)

將此式暫置一旁。

城半徑的二倍加上朝南和朝北所行距離的和為 $2x+150$ 即：

𝍡 元
𝍩 𝍭 0 (4e)

（即 $\triangle MB'Q'$ 之高）。將此式減去 208 得 $2x-58$

𝍡 元
𝍤 𝍧̸ (4f)

將之平方 $4x^2-232x+3364$

𝍣
𝍡 𝍫 𝍡̸ 元
𝍫 𝍢 𝍮 𝍣 (4g)

，式 (4d) 減去 (4g) 得：$-4x^2+232x+39900+11681280x^{-1}+788486400x^{-2}$ 即：

𝍣̸
𝍡 𝍫 𝍡 太
𝍢 𝍱 𝍨 0 0
𝍩 𝍠 𝍮 𝍧 𝍩 𝍡 𝍰 0
𝍦 𝍰 𝍧 𝍬 𝍧 𝍮 𝍣 0 0 (4h)

下一步，把 MQ' 和 $B'Q'$ 相乘，得 $416x+31200$

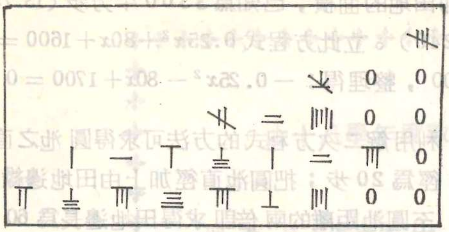
𝍣 𝍩 𝍥 元
𝍢 𝍩 𝍡 0 0 (4i)

，再乘兩倍得 $832x+62400$

𝍧 𝍫 𝍡 元
𝍮 𝍡 𝍬 0 0 (4j)

，此式之值和 (4h) 式之值相等。令此二式相等，整理後得方程式：

$$-4x^4-600x^3-22500x^2+1168128 0x+788486400=0$$



元

(4k)

解此四次方程式得城之半徑。

$x=120$ 步，即為所求。

〔補述〕：連接 OW，則 $OW \perp MB'$。$\triangle MWx \sim \triangle MB'Q'$

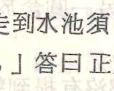
所以 $\dfrac{x+135}{MB'}=\dfrac{x}{208}$，$\Rightarrow MB'=\dfrac{(x+135)\times 208}{x}$ (1)

$MB'^2=MQ'^2+B'Q'^2=(2x+150)^2+208^2$ (2)

由(1)^2＝(2)得一方程式，解之。

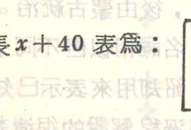
雖然益古演段出書較測圓海鏡為晚，但是益古演段的內容解法較簡單。此乃李冶有鑑於第一本書對一般人而言稍難了些，於是藉第二本書的機會將天元術以較簡單的方法來解釋。此第二本數學論文書被認為是〝益古集〞的後譯。益古集於1078年至1224年間出版，現已不復存。根據朱世傑的四元玉鑑之緒言知，益古集乃平陽莊周所著。益古演段的64個題目中有21題用的是〝舊方法〞。此21題中的16題應用二次方程式 $ax^2+bx-c=0$，此應 $a>0$ 或 $a<0$，$b>0$ 且 $c>0$。當 $c>0$ 且 $b>0$，它們分別稱作〝實〞和〝從〞。當 $a>0$，稱作〝廉〞代替較通用的〝隅〞；當 $a<0$ 亦稱〝廉〞，但於後面加上全從。

益古演段分成三章討論圓和正方形或圓和矩形（較少）的混合問題。第一章的第一個問題翻譯如下：「一正方形田地，中央有一圓形水池。此田地面積為13.75畝。從田地邊緣走到水池須20步的距離（1畝＝240平方步）。求正方形田地之邊長及圓池之直徑。」答曰正方形田地之邊長等於60步；圓池之直徑等於20步。解法如下：令 x 表圓池之直徑，加上由田地邊緣至圓池之距離的兩倍即為正方形的邊長 $x+40$ 表為：



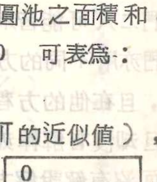
太

；正方形邊長的平方即為田地和圓池之面積和。所以整個面積為 $x^2+80x+1600$ 可表為：



太

將圓池直徑平方後乘以3（3取之於π的近似值），再除以4，得圓之面積 $0.75x^2$ 表為：



太

，將正方形面積減圓池面積得：$0.25x^2+80x+1600$ 可表為：

一	丅	0	0		太
		≟	0		
			0	=	〣

此即田地的面積，已知爲 3300 平方步（13.75 × 240）。立此方程式 $0.25x^2+80x+1600=3300$，整理得：$-0.25x^2-80x+1700=0$

表爲：

一	丌	0	0		太
		≟	~~0~~		
			0	=	卌

利用解二次方程式的方法可求得圓池之直徑爲 20 步；把圓池直徑加上由田地邊緣至圓池距離的兩倍即求得田地邊長爲 60 步。

益古演段的前十個題目，皆由不同之參數討論有關正方形中央有一圓之各類問題；下十個題目則和圓內部有一正方形相關。第一章最後二題 21 題和 22 題，僅和正方形有關。第二章 23 題至 29 題和正方形與其外接圓有關；30 題爲結合兩圓的問題；31 題和矩形中有一圓相關；32 題至 37 題則爲圓中央有一矩形；38 題給兩個矩形；39 題至 42 題則討論矩形內含一圓之各種情形。第三章的第一題 43 題討論 π 的三個相異值：古值 $\pi=3$；近似值 $\pi=22/7$；和劉徽的值 $\pi=3.14$。44 題和不等四邊形有關。45 題和正方形內含另一正方形有關。46 題爲一圓在正方形之外部，但延著正方形對角線的延長線上。47 題和一矩形內含一正方形有關。48 題則爲正方形內含一矩形。49 題至 52 題爲一大正方形內含一小正方形且任一正方形之對角線垂直另一正方形的兩邊。53 題和 54 題與前面相似，只是將內部的小正方形改爲矩形。55 題與 56 題和環形有關。57 與 58 題和圓內含矩形有關。59題爲一正方形內含一圓，又有另一正方形含於此圓中央。60 題則爲一圓內含正方形，再有另一圓含於此正方形中央。62 題爲一正方形延著另一正方形之對角線置於此正方形之一角處。63 題相關於一圓和兩個正方形，且有另一圓含於此三者之一。最後一題 64 題，爲一較大的正方形內含一環形。

李治和秦九韶是同時代的人，但在他們的著作中都沒有提到對方。李治居北方，秦九韶居南方。當時中國南方由宋朝統治；北方由金韃韃統治，後由蒙古統治。他們二人可能皆未曾聞對方之名。他們用於較高次方程式的專有名詞相似但不同，他們亦用不同的方法使用“天元”，李治用天元表示知數；秦九韶却用來表示已知數，且在他的方程式中從不用項。秦九韶將一個方程式根之解出過程解說的很清楚，但却沒有解釋如何由已知條件立方程式。相反地，李治精於立代數方程式的方法，而沒有解說解方程式的過程。所以，李治確如喬治・沙頓所說的：實質上是位代數學家。

本文節譯自「科技名人辭典」

六十八學年度數學學會組織概況

理 事 長：蘇高興（二甲）
副理事長：黃碧蓉（夜四）
理　　事：吳秉鋒（二乙）　宋和乾（二乙）
李孟書（二丙）　簡素貞（三甲）
宮潤生（三丙）　彭升財（三丙）
陳逸勳（三丙）　李　正（夜二）

文教股長：宋和乾（二乙）
師大數學組長：張樹城（三甲）
數　靈組長：陳材河（二甲）
海報宣傳組長：何素貞（三乙）
總務股長：陳逸勳（三丙）
體育股長：宮潤生（三丙）
康樂股長：彭升財（三丙）
交通股長：吳秉鋒（二乙）
衞生股長：簡素貞（三甲）
服務股長：李孟書（二丙）

監 事 長：張協權（二乙）
監　　事：劉　煜（四丙）　林東興（四乙）
劉紹正（三乙）　蔣玫玲（夜五）

編 後 語

首先，感謝顏主任殷切的指導、林福來、趙文敏、林義雄、吳森原、邱日盛、王詩頌、洪萬生諸位老師從百忙中熱心指導同學寫作。以及系裏諸位老師所給予的支持與鼓勵。

本期的作品，涵蓋各個領域，內容不乏上上之作；有介紹性的，亦有一些獨特的見解；其中關於中國古代數學家的探究值得深思：林老師的「淺談四色定理」及邱老師的「森林的經營——線型代數的應用」更具創意；其他每一篇作品皆爲作者心血之作；望各位同學能詳加研讀；唯一遺憾的是稿件仍感缺乏。

究其原因，一、二年級的作品比較缺乏，或許他們所接觸的範圍較窄，一些可貴的心得不曉得如何表達，亦或不敢表達，但我們必須强調的——作品內容的價值雖然重要，但如果能引發同學之間研究和探討的風氣，那更是我們所期望的。

最後，謝謝諸位作者的賜稿及美工組林耀邦同學給予莫大的幫助。更希望諸位師長和同學提供寶貴的建議，共同爲我們的系刊開創出更美好的一頁。

張樹城　　謹啟

六十九年六月

青師：既運風光

師大數學　第十四期

發行人：顏啓麟

出版者：國立台灣師範大學數學學會

主　　編：張樹城

編　　輯：林傳儒　蕭惠華　黃文熙

李慶文　陳澤民　戈良芬

李正

美　　工：林耀邦　韋秀玲

印刷者：九　章　出　版　社

社址：台北市羅斯福路三段297—2號

電話：(02) 3 9 1 4 5 3 7

出版日期：中華民國六十九年六月五日

師大訓課刊登第136號

國立臺灣師範大學數學系

中華民國69年6月出版