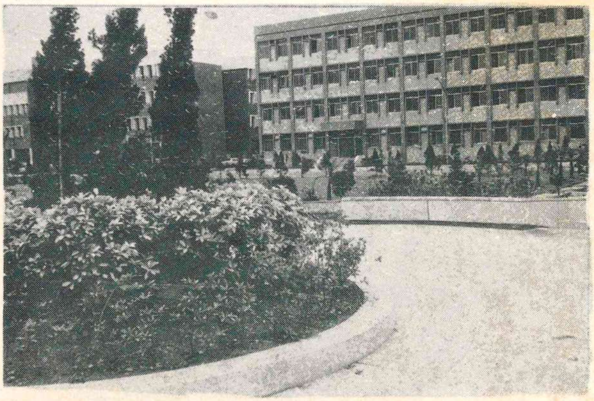
師大數學

11

幽雅的校園



系主任序

本系成立於民國三十五年八月，首由張儒林先生擔任系主任，當時僅有數學系一年級及二年制專修科一年級各一班，同學三十餘人，教授三位、助教一位，嗣由管公度、潘璞、李新民、康洪元、范傳坡各教授輪掌系務，歷經各主任之努力及同仁等之精一計劃，始具今日規模。現本系日間部有十二班，夜間部五班，共有同學六百餘人，圖書壹萬陸千餘册（分藏於數研所資料室及理學院圖書舘約四千伍百種），雜誌百餘種，自六十四年夏遷於新址後，環境煥新，有助於研究風尚，師生孜孜不息，均為美好遠景而奮發。

畢業系友，已逾越千餘人，多各有成就（獲博士學位者逾百人，僅獲碩士學位者約壹百柒十餘人）或執教於高等學府，或繼續高深研究，餘多服務於中等教育界，平時諄諄教學，誨人不倦，敦品篤行，懷抱熱忱，此實為本校善良風氣之所致。

邇來科學進展甚速，數學之需要甚切，本系之任務更日益增大，除學術研究外，更肩負數學教育之發展及中等數學教育輔導之重要任務。同仁等均懷履薄之心，致力於未來發展，並時時注意於以下數點：

一、安定中求充實，再求發展。

二、增强教材教法之研究，鼓勵對數學教育有貢獻者出國觀摩。

三、注重高深學術之研究及應用。並鼓勵著述及出版。

四、增設電子計算機組以配合中等數學教育之發展。

五、增訂圖書雜誌，並補全過期雜誌。

六、配合課程需要，增聘專門人才。

為增强研究風尚，本系於十一年前創辦年刊，發表創作及研究心得。切磋琢磨，提高學習興趣。屢經負責同學之辛勞耕耘及師生系友之共同支持，漸玆茁壯，今後請大家更不吝珠璣，源源賜稿，則本刊必前程似錦，散發絢爛光芒，於此，至表謝忱，更盼我師生系友善珍此片園地。

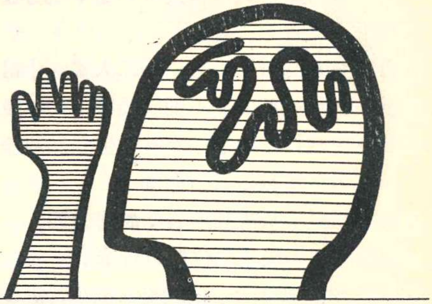
常法徽　謹識

六十六年六月

目　　錄

教學實習的一環
一試教

李嘉淦



“試教”是教學實習這一科目中的一分項，也是每一個修這科的四下的學生，必須經過的一段歷程，它是又新鮮，又刺激的工作，此時的學生稱爲敎生（或試敎敎師），每位敎生都切盼着，嚮往着這大約一個月左右的工作，它表現出學習將告以段落，顯現於眼前的是考驗，看看自已所學習的各課程，是否足夠應付教學的需要；看看自己所獲得的教學方法，是否能配合敎材，而對上了學生學習的願望；看看自已所薰陶出的行爲，素養與規範，是否能滿足學生心理上的需求與楷模；所以，每位敎生都緊張且忙碌，思前慮後的要怎樣才能完成這一任務，建立了要開展的工作的信心，去開創燦爛的神聖工作。

爲了滿足各位的需求，玆將試敎的有關事項，依序分述於下，以作參考。

一、試 敎 前

1.教學實習敎師先與擬試敎學校連繫，取得同意後，才確定試敎學校，年級與班次。

2.教學實習敎師指定學生，前往擬試敎學校抄錄有關資料：如

(1)校長、敎務主任、訓導主任、研究主任、教學組長或指定負責試敎工作的敎師，及試敎班級指導敎師的名單。

(2)試敎班級分班的分科課程表。（學生須備妥空白課程表，約五十份，如附表一）。

(3)試敎班級該科預定進度表，如附表二。

(4)試教學校第二學期事曆（或校曆）如附表三。

3.教學實習敎師確定有關事項：

(1)試敎停課時間，自×月×日至×月×日（全系一致）。

(2)試敎學校有關人員與敎生招待會（或試敎前座談會）的時間，（×月×日上（下）午×時）與地點。

(3)見習時間，自×月×日至×月×日，約一星期。

(4)試敎時間，自×月×日至×月×日，約二星期。

(5)教學觀摩會（如試敎學校要求舉辦）的時間，（×月×日上（下）午×時×分至×時×分，共 50 分鐘）與地點。

(6)試敎檢討會的時間與地點。（如試敎學校要求舉辦）。

(7)敎生試敎學校與班級的分配表。

4.教學實習敎師指定學生，將有關資料送系

主任辦公室，實習會及教務處（或分部教務處）及本人。

5. 分配全班為若干小組，每二人為一小組，以試教授課時間互不衝突為限；同年級的若干小組為一組，指定一教生負該組全責。（名單送教學實習教師）

6. 印製試教班級課程總表，如附表四。

7. 印製試教學校班級位置分佈表。

8. 編寫預定進度的單元教案（或小時教案），送交實習教師審閱批改，批改後正楷抄寫一式五份；（最好同年級同教案）。

9. 實習會負責備試教指導人員聘函，及招待會邀請函，教學實習教師指定學生核對後，送達擬試教學校教務處，或研究處。（最好一星期前送達）。

二、招　待　會

1. 教生着校服，整齊儀容，於規定時間二十分鐘前，到達指定會場。佈置並備茶點。

2. 教學實習教師主持會議，報告試教有關事項。

3. 試教學校校長或主任，報告試教教生宜注意事項，並介紹試教指導教師。（各位教生宜特別注意本身的指導教師）。

4. 分發試教班級課程總表。

5. 分組座談——教生與指導教師座談。

⑴核對授課時間表及教室位置分佈表。

⑵核對實際教學進度表。

⑶講述試教班級之學生的習性，程度及班級常規。

⑷指導試教班級之教學常規，包括教材摘要，實施教學方法，練習習作方法及作業繳交時間，地點，補充教材之處理，臨時攷及抽考的處理等。

三、見　習

1. 整理教案（如教學進度與預定進度，未能符合，則須另行調整，送實習教師再行審閱批改後處理）。

2. 在指導教師授課時間內，由試教之教生見習，不得無故缺席。

3. 教生宜注意事項：

⑴記憶座次安排，了解教室座向，採光方向等。

⑵記憶學生名字，尤應注意秉性特異之學生。

⑶確定指導教師之教學常規，並儘量設法配合。

⑷熟悉學生學習常規。

⑸熟悉指導教師之研究室（或休息室）及有關事項。

⑹純熟教案所實施之教學活動。

四、試　教

1. 教生宜於實施試教前，將教案交給指導教師一份，交給教學實習教師三份，一份自用。（宜注意沒有教案，是不准試教的）。

2. 教生宜依照教案，實施教學活動。

3. 一小組有二人，除了試教該班之教生，進行教學活動，另一人在教室後面，一方面協助教生所實施之教學，另一方面協助教室管理，促進學習情緒，增進了解之程度，更可採長補短，幫助自己的進行教學。

4. 指定作業習作及繳交時間、地點；並宜注意下列幾點：

⑴全部詳細批改，不得只打“√”,“×”且儘速發還。

⑵分別登記、評分。

⑶檢驗學生學習狀況。

⑷實施補救教學，即將共同錯誤的練習，分別提出，加以說明。

⑸修正教學之實施。

5.舉行十分鐘的測驗，宜注意下列幾項：

⑴詳細批閱，並須將發生錯誤處，加下線或“？”表明。

⑵分別登記，評分。

⑶實施診斷後之補救教學。

⑷調整教學活動。

6.不得無故缺席。

7.遇有突發事故，宜於負責教生商討，或向教學實習教師報告處理。

8.各位教生送達實習評分表。

五、試　教　後

1.整理作業登記資料，並綜合作業成績。

2.整理試卷，並計算總平均成績。

3.整理學生學習狀況登記資料。

4.將全部資料繳交指導教師，並報告試教狀況，及完成之章節。

六、教學觀摩會

教學觀摩會之實施，係應試教學校之要求而舉辦，通常在試教階段之最後一天，為使進行順利，先由教學實習教師在最後一天中，選擇適當教生舉行，主持教學之教生，宜注意下列幾項：

1.另行編製小時教案，經批改後，油印足夠份數。如附件五。

2.準備教學所用之教具。

3.熟悉教學場所之設備、採光等。

4.純熟教材內容，熟練教具操作技巧，實施教學活動，核驗成果評量。（不可以看書教學）。

5.如果進行診斷時，（五至十分鐘），須先備好試題，以免浪費時間。

6.持筆正確，字體端正，行列分明，並須控制準確時間。

七、檢　討　會

試教檢討會之舉辦，亦係接觀摩會後而實施，（倘若不舉辦，則俟返校後，自行舉行之）。其程序如下：

1.由試教學校校長或主任主持。

2.主持觀摩會的教生，作簡略的報告，通常以三至五分鐘為限。

3.指導教師作簡略批評（包括觀摩會及試教）。

4.參加人員提出適當意見。

5.主席整理結論。

倘若返校後，舉行檢討會，由教生依次提出試教狀況，所發生的問題，得意傑作，頹喪事件等，經商討後，由教學實習教師整理總結。

試教本就是一件繁複的，有意義的，有刺激的，有價值的，更具挑戰性的一種活動；這活動也就導致出許多問題，玆略舉一些於下，讓大家共同研討之，該怎麼辦？

1.學生的程度越來越差了。

2.難道我把學生估價太高了。

3.他們不懂也不肯說出來。

4.學生作業寫得太紊亂了；太潦草了。

5.作業批改苦得要命，他們居然不看一下。

6.學生只重答案，不重過程了。

7.學生只重技巧，不重定理的証明。

8.我們又不是教師，說了不聽。

9.攷試成績，沒有一個及格，他們都不在乎。

10.觀念太容易不聽，操作太難了不攷也不聽，好高騖遠。

最後，我們都知道要去開創的神聖的工作，是必須具有專業精神的一項良心的工作，百年樹人的工作。我們只有不怕挫折，日日新，又日新，更日新去追求它，去完成它。

《附表一》

××學校國高中　年　班　指導教師

週次 ＼ 時間	一	二	三	四	五	六
早讀						
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

《附表二》

教學及作業進度表

高中＿＿＿年級＿＿＿組＿＿＿班　　任課教師＿＿＿＿＿＿

學科＿＿＿＿＿＿　每週時數＿＿＿＿＿＿　用書出版書局＿＿＿＿＿＿　參考用書＿＿＿＿＿＿

週次	日期	教材分配		實際進度			作業分配		實際進度			備考
		預定進度	起迄頁數	符合	提前	落後	預定進度	起迄頁數	符合	提前	落後	
1	20/2～26/2	第一册 p.186-191	186-191				EX. 7-7					
2	27/2～5/3	討論寒假作業										
3	6/3～12/3	第一册	191-201				EX. 7-8					
4	13/3～19/3	第二册開始～§4-1	1-18				EX. 1-1 到 1-4					
5	20/3～26/3	§4-2, §1	-30				EX. 1-5, 2-1					
18	19/6～25/6	§2	-126				EX. 5-4 到 5-7					
19	26/6～2/7	期考										27/6, 29/6, 30/6 期考

《附表三》

學 年 度 第 二 學 期 行 事 曆

週次 月日 星期	準備週	一	二	三	～	十七	十八	十九	廿
日	13	20	27	6	～	12	19	26	3
一	14	21	28	7	～	13	20	【27】	4
二	15	22	3月 1	8	～	14	21	28	5
三	16	23	2	9	～	15	22	【29】	6
四	17	24	3	10	～	16	23	【30】	7
五	18	25	【4】	11	～	17	24	7月 1	8
六	19	26	5	12	～	18	25	2	9
行事	準備註册事宜。	「二月廿二、廿三、廿四叁日學生註册。」「二月廿五日開學，正式上課。						六月廿七、廿九、卅日舉行期末考試。	
備註									

《附表四》(1)

節次 \ 教生與班次 \ 星期	一	二	三	四	五	六
1	(班次)(教生)					
～						
8						

《附表四》(2)

系級別		指導教授	
試教學校		負責校生	
人數		試教班次	

停課時間	座談會	
	見習時間	
	試教時間	
	觀摩會時間	
	檢討會時間	

教生	年級班別	週次 一	二	三	四	五	六	指導教師	同小組教生
		3		1	4	2	1		

《附表五》

觀摩教學小時教案

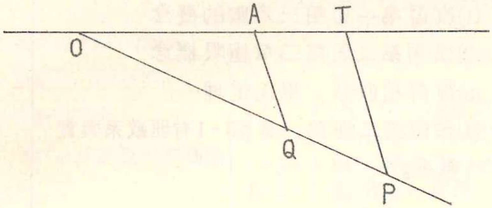
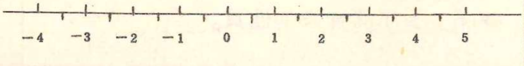
數學科　單元教學　活動設計

單元名稱	有理數系與實數系	班　級	高一　班	人數	52 人
教材來源	高中數學實驗教材第二冊	指導老師	老師	時間	50 分鐘
教學方法	講述法、問答法、練習法	試教學生			
教學資源	1.高中數學教材第二冊（實驗本）（東華本） 2.數學傳播季刊 3.黑板、粉筆、直尺、圓規				

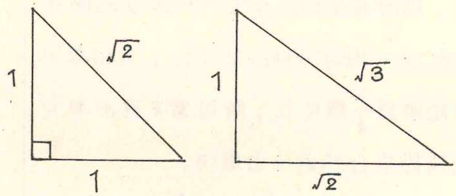
教學目標	單元目標	具體目標
教學目標	1.認知方面 1-1認識代數與幾何間的關係 1-2了解有理數系的稠密性 1-3認識無理數的意義 1-4了解有理數系和實數系的關係 2.技能方面 2-1訓練作圖的能力 2-2熟悉無理數的找法 3.情意方面 3-1培養研究探討的精神 3-2培養靈活的思考力 3-3欣賞數系的完美結構	1-1-1 指出代數與幾何間的密切關係。 1-1-2 指出有理數與有理點的對應關係。 1-2-1 從點集合的密集性，推知有理數系的稠密性。 1-2-2 指出兩有理數之間，仍有有理數存在。 1-3-1 指出數線上的點不全是有理點。 1-3-2 區別所給予的數，是有理數或無理數。 1-4-1 說出任一實數，均可以適當的有理數列的極限表出。 2-1-1 從正確的作圖過程熟練作圖的方法。 2-1-2 操作$\frac{q}{p}$（$p,q\in N$）的作圖方法。 2-1-3 操作$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$的作圖方法。 2-2-1 證明$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$都不是有理數 2-2-2 運用作圖求出$\sqrt[4]{2}$。 2-2-3 證明$\sqrt{2+\sqrt{2}}$不是有理數。 2-2-4 運用作圖求出$\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 2-2-5 從方程式的求解推出$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt{2+\sqrt{3}}$均不為有理數。 3-1-1 探討有理數系與實數系間的關係。 3-1-2 探求無理數的存在。 3-2-1 利用作業，培養其靈活的思考力。 3-3-1 從不同的觀點推求實系的擴展，欣賞其結構之巧妙與完美。

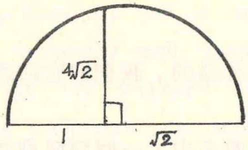
時間分配	節次	月	日	教學重點
	1	四	廿七	有理數系與實數系
	2			
	3			

教學目標	教學活動	時間	成果評量
	一、準備活動 ㈠教師活動 1.教材準備 (1)高中數學教材第二册(實驗體) (2)數學傳播季刊第一卷第二期、第三期。 2.教具準備 (1)直尺、圓規 (2)粉筆 ㈡學生活動 1.教材準備 (1)複習第一册第三章數的概念 (2)複習第二册第二章極限概念 (3)複習相似形,畢氏定理 (4)預習第二册第三章§3-1有理數系與實數系。		
達成 3-1-1	二、發展活動 ㈠引起動機 在上一册第三章,數的概念的部份,我們曾經簡略地說明了幾個數系間的包含關係 即 $N \subseteq Z \subseteq Q$ (自然數集合)(整數集合)(有理數集合) $\subseteq R$ (實數集合) 而且,我們以自然數系的基本性質爲出發點,逐步地討論了整數系和有理數系的基本性質。 ㈡決定目的 在第一章,我們將從有理數系開始,利用極限的概念以及有理數系與實數系的包含關係,去了解實數的性質。	2分	能說出自然數集合包含於整數集合,整數集合包含於有理數集合,有理數集合包含於實數集合。

<table>
<tr><th>教學目標</th><th>教　　學　　活　　動</th><th>時間</th><th>成果評量</th></tr>
<tr><td></td><td>(三)提示教材
首先，我們復習一下，什麼叫作有理數？
凡是可以寫成 $\frac{q}{p}$ ，p ，$q \in Z$ ，$p \neq 0$ 的數都是有理數。</td><td>18 分</td><td>能說出有理數的意義</td></tr>
<tr><td>達成　1-1-1</td><td>下面，我們用直線坐標系，來圖解說明有理數系。
假設 p ，$q \in N$ ，則我們可以在數線上找到一點 A ，使其坐標爲 $\frac{q}{p}$ 。
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>達成　2-1-2</td><td>只要具有相似形的概念，如上作圖，
我們知道　$\frac{OQ}{OP} = \frac{OA}{OT}$
當 $OQ = q$ ，$OP = P$, $OT = 1$ 時
得 $OA = \frac{q}{p}$ ，　也就是說</td><td></td><td>能圖示有理數
($\frac{Q}{P}$)</td></tr>
<tr><td>達成　1-1-2</td><td>所有的有理數，在數線上都可找到適當的點與之對應。</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>達成　2-1-1</td><td>這種坐標是有理數的點，我們稱爲有理點
$\cdots -\frac{9}{2}\ -\frac{7}{2}\ -\frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{7}{2}\ \frac{9}{2}\ \frac{11}{2} \cdots$
</td><td></td><td></td></tr>
</table>

教學目標	教學活動	時間	成果評量
	觀察數線上的有理點，我們得知 所有以整數爲坐標的點，在直線上形成一個均勻分佈的點集合，其相鄰兩點間的距離都是1單位長 所有坐標是$\frac{N}{2}$（$N\in Z$）的點，在直線上形成一個均勻分佈的點集合，其相鄰兩點間的距離都是½單位長，以此類推設k爲一指定自然數，則所有坐標是$\frac{N}{k}$（$N\in Z$）的點在直線上形成一均勻分佈的點集合，其相鄰兩點間的距離爲$\frac{1}{k}$單位長，所以當k逐漸增大時，上述點集合就愈來愈緊密。 所以直線上任何一段都包含有$\frac{N}{k}$（$N\in Z$）這樣的點，亦即直線上任一很小的線段裡都有有理點存在。		能推出一般情形（k）的點，形成的均勻分佈的點集，且其相鄰兩點間的距離爲$\frac{1}{k}$單位長
達成 1-2-2	假設在直線上有兩有理點A，B，對應的有理數分別爲a，b，且$a<b$。 由上一章不得式我們得知 $a<\frac{a+b}{2}<b$ 然而，$\frac{a+b}{2}$也是有理數，可見我們可以找到一點C，使其坐標恰是$\frac{a+b}{2}$，那麼C點恰在A與B的中間，同樣的，在C和A之間，C和B之間我們又可找到其他的有理點，如此反覆地做下去，我們發現任給兩個有理點，則在它們之間是可以找到無數多個有理點的。		能說出在兩有理數點間存在有無數多個有理點

教學目標	教　　學　　活　　動	時間	成果評量
達成　1-2-1	亦即在直線上有理點的存在是密密麻麻的，這就是有理數點集的〝稠密性〞，換句話說，有理數點是在直線上到處稠密的。		
	但是，直線上除了有理點之外，是否還有其他的點存在？	25 分	能說出答案是否定的。
達成　1-3-1	我們說還有其他的點存在。		
達成　2-1-3 達成　3-2-1	由畢氏定理，我們知道下面直角三角形的斜邊分別是 $\sqrt{2}$ 單位長，$\sqrt{3}$ 單位長 		能說出 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ 的作圖方法。
達成　1-3-1 達成　3-1-2	在原點的右邊 $\sqrt{2}$ 單位處，我們可以找到一點 X_1，使得 $OX_1=\sqrt{2}$，也可以找到一點 X_2，使得 $OX_2=\sqrt{3}$，我們說 X_1，X_2 都不是有理點，因爲它們所相應的數 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ 都不是有理數，爲什麼呢？		
	假設 $\sqrt{2}$ 是有理數		
	$\exists\, P,Q\in Z,\ (P,Q)=1 \ni \dfrac{Q}{P}=\sqrt{2}$ $\Rightarrow \dfrac{Q^2}{P^2}=2$ $\Rightarrow Q^2=2P^2$ $\Rightarrow$ Q 是偶數　i.e. $Q=2k$，其中 $k\in Z$ $\Rightarrow (2k)^2=2P^2 \quad 4k^2=2P^2$ $\Rightarrow 2k^2=P^2$ $\Rightarrow$ P 是偶數 $\Rightarrow (P,Q)\neq 1$		能說出過程所根據的意義

教學目標	教　學　活　動	時間	成果評量
達成　1-3-2	$\Rightarrow$ $\sqrt{2}$不是有理數		能說出無理數是存在的
達成　1-2-1	同樣的方法，我們可以證得$\sqrt{3}$也不是有點數，這種數我們稱爲無理數，它在數線上所相應的點稱爲無理數點。是否無理數，就只有上面兩個？這是不對的，無理數也是無數多個，只要用直尺和圓規，我們就可以作出許多長度是無理數的線段來。例如：$\sqrt[4]{2}$，$\sqrt[4]{3}$		能圖示$\sqrt[4]{2}$，$\sqrt[4]{3}$
達成　1-3-1 達成　2-2-2 達成　2-2-4	 		
達成　3-2-1	同樣的方法，在上圖作圖中，如果把$\sqrt{2}$改取$2+\sqrt{2}$		能證明$\sqrt{2+\sqrt{2}}$是無理數。
達成　1-3-2 達成　2-2-3	我們得到$\sqrt{2+\sqrt{2}}$也是無理數 假設$\sqrt{2+\sqrt{2}}$是有理數 $\exists\ P,Q\in Z\ \ P\neq 0\ \ (P,Q)=1 \ni \frac{Q}{P}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$ $\Rightarrow\ \frac{Q^2}{P^2}=2+\sqrt{2}$ $\Rightarrow\ \frac{Q^2}{P^2}-2=\sqrt{2}$		能圖示$\sqrt{2+\sqrt{2}}$
達成　3-3-1	繼續做下去還可以找到其他的無理數，除了從作圖我們可以找到無理數外，無理數的產生，也可以像整數和分數的產生，是爲了方程式解的需要。 即$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{2+\sqrt{3}}$，$\sqrt[3]{2}$…不是有理數，是爲了滿足 $X^2-2=0$，$X^2-3=0$， $X^4-4X^2+1=0$，　$X^3-2=0$，… 方程式的解而加入的。		能從不同的觀點，推求數系的擴展

教學目標	教學活動	時間	成果評量
達成 2-2-5	〔利用第一冊第七章高斯引理的推論，我們得知以上的幾個方程式都沒有有理根。〕		
	在上一章最後一節我們說明了無限小數的意義就是有理數列的極限，也說明了分數和循環小數間的關係。在這裏我們找到了無理數，很顯然，無理數一定是不循環的無限小數，所以對		能說出逼近的意義
達成 1-4-1 達成 3-3-1	於一個給定的無理數我們是可以找到某一個適當的有理數列去逼近它的。		
	三、綜合活動 綜合今天我們所討論的，我們把它歸納如下：		
達成 1-2-1 達成 3-1-1	(1)有理數系是實數系中，一個到處稠密的子集合。		
達成 1-3-1 達成 3-1-1	(2)實數系中，除有理數之外，還有無理數存在。		
達成 1-4-1 達成 3-1-1	(3)任何一個給定的實數，必是某一適當有理數列的極限。		
	關於最後一點，我們將在下一節中，用實例詳加解釋。 看看還有那些地方不夠清楚，請提出問題		
達成 3-2-1	，要是沒有，明天請將習題 3 - 1 交給我。		

SOME REMARKS ON DEVELOPING AN INTERDISCIPLINARY COURSE IN MATHEMTICAL PROGRAMMING AT GRADUATE LEVEL OF INSTRUCTION

郭王月娥

Mathematical programming, as a subject of operations research, has wide application in industry and government [3]. This note is written here, according to the writer's teaching experience on mathematical programming, to construct an interdisciplinary course for graduate students from different departments to get maximum benefits.

A class of a graduate course of mathematical programming was composed of the mathematics major, the computer science major, and the industrial engineering major. After the teacher finished pertinent part of the course, she let the students give lectures on the topics relating to their majors. The speakers did very good jobs on their lectures and the audience was quite interested in their speeches and learned much outside of their majors. Different assignment were also given to the different majors in the class. Reading of the past students' theses and some selected papers from the current journals such as the Operational Research Quarterly, INFOR, Management Science, etc., was part of the assignments to the students. Not only the up-to-date materials in the field were brought to the class, but also the students knew and got interested in some particular areas of mathematical programming. The students in the nonmathematics majors wanted to know more about the theoretical part. Since key points were given them, it was easier for them to know the theoretical part. The mathematics major wanted to know more about practical part. Since they did not know much about the practical part, the explanations on practical part in the class will motivate their interests.

Selection of the texbook is one of the important parts of the course. F. Gerber [4] furnished a comprehensive list of recent books on mathematical programming; this list is composed of about 200 titles of the books including reviewer's names and issues of the journals in which the reviews appeared. This list will supply large selections of the texbooks. Contents of the course may be selected from the topics in linear programming, parametric and integer programming, model applications to industrial and mathematical economics, convex programming, quadratic and dynamic programming, and optimization of sample problems. Adding more geometric concept to the course will give better understanding of the interaction of geometry and mathematical programming. The relationship between geometry and linear programming can be found from [5].

An one credit hour interdisciplinary course in mathematical programming also can be considered. Although there are some objections such as that the students may prefer to take a three credit hours course, or increase of one hour teaching load to the teacher, it is believed that these objections are easy to overcome because of the advantages of the one credit hour course. The one credit hour course will give students general idea about mathematical programming, it will motivate students' interest without spending much time on it.

In the writer's opinion from the teaching experience, developing an interdisciplinary course in mathematical programming for graduate students can have better result than opening the course in each departments of the related fields, because the students from the different departments can motivate each other.

REFERENCES

1. R. Billstein, A College Teaching Course for Future Ph. D.'s in Mathematics, The American Mathematical Monthly, 81 (1974), 1105-1110.
2. R. E. Gaskell and M. S. Klamkin, The Industrial Mathematician

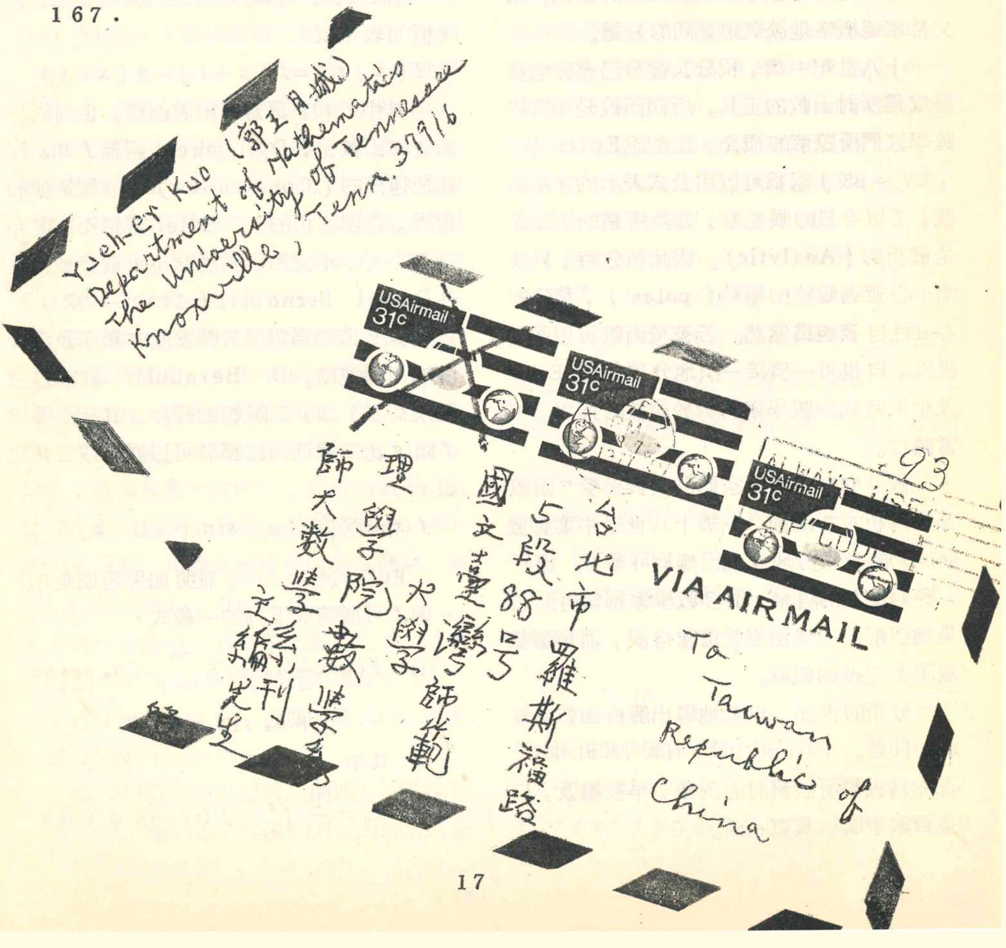
Views His Profession, The American Mathematical Monthly, 81 (1974), 699-716.

3. S.I. Gass, Linear Programming, McGraw-Hill Book Co., N.Y., 1969.

4. F. Gerber, Mathematical Programming Book Reviews: 1965-1972, Management Science, 20(1974), 875-895.

5. V. Klee, Convex Polytopes and Linear Programming, Proceedings of the IBM Scientific Computing Symposium on Combinatorial Problems, IBM Data Processing Division, White Plains, N.Y., 1966, 123-158.

6. T. I. Seidman, A Proposal for a Professional Program in Mathematics, The American Mathematical Monthly, 82(1975), 162-167.



從 $\int_a^b$ 積分到 $\int_u$ 積分

林福來

從大學微積分中所介紹的積分到抽象的 Lebesgue 積分，其中的進展經過，概括地說正是十九世紀數學家們所努力的結晶。本文希望能概略地談談這期間的經過。

十八世紀中葉，積分及微分已充分地發展成為探討函數的工具。所謂函數是指當時數學家們所瞭解的概念。比如說Euler（1707～83）認為可以用公式表示的才是函數，若以今日的眼光看，當時所稱的函數都是解析的（Analytic）。因此積分時，只要能小心避過函數的極點（poles），積分的存在性自被視為當然。若被積函數可以展成級數，自也可一項接一項地分項積分。Euler 及他同時代的數學家們對於級數的運用已相當熟練。

假若向來的數學家們都樂於接受"函數都是解析的"這觀念，那十八世紀中葉前發展成功的微積分理論就已無瑕可擊了。還好，經過長期的醞釀，很多數學家都領悟到它是種誤解，因無法忍受這種自誤，而極想擴展函數定義的領域。

分析的進展，自然地導出解析函數定義域的問題。十八世紀中葉，有關非解析函數是否亦為數學所該研討的對象，早被論及，只是百家爭鳴，莫衷一是。

D'Alembert（1717－83）於1946 年〔1〕研究伸縮彈簧運動時，証明彈簧的位移──視為距某一參考點的距離及時間的函數，恒可表示成：

$$F(x,t)=f(x+t)-g(x-t)$$

其中 f 和 g 都是單變數函數。但到底是怎樣的函數呢？D'Alembert 認為 f 和 g 都該是連續的（Continuous）（連續是他的術語，意即解析的）。Euler 認為不一定非連續不可，不連續函數應該也可被接納。另外Daniel Bernoulli（1700－82）則視彈簧運動為對應於彈簧基本頻率及泛音間的單擺運動。D. Bernoulli 就他的論點求得了 f 跟 g 二函數的條件，其結果要求 f 跟 g 此二週期函數都該可以展開或三角級數：

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin(i\Pi x/L)$$

Euler於1750年証明如果週期是 2Π，則 f 可展開成下列的一般式：

$$(1)\quad f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$$

其中

$$(2)\quad a_n=\frac{1}{\Pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\Pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

Euler的証明可參考〔2〕,Pp 454－6，他是創了些新証明法，不過嚴密性倒難爲今日的數學家所滿意。Euler 保守地認爲解析函數都可展開成級數如式(1)。但當時的Bernoulli 膽大心不細，沒有小心求証就誤認爲“任意函數都可展成如式(1)的級數”。這大膽的假設，後來在同年駕崩的Euler和D'Alembert，經過長期的爭辯，才互相妥協，同意Bernoulli一定是錯誤的。

現在式(1)我們已通稱爲富氏級數 (Fourier Series)富氏級數比出生於1768的Fourier (1768 － 1830)本人早生了十八年。粗看，我們或將爲首先發明的Euler 叫不平，顯然是時代倒置，不過看多了許多數學上的新東西，都冠以有效地使用它，使它扎根的數學家的姓氏，而不冠以發明者，一再發生，自也就見怪不怪了。本文中，此種現象仍會一再地出現。

Eourier 在1822年出版了一本有關熱導體的解析理論，在書中他証明了D. Bernoulli 的大膽假設確是錯的，他的証明可謂唯天才唯能，只是並非絕對嚴密。1822年時，數學界曾大放曙光，此時的數學已較能平心靜氣地研究問題，較少像從前，相互尖刻地爭罵，可謂是數學發展的成熟期。這時期的研究重心，可概分爲二：

(a)描述什麼樣的函數，眞正能爲“分析”所容納，尤其是能像式(2)般的積分？

(b)描述什麼樣的函數，可展開成式(1)，且收斂，收斂至正確的值？

從數學研究觀點而言，問題(a)的描述是頂重要的。問題(b)，從現知式(1)的許許多多的應用及推廣，亦見其重要性。

關於問題(a)，A. Cauchy，(1789－1857早就對它下功夫了。在1821年，Cauchy 定義了“連續函數”，1823年時，對定義於有界區間的連續函數，他定義它的積分值是黎曼和 (Riemann sums)的極限值，按：此時Riemann 負3歲，(1826－1866)，Cauchy 的定義，對於封閉有界區間 (closed bounded interval) 上的函數，無瑕可擊，絕對嚴密。天才如Cauchy 的，自不能就此滿足，仍然想將他的定義推廣到其他情況的函數上。如果函數是片斷連續 (Piecewise Continuous)，而在所有不連續點上都有單邊的極限(one-side limt)存在，那麼Cauchy 原先的定義仍然適用。當函數的定義域是無界時，只要小心地推廣，通常也可求得有用的結果。如果函數 f 在 $[a, c) \cup (c, d]$ 上連續，則對任意正數 ε，下列積分恒存在：

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

同時，也可求得當 ε趨近於零時，上式的極限值，就此 Cauchy 的積分定義成功地超越連續函數的瓶頸，推廣到片斷連續函數以及定義域無界的函數。

關於問題(b)Riemann 的老師 Dirichlet (1805 － 1859)，以新觀點研究富氏級數式(1)中前面 n 項的部份和可以簡單地求得：

$$(3) \quad S_n(x) = \frac{1}{\Pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\, dt 。$$

Dirchlet 證明 $S_m(X)$ 的收斂值爲 $\frac{1}{2}\,(f(x^-) + f(x^+))$ 在他的証明中，關於 f 的正則

性（ regularity ）他給了兩條假設(i)f只許有限多的相對極大和極小值（local max. local min.）（ii）f最多只能有有限多不連續點，條件(i)在他的証明過程中是必需的。而條件（ii），今天我們知道是太強的假設，在他的討論中，（ii）根本無關緊要。Dirchlet之所以認爲必需，原來只爲了方便，能自由地引用Cauchy 的積分定義。

天才如cauchy 的，仍然被制於片斷連續函數的條件下，留給後來的數學家去更深一層的突破。Riemann 於1853年時，終將Cauchy 的積分定義推廣得淋漓盡至。對於積分上下限間的每一分割，他求得對應的上限和（upper sum）及下限和（lower sum）。當分割愈來愈精密，對應的上下界和若能收斂為同一極限值，即稱此函數爲Riemann 可積分。我們可以舉出Riemann可積分的函數，它的不連續點却是稠密的（dense）。Riemann 因此大大地推廣了可積分函數的領域，遠超過Cauchy 所引用的。Riemann 並照他的定義，做了有關的完全推廣。這或許是一點公道，說明爲什麼我們後人稱Cauchy 定義的概念——積分值，爲Riemann 和，而不是Cauchy 和。

十九世紀中葉，又有一股新的浪潮，冲激著基本分析的探討。首先，一直未被涉及的收斂，均一收斂（uniform convergence）有人提出了。數學物理學家George Stokes覺得均一收斂的連續函數數列，它的極限應該也是一連續函數。Stokes 曾試著將均一收斂局部性質（local property）化，他稱他的概念爲"非無限的緩慢收斂（noninfintely slow convergence）"不過他所得的結果並不完全清晰。均一收斂的有趣所在，乃當我們想將一函數級數一項接一項分開來積分時所產生，Cauchy當年就忽略了此一方法的應用。Weierstrass 對於引用此法的先決條件示疑，他認爲不見得所有的函數級數都能自由地一項接一項地積分，其中恐有困難。在一八五〇年代，他證明了均一收斂的函數級數可以放心地一項接一項地積分。這證明本身並不太難。它的重要性乃是Weierstrass 從此絕不將函數級數隨便地一項接一項地積分，除非他能先證明給予的函數級數爲均一收斂。由他所提出的例子中，他並且忠告數學家們重視引用此法的準確性。如果級數本身並非均一收斂，恐怕困難重重。

自 Riemann的研究成果發表後數學家們自然地又有一條路待闢，即何種函數才是Riemann可積分？

在1870年代，函數本身的劣性點集，尤其是不連續點集，被視爲是此問題的關鍵。後來証實此預測是對的，但當時的數學家似乎仍未完成正確解答的準備。不連續的點集在某種意義上對積分的存在性是可忽略的，然而是何種意義呢？有三種不同的解答相繼提出，都很好，但也都不完全令人滿意。

首先Cantor 試著以它們的極限點（limit pts）來描寫這可忽略的點集。設P是數線上的一部分集合，所有P的極限點集叫做" derived set "，以P'表之。並且連環定義$P''=(P')'$，$P^{(3)}=(P'')'$，……等等。如果$P^{(n)}$是有限集合，其中n是任一正整數，Cantor 稱P是第一類集合" first speries "。若一函數的不連續點集是第一類則此函數爲Riemann 可積分。這並不難証明。但對於一般可積分函數而言，

這條件未免失之過慎。

另一種解答是就拓樸的觀點來描述此一可忽略的集合。數線上的一子集S稱爲是無處稠密，"Nowhere dense"若對每一長度不爲零的區間I，存在有一長度不爲零的部分區間J，使得J交集S爲空集合。這一類的集合失之太廣。有些"Nowhere dense"的集合却有正測度量。

最佳的探討是從容積"Content"的概念來描述可忽略點集的定義，任一集合，若能被總長度小於任意正數的有限個區間的聯集覆蓋住，則定此集合容積爲零（zero content）依此定義，任一有限函數的不連續點集，若容積爲零則此函數是Riemann—可積分。同樣地它的逆敍述仍然不成立。

這三種概念——第一類集合，無處稠密，和零容積。被1870年代的數學家假設爲均等（eguivalent）事實上，三者之間都不相同。因此1870年代，十年中數學家們所做的研究，發生了很多錯誤的証明，往往導出一些令人疑惑的結論。

1880年代，容積的概念又有長足的進展，Cantor 定義了在n維空間中，有界集合P的容積。他令$T(p、r)$表示"Closure of p"距離小於r的所有點所成的集合，假若$T(p、r)$的容積可用重積分求得，Cantor 定義P的容積爲當r趨近於零時，$T(p、r)$的極限值以$I(P)$表示。Harnarnack給了更經濟的定義，簡明起見，且以直線爲例，他定義任一線上的子集合的容積爲所有有限覆蓋的下界（lower bound），任給一線上的子集合S，考慮以區間當S的覆蓋，所有有限覆蓋長度的下界（lower bound）即爲S的容積。今天，我們稱此定義爲外容積（outer content）。Harnack 指出每一可數集合（countable set）都可被一數列的區間所覆蓋，其中每一區間的長度可以任意小，這一觀察，反而抑制他，不敢引用可數覆蓋的觀念到他的測度論。另外他沒引用可數覆蓋的理由是，他想從拓樸的觀點，描述零容積的集合，而可數集合可以是稠密的，因此他認爲不可能是積分上可忽略的集合。

Harnack所定義的容積（外容積）是古典積分理論邁向近代測度論的一大步。當時的數學家似乎認爲此一定義跟積分根本風馬牛不相關，理由是每一有界集合，以Harnack 的觀點看，都有其容積，因此下述描述一非負函數的積分跟此函數圖形下區域的面積關係的等式：

$$(4)\ \int_b^a f(x)\,dx = area\ \{(x、y): a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

在一般情況下，不復成立了；因爲如果f是有界但並非Riemann 可積分，則式(4)左邊的積分根本不存在呢！？

1880年代的中期，積分及測度之間的裂罅，由G. Peano 添補了。peano介紹了內、外容積（interior and exterior content）的概念；對任一平面區域S而言，內、外容積也就是S的所有內接，外切多邊形面積的近似值（極值）。依此定義，積分上的Riemann 和不過是一特殊的多邊形面積而已。上下黎曼和實際上就是函數圖形下區域的外、內容積。以Ci跟Ce分別表示內、外容積，如果一集合A，使下列等式成立

$$Ci(A) = Ce(A)$$

則稱此A的容積有意義。其共同的值即爲A

的容積，以$C(A)$表示。這種定義法跟 Riemann 可積分的定義完全吻合（即當函數的上下黎曼和相等時稱函數爲 Riemann 可積分）。因此式(4)的正確性又再度被証實了。Peano 定義的此一容積，也就是今日所知的Jordan 容積（啊哈！又開起時代倒置的玩笑來了）。

Peano當時証明C具備了有限可加性（finitely additive）的集合函數（即函數C定義域中的每一元素都是集合）（set function）他同時也描述了內點（interior pt）外點及邊界點的拓樸概念。並証明了一些有趣的不等式。

Camille Jordan 推廣了 peano容積的定義再利用它來定義重積分（按：這或許是使他名字掛在容積前的理由之一吧！）Jordan所考慮的問題是當E是奇形怪狀的平行面區域時，如何定義$\int_E f(x、y)\,dE$。在 Jordan 之前，一般的方法總不外是劃些平行及垂直的直線來分割E，只有那些分割出的長方形，才能求得對應的積分，如果E形狀簡單，此路還勉强可通，然而却有集合不包含任何的距形，但可望爲積分域。Jordan考慮容積有意義的集合，然後利用有限地分割E成此種集合，來定義積分。基於有限可加性的測度論，Jordan 的路又到了盡頭。

超越有限可加性的衝力，後來起源複變數分析的一問題研究此問題的起因又可追溯到十八世紀中葉所爭論的主題“就積分而言，什麼樣的函數才貨眞價實？”。

Riemann 對今日所謂的解析函數下了定義：定義於複數平面一區域（region）上的複數值連續函數，若滿足Canchy-Riemann 等式，叫做爲解析函數。對於任一解析函數一比如說收斂的冪級數，Riemann考慮了它所有可能的解析延拓（Analytic Continuation），而補成爲完全的解析函數“Complete Analytic function”因此他自問是否每一解析的函數，像收斂的解析函數級數，都代表某一完全解析函數的一部份。Weierstrass 給了解答，答案是否定的。

Weierstrass 給的反例是下面的級數：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Z^n+Z^{-n})^{-1}$$

他証明這級數是收斂的，只要$|Z|\neq 1$。這函數在單位圓內及圓外，都是解析的，但無法解析延拓經單位圓。

下例比Weiertass 的更簡單：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+Z^n}=\begin{cases}1 & 當\ |Z|<1\\ 0 & 當\ |Z|>1\end{cases}$$

Hermite 和他的學生們深深地被 Weierstrass 的答案所吸引，進一步試著想應用它。爲方便起見，我們來看他們推論結果的一種特殊情況。

設C是一平滑封閉的凸曲線，分割平面成兩部分S和T，令$\{a_n\}$是在C上的一稠密點列，$\{A_n\}$爲常數但滿是$\sum|A_n|<\infty$則(4)$\sum\frac{A_n}{z-a_n}$在S、T內分別收斂爲解析函數f_S、f_T。然而f_S及f_T 都不可能解析延拓通過曲線C。因此從觀點而言f_S及f_T是毫不相關，但是它們的老祖宗却是同樣的式(4)。

Emile Borel(1871~1956)証明在某種情況下，f_S及f_T間的楚河漢界是可溝通的，尤其當$\sum|A_n|^{\frac{1}{2}}<\infty$時，他証明在

S及T內分別有一點P及Q，可用圓弧連接，在此一圓弧上，級數(4)是均一且絕對收斂。尤其甚者，此種圓弧之多是數不清的。

Borel的證明中，極其技巧地運用了不等式，並加上他首創頗爲奧妙的新觀念。試看Borel 的成就，他改正了Harnack的錯誤觀念，Harnack誤信一長度L的區間，可以被總長度小於L的一數列區間所覆蓋。Borel 的突破，將區間長度的概念，推廣到具有可數可加性（Countably additive）的測度論。Borel覺得他自己推廣得的測度理論應該可以自成一家地發展。他對於具有可數可加性的集合函數μ下了公理式的定義。當I是區間時，$\mu(I)$ 表示I的長度。對於可以表成可數個區間的聯集或補集的集合，他證明它們都屬於μ的定義域。所有μ定義域內的集合就稱爲Borel 集合。而集合函數μ，目前我們稱它爲Lebesgue 測度。Borel 自己並不完全滿意他的成果，他想他的測度理論可能還不如 Jordan 的容積論，因爲存在有Jordan 容積爲零的集合，却不是Borel 集合。這一點，大概是我們沒稱μ爲Borel 測度的理由之一。另一可瞭解的理由是Borel 雖然發明了μ，但他並沒引用它來導出積分理論。

Lebesgue（1875~1941）在他發表於1902年的博士論文中，對上述Borel的兩處遺漏都補救過來了，他對集合的測度下定義的靈感，源自Borel的u及Peano的Ce和Ci。爲了解釋Lebesgue 的定義過程，我們考慮單位區間I（unit interval）的所有部份集合。

設E爲I的一子集，其外測度（outer measure）$m_e(E)$，定義爲$\sum L(I_n)$的最大下限（greatest lower bound）其中$L(I_n)$指區間I_n的長度，並且$E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$。

類似於內容積的內測度却出了一點麻煩。所以Lebesgue 繞了個小彎，他定義內測度，$m_i(E) = 1 - m_e([0,1] - E)$，由內、外測度的定義，不難証出$m_i(E) \leqslant m_e(E)$；當$m_i(E) = m_e(E)$ 時，則稱E爲可測度，其值爲E的測度。

Lebesgue 更進一步地証明了m最重要的一些性質，第一，m具備可數可加性（countably additive），同時推廣了Borel 的測度及 Jordan 的容積。不過話說回來，實際上m跟μ是非常接近的。

若集合E可測度，則存在有Borel集合E_1及E_2，使得$E_1 \subset E \subset E_2$，$\mu(E_1) = m(E) = \mu(E_2)$。

Lebsgue的測度自然地導出了在單位區間I內，定義於有界可測度集合的函數的積分。跟任何人一樣，Lebesgue也將積分的領域分割，割成可測度的集合，對每一分割定出上限和、下限和（upper sum，lower sum）最後証明它們趨近到唯一的極限值。雖然Lebesgue 同樣是分割積分的領域，但同中有異。他的分割只跟被積分函數的結構有關，所以每一集合都是某一小區的逆值域（inverse image）。因此上限和、下限和也就不得不趨近同一值。

Lebesgue 由他的積分導出許多應用，在此只提一下其中之一，即本文開始提及的在什麼條件下，函數級數可以一項接一項的積分。在Weierstrass之後，雖然分析學家非常渴望能引用此法，但是除非已知級數是

均一收斂，否則總是存疑，不敢越雷池半步。然而均一收斂的條件限制，實在太痛苦了，造成想引用此法，一點自由也沒有，況且許多不同的情況，經由個別的特殊的方法証明，到了1885年，Arzela 發表了兩篇論文其中發現級數不必好到均一收斂，照樣可以項項積分，他証明了一個很有用的定理，不過顯然地，Arzela 的定理並沒被注意及，後來還有人繼續証一些 Arzela 定理的特例。Arzela 証明：若 f_n 是一定義在〔a、b〕上，Riemann 可積分的數列，且 $f_n(x) \to f(x)$，其中 f 也是 Riemann 可積分，同時對所有的 n 和 x，$|f_n(x)| \leq M$ 恒成立，則 $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$。

Arzela 的証明中包括一有關點集數列的引理，他花了很多篇幅去証明它，後來 Lebesgue 不多不少，一行就証明了。Arzela 的論文發表後十二年，Osgood 獨立地証了一特例：他假設 f_n 和 f 都是連續的。Osgood 的這篇論文也花了 35 頁才証完。甚至在 Hawkin 的書摘中，看起來都夠嚇人的。Osgood 放鬆均一收斂的限制，很詳細但難以被瞭解地研究了 $\int f_n$ 的收斂過程。

Lebesque 証明“Lebesgue Dominated convergence Thm”定理實至名歸。他的証明又短又巧，玲瓏可愛，跟 Arzela 及 Osgood 的証明比較，Lebesgue 實在短得有點罪過，非天才和 Lebesgue，加上証明技巧的一再改進，實在無以爲功。

〔註〕作者謝謝李正琦、吳淑蓉及潘美禃三位同學帮忙謄稿。

參考資料

(1) Hawkins T.: Lebesgue's theory of integration. Its origins and Development. Univ of Wisconsin press 1970.

(2) Kline.M.: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford Univ press 1972.

等待行列問題的探討

邱溫玲

一、前　　言

吾人於日常生活中，經常都參與了等待行列（Waiting line），諸如排隊購票，或到醫院掛號診病，或上理髮廳理髮等等，此等現象通常皆以先到先服務（或稱應對）為原則以進行之，然而顧客之到達常為隨機性的，或多或少無法加以控制，但服務站（或稱窗口）之數目則有一定，當顧客到達的人數太多以致於超過窗口數時，則形成等待行列，同時由於服務站之服務速度常有一定，因之等待行列中之顧客須浪費時間等待，間或有些因缺乏等待耐性而中途他去，或根本不參加等待行列，使得服務組織在業務上蒙受損失。

反之，如欲增加服務之窗口數以減少等待行列之長度，使顧客等待之時間減少，甚至等待行列不再發生，則勢必要超額大量之窗口數，否則難以達成。窗口數之大量增加雖為顧客所歡迎，但為服務組織所不取，因窗口數大量增加，服務人員增加，費用支出大增以致收益減少，同時由於服務人員之大增，反致服務人員之空閒時間增加。

因此，在服務組織方面，一方面希望使顧客沒有久候之現象，均能以迅速接受服務為原則，一方面服務站也不致空閒太多，浪費太多，所以發生了應設置多少個服務站、或應增加若干服務速度的問題。

等待行列理論（Waiting line theory 或 Queuing theory）即在此等情況下應運而生，並進而尋找出解決之法。

二、等待行列上應用之機率分配

在等待行列問題上，於某時間間隔內顧客到達（或接受服務終了而離去）的人數是隨機性的，但為了討論方便起見，顧客之到達（或接受服務終了而離去）之情形限制於滿足下列三項性質：

(a)定常性：任意K人在時間間隔（a，$a+t$）內到達（或接受服務終了而離去）之機率相等，即與時刻a無關，亦與a時之人數無關。

(b)獨立性：顧客間之到達（或接受服務終了而離去）的事象互相獨立。

(c)稀少性：沒有二人或二人以上之顧客同時加入（或接受服務終了而離開）等待行列。

由上述三條件吾人可得下列定理：

定理一：在顧客之母體爲無限大時，設 $X_1(t)$ 爲時間間隔 t 內顧客到達的人數，則必存在一正數 λ，且 $X(t)$ 係服從母數（Parameter）爲 λt 之 Poisson 分配，亦即

$$P_k(t)=P\{X_1(t)=K\}=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{K!} \qquad \forall K=0, 1, 2, \cdots$$

吾人稱此種到達是以 λ 爲其平均到達率的 Poisson 到達。

証明；設 t_1 與 t_2 爲任意二非負實數，則由(a)與(b)得

$$P_k\{X_1(t_1+t_2)=0\}=P\{X_1(t_1)=0 \text{ 且 } X_1(t_2)=0\}$$
$$=P\{X_1(t_1)=0\}\,P\{X_1(t_2)=0\}$$

故

$$P_o(t_1+t_2)=P_o(t_1)P_o(t_2), \quad \forall t_1 \geq 0, t_2 \geq 0,$$

由數學分析知

$$P_o(t)=e^{ct}, \quad t \geq 0, \quad c \in R$$

或

$$P_o(t) \equiv 0, \quad t \geq 0$$

但 $P_o(t) \equiv 0$，$t \geq 0$，表示在任何時間間隔 t 內顧客不到達的機率爲零，不合理（此乃因 $P_o(0)=1$ 之故）故

$$P_o(t) \not\equiv 0, \quad t \geq 0,$$

因之

$$P_o(t)=e^{ct}, \quad t \geq 0, c \in R$$

但因

$$0 \leqslant P_o(t) \leqslant 1$$

故 $c<0$，取 $c=-\lambda$，$\lambda>0$ 得

$$P_o(t)=e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, C>0 \quad \cdots\cdots(1)$$

次求 $P_k(t)$，$t \geq 0$，$K \in N$

將時間間隔 $(0, t)$ 等分成 n 個微小之等間隔，（n 足夠大）每一時間間隔 $\delta=\dfrac{t}{n}$，在時間間隔 t 內顧客到達 K 人之事象可分成下列二互斥事象 H_1 與 H_2 之和；

(1) H_1：在此等 n 個微小區間內，恰有 K 個小區間顧客各到一人，而其他 $(n-K)$ 個區間內顧客均不到達之事象。

(2) H_2：在此等 n 個微小區間內，至少有一區間內顧客到達之人數多於一人之事象。

因 $H_1 \cap H_2=\phi$，故

$$P_k(t)=P\{X_1(t)=K\}=P(H_1)+P(H_2)$$

但 $$P(H_1)=\binom{n}{k}\left[P_1(\delta)\right]^k\left[P_o(\delta)\right]^{n-k}$$

$$=\binom{n}{k}\left[1-P_o(\delta)-o(\delta)\right]^k\left[P_o(\delta)\right]^{n-k}$$

$$=\binom{n}{k}\left[1-e^{-\lambda\delta}-o(\delta)\right]^k\left(e^{-\lambda\delta}\right)^{n-k}$$

$$=\binom{n}{k}\left[1-e^{-\frac{\lambda t}{n}}-o(\delta)\right]^k e^{-\lambda\frac{(n-k)t}{n}}$$

$$\to\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{K!},\quad 當\quad n\to\infty$$

此處

$$o(\delta)=\sum_{j=2}^{\infty}P_j(\delta),\ 由\ (c)知\ \lim_{\delta\to 0}\frac{o(\delta)}{\delta}=0,$$

又利用 $P(A\cap B)\le P(A)\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$ 得

$$0\leqslant P(H_2)\leqslant n\left[\sum_{j=2}^{\infty}P_j(\delta)\right]=n\left[o(\delta)\right]=\frac{o(\delta)}{\delta}t\to 0$$

當 $\delta\to 0$，即 $n\to\infty$

因之，當 $n\to\infty$，$\delta\to 0$，

$$P_k(t)=P\{X_1(t)=K\}=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{K!},\quad K=1,2,3\cdots\cdots(2)$$

由(1)及(2)，吾人得

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{K!},\quad K=0,1,2,\cdots$$

此機率與時刻 a 無關，同時與時刻 a 時的顧客人數也無關。

定理二：設隨機變數 T 表示前後二顧客到達之時間間隔，則 T 服從以 λ 爲其母數之指數分配。

証明：由定理一知，在時間間隔 t 內顧客無一人到達之機率爲

$$P_o(t)=e^{-\lambda t},$$

亦即事象 $\{T>t\}$ 發生之機率，即

$$P\{T>t\}=e^{-\lambda t},\quad t\geq 0$$

故

$$P\{T\leq t\}=1-P\{T>t\}=1-e^{-\lambda t}\quad,\quad t\geq 0$$

成爲以 λ 爲母數之指數分配，其期望值

$$ET=\frac{1}{\lambda}$$

表示平均到達時間，λ 爲平均到達率。

仿照定理一及定理二吾人可得

定理三：在時間間隔 t 內，顧客接受服務終了而離去之人數 $X_2(t)$ 係服從以 μ 爲其平均比率的 Poisson 分配，亦即

$$P\{X_2(t)=K\}=\frac{(\mu t)^K e^{-\mu t}}{K!}\quad,\quad K=0,1,2,\cdots,t\geq 0$$

此機率亦與時刻 a 無關，同時與時刻 a 時的顧客數亦無關。

定理四：顧客接受服務之服務時間 T_s 係服從 μ 爲其母數之指數分配，亦即

$$P\{T_s\leq t\}=1-e^{-\mu t}\ ,\ t\geq 0$$

在此種情形下，吾人稱顧客接受服務時間（或稱應對時間）係以 μ 爲其平均應對率之指數應對。而期望值

$$ET_s=\frac{1}{\mu}$$

爲其平均應對時間。而 $r=\dfrac{\lambda}{\mu}$ 則稱爲利用率（traffic）並爲紀念 A.K.Erlang 特稱 $r=\dfrac{\lambda}{\mu}$ 爲 Erlang。

定理五：設顧客之到達爲 Poisson 到達，服務時間爲指數分配所作成之等待行列問題，實爲時刻 t 時之等待行列全體系之顧客數（即在等待中的顧客數與正在接受服務之顧客數之和）$X(t)$ 的集合 $\{X(t);t\geq 0\}$ 成爲一出死滅過程（Brith - death process）。

証明：在微小時間間隔 $(t, t+h)$ 內有一人到達之機率依定理一知爲

$$P_1(h)=P\{X(t+h)-X(t)=1\}=\lambda he^{-\lambda h}=\lambda h[1+o(h)]=\lambda h+o(h)\ \cdots\cdots(3)$$

又在微小時間間隔 $(t, t+h)$ 內有二人或二人以上到達之機率依定理一知爲

$$P\{X(t+h)-X(t)\geq 2\}=\sum_{k=2}^{\infty}P_k(h)=1-P_0(h)-P_1(h)$$
$$=1-e^{-\lambda h}-\lambda he^{-\lambda h}=o(h)\ \cdots\cdots(4)$$

同理，依定理三知在微小時間間隔 $(t, t+h)$ 內有一人接受服務終了而離去之機率爲

$$P\{X(t+h)-X(t)=-1\}=\mu h+o(h)\ \cdots\cdots(5)$$

又在該時間間隔內有二人或二人以上接受服務終了而離去之機率爲

$$P\{X(t+h)-X(t)\leq -2\}=o(h)\ \cdots\cdots(6)$$

由式(3)，(4)，(5)與(6)吾人知 $\{X(t);t\geq o\}$ 滿足下述之出生死滅過程之定義，故 $\{X(t);t\geq 0\}$ 爲一出生死滅過程。

三、出生死滅過程及其與等待行列之關係：

定義；設對每一非負實數 t，$X(t)$ 爲一非負整數值之隨機變數，若對於任意（$n+1$）個 t 值

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$$

吾人得

$$P\{X(t) \leq x \mid X(t_j) = x_j,\ j=1,2,\cdots,n\} = P\{X(t) \leq x \mid X(t_n) = x_n\}$$

時，稱 $\{X(t);\ t \geq 0\}$ 爲一離散狀態之馬可夫（Markov）過程。

定義：一離散狀態之馬可夫過程 $\{X(t);\ t \geq 0\}$，若 $X(0)=i$，且

(i) $P\{X(t+h)-X(t)=1 \mid X(t)=n\} = \lambda_n h + o(h)$，$\lambda_n \geq 0$，$h>0$

(ii) $P\{X(t+h)-X(t)=-1 \mid X(t)=n\} = \mu_n h + o(h)$，$\mu_n \geq 0$，$h>0$

(iii) $P\{|X(t+h)-X(t)| \geq 2 \mid X(t)=n\} = o(h)$

三條件滿足時，稱此過程爲出生死滅過程。

上述定理五中之式(3)，(4)，(5)，(6)恰爲此定義之特例，即在 $\lambda_n=\lambda$，$\mu_n=\mu$ 時之情形也。

由出生死滅過程之定義令 $P_n(t) = P\{X(t)=n\}$，吾人易得

$$P'_n(t) = -(\lambda_n+\mu_n)P_n(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t),\ n \geq 1 \quad \cdots\cdots (7)$$

與

$$P'_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) \quad \cdots\cdots\cdots (8)$$

其初期條件爲

$$X(0)=i,\quad P_n(0) = \begin{cases} 1 & n=i \\ 0 & n \neq i \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

式(7)，(8)合稱爲出生死滅過程之微差方程式，惟其解法無一般方法可循，僅能依特例而解之。

於出生死滅過程中，取 $\lambda_n=\lambda$，$\mu_n=0$ 時即成爲Poisson過程，此恰爲顧客到達之情形。

而於出生死滅過程中取 $\lambda_n=0$，$\mu_n=\mu$ 時，則成爲死滅過程，此即顧客服務終了而離去之情形。

設等待行列全體系之顧客數在時刻 $t=0$ 時爲 $X(0)=i$ 人，而在任意時刻 t 時爲 $X(t)$ 人，依前述定理五知可將 $X(t)$ 的集合 $\{X(t),\ t \geq 0\}$ 作成一隨機過程，玆令在時刻 t 時顧客人數爲 n 人之條件機率定爲 $P_{in}(t)$，即

$P_{in}(t) = P\{X(t)=n \mid X(0)=i\}$，則 $P_{in}(t)$ 亦滿足上述之微差方程式，若對於任意之 i 與 n 使 $P_{in}(t) > 0$ 之 t 存在時稱此馬可夫過程爲推移的，依馬可夫過程的有關定理，吾人知道對於任意之推移的馬可夫過程 $\{X(t);\ t \geq 0\}$

$$\lim_{t \to \infty} P_{in}(t) = \lim_{t \to \infty} P\{X(t) = n \mid X(o) = i\} = P_n$$

且此P_n爲與 i 無關之有限定值，同理

$$\lim_{t \to \infty} P_n(t) = \lim_{t \to \infty} P\{X(t) = n\} = P_n$$

故P_n爲有限定值時，吾人知加入行列之顧客數之機率可與現象發生之初期狀態i 無關，同時吾人將以P_n來代替$P_n(t)$ ，亦即現象發生之機率與 t 無關，故$P_n'(t) \equiv o$ ，此種過程特稱爲定常過程。

在定常過程之條件下，前述之出生死滅過程之微差方程式即變形爲下列之差分方程式

$$\left.\begin{aligned} &-(\lambda_n + \mu_n)P_n + \lambda_{n-1}P_{n-1} + \mu_{n+1}P_{n+1} = o \text{ , } n \geq 1 \\ &-\lambda_o P_o + \mu_1 P_1 = o \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(10)$$

此差分方程式特稱爲均衡方程式（balance equations）

四 在定常狀態下等待行列問題的解法；

因定常隨機過程之$P_n(t)$與 t 無關，故一般使用Laplace fransform 之方法以解前述之微差方程組，求出$P_n(t)$之後，再令

$$P_n = \lim_{t \to \infty} P_n(t)$$

但此法較繁，且不易求得，故均取$P_n'(t) = o$ ，解之，亦即解差分方程組（即均衡方程式）

$$\left.\begin{aligned} &-(\lambda_n + \mu_n)P_n + \lambda_{n-1}P_{n-1} + \mu_{n+1}P_{n+1} = o \text{ , } n \geq 1 \\ &-\lambda_o P_o + \mu_1 P_1 = o \end{aligned}\right\}$$

至於求解該均衡方程組之初期條件，則因等待行列模型之不同而有所不同，同時μ_n 與 λ_n之值亦因模型之不同而有所差異。

等待行列模型就一般而言，至少有下列八種：

1. 顧客來源母體無限，窗口數一個，等待行列之長度有限之模型；
2. 顧客來源母體無限，窗口數一個，等待行列之長度沒有限制之模型；
3. 顧客來源母體無限，窗口數$S > 1$，等待行列之長度有限制之模型；
4. 顧客來源母體無限，窗口數$S > 1$，等待行列之長度沒有限制之模型；
5. 單一服務站而顧客來源母體有限之模型；
6. 多個服務站，顧客來源母體有限之模型；
7. 單一服務站，但有優先權之模型；
8. 多個服務站，但有優先權之模型；

上述之第七與第八種模型之解法較繁，故從略，而前六種模型之解法如下；

在定常隨機過程條件下，若等待行列全體系之長度無限（當然顧客來源之母體亦爲無限）時

(a) 當窗口數 $S=1$ 時，令

$$\mu_n = \mu \ , \quad n=1,2,3,\cdots$$

$$\lambda_n = \lambda \ , \quad n=0,1,2,\cdots$$

(b) 當窗口數 $S\geq 2$ 時 令

$$\lambda_n = \lambda \ , \quad n=1,2,3,\cdots$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & o\leq n<s \\ s\mu, & s\leq n \end{cases}$$

在等待行列全體系之長度限定爲 N 時，且母體無限時，當窗口數 $S=1$ 時，令

(c) 當窗口數 $S=1$ 時，令

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & o\leq n<N \\ o & n\geq N \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu & n=1,2,\cdots N \\ o & n\geq N+1 \end{cases}$$

(d) 當窗口數 $S\geq 2$，且 $N\geq S$ 時，令

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & n=0,1,2,\cdots N-1, \\ o & n\geq N \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & o\leq n<S \\ s\mu & S\leq n\leq N \\ o & n\geq N+1 \end{cases}$$

在顧客來源之母體爲有限（設爲 m）時，則其等待行列全體系之長度當然有限（設爲）

(e) 當窗口數 $S=1$ 時，令

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda\ (m-n), & n=0,1,2,\cdots m-1, \\ o & n\geq m \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu & n=1,2,\cdots m \\ o & n\geq m+1 \end{cases}$$

(f) 當窗口數 $S\geq 2$ 時，令

$$\lambda_n = \begin{cases} (m-n)\lambda & n=0,1,2,\cdots m \\ o & n\geq m \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & o\leq n<S \\ s\mu & S\leq n\leq m \end{cases}$$

代入均衡方程式中，即可求所要之 P_n 。

最後，謹舉二實例作爲本文的結束。

〔例一〕某一理髮師專門替小孩子理髮，例設兒童是平均每小時 λ 人的 Poisson 到達，同時假設他理髮的平均時間是每人 $1/\mu$ 小時的指數應對，假設等待行列的長度無限制時，則依上述得取

$$\lambda_n = \lambda \ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\mu_n = \mu \ , \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

代入均衡方程式得

$$\begin{cases} o = -\lambda P_o + \mu P_1 & \cdots\cdots (11) \\ o = -(\lambda+\mu) P_n + \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} \ , \ n \geq 1 & \cdots\cdots (12) \end{cases}$$

解上列差分方程式得

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_o \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

但

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = P_o \sum_{n=o}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{P_o}{1-\frac{\lambda}{\mu}} \ , \quad \text{當} \quad o < \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

上述無窮級數收斂只有在 $o < \frac{\lambda}{\mu} < 1$ 時

故

$$P_o = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - r \ , \quad \left(r = \frac{\lambda}{\mu} \right)$$

爲兒童到達該理髮廳，可立即接受理髮之機率，而 $1 - P_o = r = \frac{\lambda}{\mu}$ 爲必須等待之機率。

因之 $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = r^n (1-r) \ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$

即到達 n 人之機率，亦即等待行列全體系共有 n 人之機率，故其等待行列全體系之平均長度（人數）

$$L = \sum_{n=o}^{\infty} n P_n = \sum_{n=o}^{\infty} n r^n (1-r) = \frac{r}{1-r} \ , \quad 0 < r < 1$$

而等待行列中之平均人數（不含正在接受理髮之人）

$$L_g = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) P_n = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) r^n (1-r) = \frac{r^2}{1-r} \ , \quad o < r < 1$$

故其自進入理髮廳起直至理好離去之平均時間

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} \ \text{小時} \qquad \cdots\cdots\cdots (13)$$

而其平均等待時間爲

$$W_g = L_g / \lambda = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \text{ 小時} \quad \cdots\cdots\cdots (14)$$

(13)與(14)兩式係由 Pollaczek - Khintchine 公式而來，証明略。

〔例二〕設某一理髮廳共有理髮師 S 位（$S \geq 2$），各理髮師對每位客人的服務時間平均 $\frac{1}{\mu}$ 小時的指數分配，而顧客平均每小時 λ 人的 Poisson 到達，當等待行列全體系人數不超過 S 人時，可立即接受服務，當顧客超過 S 人時，則作成一等待行列，並依先到先服務原則等待接受服務，且若此等待行列長度無限制時，得取

$$\lambda_n = \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & 0 \leq n < S \\ S\mu & S \leq n \end{cases}$$

則其均衡方程式爲

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1 \quad \cdots\cdots (15)$$

$$0 = -(\lambda + n\mu) P_n + \lambda P_{n-1} + (n+1)\mu P_{n+1}, \quad 1 \leq n < S \quad \cdots\cdots (16)$$

$$0 = -(\lambda + S\mu) P_n + \lambda P_{n-1} + S\mu P_{n+1} \quad S \leq n \quad \cdots\cdots (17)$$

由以上三式解得

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & 1 \leq n \leq S-1 \\ \frac{1}{S!\,S^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & n \geq S \end{cases} \quad \cdots\cdots (18)$$

但

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{s-1} P_n + \sum_{n=s}^{\infty} P_n \\ &= P_0 \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{S!\,S^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right\} \\ &= P_0 \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \sum_{n=s}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{S\mu}\right)^{n-s} \right\} \\ &= P_0 \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{1-r} \right\} \end{aligned}$$

此處 $0 < r = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$，因 $\sum_{n=s}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}$ 欲收歛之故。

因之

$$P_o = \left\{ \sum_{n=o}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{S!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{1-r} \right\}^{-1} \quad \cdots\cdots (19)$$

故等待行列中的平均人數（不含正在接受理髮之人）

$$L_g = \sum_{n=s}^{\infty} (n-S) P_n = P_o \frac{1}{S!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{r}{(1-r)^2} \quad \cdots\cdots (20)$$

而等待行列全體系之平均人數

$$L = \sum_{n=o}^{\infty} n P_n = \frac{\lambda}{\mu} + L_g$$

$$= \frac{\lambda}{\mu} + P_o \frac{1}{S!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{r}{(1-r)^2} \quad \cdots\cdots (21)$$

平均等待時間 $\quad W_g = \frac{L_g}{\lambda} \quad \cdots\cdots (22)$

而其自進入該理髮廳起至理好離去之平均時間爲

$$W = \frac{L}{\lambda} \quad \cdots\cdots (23)$$

參考資料

1. E. Parzen ; Stochastic Procss.
2. N.V. Prabhu ; Queues and Inventories.
3. V.E. Benes ; General stochastic process in the theory of queues.
4. D. R. Cox and W. L. Smith ; Queues.
5. Khintchine A.; Mathematical method in the theory of queuing.

多變量常態分配積分與相關係數之關係

黃登源

多變量常態分配在統計學上之重要地位爲大家所熟悉，而處理多變量問題時其積分計算尤其重要。對於多重積分之計算通常很困難，但若兩隨機變數之相關係數具有某種特性時，則可化簡積分，在計算上有很大帮助。

令 (X_1 , X_2 , …, X_k) 爲 k 變量常態分配，X_i 之期望值爲 0，變異數爲 1，($1 \leq i \leq k$)，且令

$$\Phi_k(h_1, \dots, h_k; \{\rho_{ij}\}) = \int_{-\infty}^{h_1} \cdots \int_{-\infty}^{h_k} g(x_1, \dots, x_k; \{\rho_{ij}\})\, dx_1 \cdots dx_k,$$

此處 $\{\rho_{ij}\}$ 爲恒正 (positive definite) 相關係數矩陣 (correlation matrix)，g 爲標準常態隨機變數之機率密度函數，若 $\rho_{ij} = \alpha_i \alpha_j$ ($i \neq j$)，$-1 < \alpha_i < 1$，則這些 X_i 可由 $k+1$ 獨立標準常態分配隨機變數 Z_1 , Z_2 , …, Z_k ; Y 使 $X_i = (1-\alpha_i^2)^{\frac{1}{2}} Z_i + \alpha_i Y$, $1 \leq i \leq k$，所得，即此變換不改變 X_i 之機率分配，故

$$\Phi_k(h_1, \dots, h_k; \{\rho_{ij}\}) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \Phi\left(\frac{h_i - \alpha_i y}{(1-\alpha_i^2)^{\frac{1}{2}}}\right) d\Phi(y), \quad \cdots\cdots(1)$$

此處 Φ 爲標準常態機變數之累積分配函數 (cdf)。(1)式之結果由 Dunnett and Sobel〔 1 〕獲得。

若 $\rho_{ij} = \rho$ ($0 \leq \rho < 1$)，$1 \leq i$, $j \leq k$, $i \neq j$，則爲上述之特殊情形，可取 $\alpha_i = \sqrt{\rho}$ ，且(1)可化簡爲

$$\Phi_k(h, \dots, h; \{\rho\}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^k \left[(h + \rho^{\frac{1}{2}} y) / (1-\rho)^{\frac{1}{2}} \right] d\Phi(y) \cdots\cdots(2)$$

若 h 之值已知且滿足

$\Phi_k\ (h\ ,\cdots,\ h;\ \{\rho.\}\ ) = 1-\alpha\ ,$ ·········(3)

此處 $\alpha = 0.010$, 0.025 , 0.050 , 0.100 , 0.250 ; $k = 1(1)10(2)50$ 及 $\rho = 0.100, 0.125, 0.200, \frac{1}{3}, 0.375, 0.400, \frac{1}{2}, 0.600, 0.625, \frac{2}{3}, 0.700, 0.750, 0.800, 0.875, 0.900$ ；滿足(3)式之 h , Gupta , Nagel, and , Panchapakesan 〔4〕已造成了很完全的表。

【注意】1.(2)式之積分為最大 k 個等相關係數標準常態分配之機率積分。

2.若矩陣 $\{\rho_{ij}\}$, $\rho_{ij} = b_i b_j\ (i \neq j)$, $-1 < b_i < 1$, $i = 1, 2, \cdots, k$ 則 $\{\rho_{ij}\}$ 為恒正矩陣，因配合之二次型式 (quadratic form) 為 $\sum_{i=1}^{k}(1-b_i)x_i^2 + (\sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i)^2 > 0$ 此處 x_i 不皆為零〔1〕。

上面這些結果由於 ρ_{ij} 有特殊之性質，多重積分可化為簡單積分，但吾人可研究多重積分與相關係數之相對關係，Gupta〔2〕討論計算 $\Phi_k\ (h_1, h_k;\ \{\rho_{ij}\}\ )$ 之演變過程，並將 Slepian 定理化為在多重積分上可利用之型式。

【定　理】(Slepian〔6〕)：令 $X_1, \cdots, X_k$ 為多變量常態分配，期望值均為 0，且互變異矩陣 (covariance matrix) $\{\rho_{ij}\}$ 為恒正，令 $y_1, \cdots, y_k$ 為多變量常態分配，期望值均為 0 且互變異矩陣 $\{K_{ij}\}$ 為恒正，令 $\rho_{ii} = K_{ii} = 1$, $i = 1, 2, \cdots, k$ ，若 $\rho_{ij} \geq K_{ij}$, $i, j = 1, 2, \cdots, k$ ，則

$$P\{X_1 > h_1, \cdots, X_k > h_k\} \geq P\{Y_1 > h_1, Y_2 > h_2, \cdots, Y_k > h_k\}$$

即

$$\Phi_k\ (h_1, \cdots, h_k;\ \{\rho_{ij}\}) \geq \Phi_k(h_1, \cdots, h_k; \{K_{ij}\}) \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

證：由於將機率密度函數 g 寫成特徵函數 (charateristic function) 之反函數，可得，

$$\frac{\partial g}{\partial \rho_{ij}} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i\ \partial x_j}\ , \quad i \neq j \qquad \cdots\cdots\cdots(5)$$

故 $$\frac{\partial \Phi_k}{\partial \rho_{12}} = \int_{h_1}^{\infty} dx_1 \int_{h_2}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{h_k}^{\infty} dx_m \frac{\partial^2 g}{\partial x_1\ \partial x_2}$$

$$= \int_{h_3}^{\infty} dx_3 \int_{h_4}^{\infty} dx_4 \cdots \int_{h_k}^{\infty} dx_k\, g(h_1, h_2, x_3, \cdots, x_k; \{\rho_{ij}\}) \geq 0$$

同理可證：

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial \rho_{ij}} \geq 0\ ,\ i \neq j$$

因 $\{\rho_{ij}\}$ 及 $\{K_{ij}\}$ 爲恒正，

$$r_{ij}=\lambda\rho_{ij}+(1-\lambda)K_{ij}\ ,\ 0<\lambda<1\ ,$$

$\{r_{ij}\}$ 亦爲恒正矩陣

因

$$\frac{d\Phi_k}{\partial\lambda}=\sum_{i<j}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r_{ij}}\right)\left(\frac{dr_{ij}}{d\lambda}\right)=\sum_{i<j}\left(\frac{\partial\Phi_k}{\partial r_{ij}}\right)(\rho_{ij}-K_{ij})\ ,$$

$$\rho_{ij}\geq K_{ij}\text{ 及 }\frac{\partial\Phi_k}{\partial r_{ij}}\geq 0\quad\text{故}\quad\frac{\partial\Phi_k}{\partial\lambda}\geq 0$$

故得證

【注意】Patil and Bosewell〔5〕證明 (5) 式之一般形式如下：

$$\frac{\partial g}{\partial\rho_{ij}}=\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\,\partial x_j}\left(1-\frac{\delta_{ij}}{2}\right)\ ,\ i,j=1\ ,\ 2\ ,\ \cdots,\ k\ ,$$

此處 $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\ ,\\ 0 & i\neq j\ 。\end{cases}$

參考資料

(1) Dunnett , C. W. and Sobel, M. (1955). Approximations to the probability integral and certain percentage points of a multivariate analogue of Student's t-distribution . Biometrika 42, 258－260.

(2) Gupta , S. S. (1963), Probability integrals of multivariate normal and multivariate t. Ann. Math . Statist . 34, 792－828.

(3) Gupta, S. S. and Huang, D.Y. (1973). Subset selection procedures for the means and variances of normal populations : Unequal sample sizes case. To appear in Shankȳa.

(4) Gupta, S.S. , Nagel , K. and panchapakesan , S. (1973), On the order statistics from equally correlated normal random variables. Biometrika 60 403－413.

(5) Patil, G. P. and Bosewell , M. T. (1970). A characteristic property of the multivariate normal density function and some of its applications Ann. Math. Statistic . 41, 1970－1977.

(6) Slepican , D. (1962). The one－sided barrier problem for Gaussian noise. Bell System Tech. J. 41, 463－501 .

□□□ 應用

簡單公式

做計算 □□□

李恭晴

在代數中大家都學過數目字運算的一些性質，如結合律、交換律、分配律，以及其他一些簡單的公式等。這些性質在實際計算中，常常可以用到，特別是在計算時，用起來特別方便，若能熟練應用這些性質，將能促進計算能力並且發現很多有用的計算方法，茲舉數例以說明之。

1. 乘 5 之積：任何數乘 5 ，可先除 2 再乘 10 （或先乘 10 再除 2 ），這個方法在被乘之數的各位數字大都爲偶數時，特別有用。

例如：

$$32 \times 5 = 16 \times 10 = 160$$
$$648 \times 5 = 324 \times 10 = 3240$$
$$1604 \times 5 = 802 \times 10 = 8020$$
$$147 \times 5 = 73.5 \times 10 = 735$$

2. 乘 25 之積：此與乘 5 之積相似，任何數乘 25 ，可先除 4 再乘 100 。

例如：

$$32 \times 25 = 8 \times 100 = 800$$

3. 除 5 之商：任何數除 5 ，可乘 2 再除 10 （或除 10 再乘 2 ）。

例如：

$$32 \div 5 = 64 \div 10 = 6.4$$
$$221 \div 5 = 442 \div 10 = 44.2$$
$$308 \div 5 = 616 \div 10 = 61.6$$

4. 乘 2^n 之積：一個數 a 乘 2^n ，可將 a 每次加倍，共加 n 次。

例如：

$$34 \times 8 = 68 \times 4 = 136 \times 2 = 272$$
$$241 \times 8 = 482 \times 4 = 964 \times 2 = 1928$$
$$324 \times 16 = 648 \times 8 = 1296 \times 4 = 2592 \times 2 = 5184$$

5. 連續數個數相加（或相乘）時，可利用交換律與結合律，將所要加（乘）的數重新排定次序，再加（乘）。

例如：

$$5+6+7+4+3 = 5+(6+4)+(7+3) = 25$$
$$24 \times 7 \times 25 = 4 \times 6 \times 7 \times 25 = 42 \times 100 = 4200$$
$$4 \times 7 \times 25 \times 34 = 23800$$

又如欲求下列各數之和

$$
\begin{array}{r}
756 \\
243 \\
838 \\
314 \\
146 \\
237 \\
128 \\
864 \\
435 \\
314 \\
+\ )622 \\
\hline
\end{array}
$$

可先從個位數加起：

$6+3+8+4+6+7+8+4+5+4+2$

$=(6+4)+(3+7)+(6+4)+(8+2)+8+5+4$

$=40+17=57$

再加十位數（個位數之和進5）

$5+5+4+3+1+4+3+2+6+3+1+2$

$=(5+5)+(4+6)+(3+3+3+1)+4+2+1+2$

$=39$

最後加百位數（十位數之和進3）

$3+7+2+8+3+1+2+1+8+4+3+6$

$=(3+7)+(2+8)+(2+8)+(4+6)+3+1+1+3$

$=48$

因此得總和爲4897

6. 兩個數相乘，有時可以利用分配律以計算。

例如： $48\times 23=(50-2)\times 23=1150-46=1104$

$51\times 28=(50+1)\times 28=1400+28=1428$

$32\times 26=32\times(25+1)=32\times 25+32=832$

7. 求任意一個數的平方（特別是二位數），可利用公式：

$a^2=(a+b)(a-b)+b^2$

選取適當的b，使得$a+b$或$a-b$之個位數字爲0，且b要儘可能的小。

例如： $36^2=40\times 32+4^2=1280+16=1296$

$37^2=40\times 34+3^2=1360+9=1369$

$38^2=40\times 36+2^2=1440+4=1444$

$39^2=40\times 38+1^2=1520+1=1521$

$40^2=1600$

$41^2=40\times 42+1^2=1680+1=1681$

$42^2=40\times 44+2^2=1760+4=1764$

$43^2=40\times 46+3^2=1840+9=1849$

$44^2=40\times 48+4^2=1920+16=1936$

$45^2 = 40 \times 50 + 5^2 = 2000 + 25 = 2025$

……………………

8. 兩個二位數字相乘，若其十位數字相同，而個位數字和為10 ，則可利用公式：

$$(10a+b)(10a+(10-b)) = a(a+1)\times 100 + b(10-b)$$

即個、十兩位數字為 $b(10-b)$，而百位以上數字為 $a(a+1)$。

例如： $23 \times 27 = (2 \times 3) \times 100 + 3 \times 7 = 621$

$34 \times 36 = (3 \times 4) \times 100 + 4 \times 6 = 1224$

$71 \times 79 = (7 \times 8) \times 100 + 1 \times 9 = 5609$

9. 兩個略小於100 之數 a，b 相乘，可利用公式：

$$ab = 100 \times (a+b-100) + (100-a)(100-b)$$

例如： $85 \times 91 = 7600 + 15 \times 9 = 7600 + 135 = 7735$

$73 \times 96 = 6900 + 27 \times 4 = 6900 + 108 = 7008$

$88 \times 94 = 8200 + 12 \times 6 = 8200 + 72 = 8272$

10. 兩個略大於100 之數 a，b 相乘，可利用公式：

$$ab = 100 \times (a+b-100) + (a-100)(b-100)$$

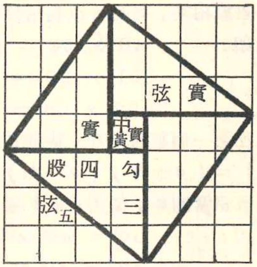
例如： $115 \times 109 = 12400 + 15 \times 9 = 12400 + 135 = 12535$

$106 \times 108 = 11400 + 6 \times 8 = 11400 + 48 = 11448$

$104 \times 107 = 11100 + 4 \times 7 = 11100 + 28 = 11128$

以上所舉祇不過是一些簡單的例子，讀者如能仔細思考，必可發現更多的計算規則，可用來簡化計算。

周公問高商



昔者周公問於商高曰：竊聞乎大夫善數也，請問古者包犧立周天歷度，夫天不可階而升，地不可得尺、寸而度，請問數安從出？

商高曰：數之法，出於圓、方；圓出於方，方出於矩，矩出於九九八十一。故折矩以為勾廣三；股修四；徑隅五。兩矩共長二十有五，是謂積矩。故禹之所以治天下者，此數之所生也。

周公曰：大哉言數。請問用矩之道？

商高曰：平矩以正繩，偃矩以望高，覆矩以測深，臥矩以知遠，環矩以為圓，合矩以為方。方屬地，圓屬天，天圓地方。方數為典，以方出圓。笠以寫天，天青黑，地黃赤。天數之為笠也，青黑為表，丹黃為裏，以象天地之位。是故知地者智，知天者聖。智出於勾，勾出於矩，夫矩之於數，其裁制萬物，惟所為耳。

周公曰：善哉。

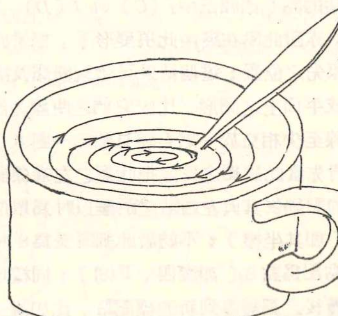
淺談
定理定點

陳昭地

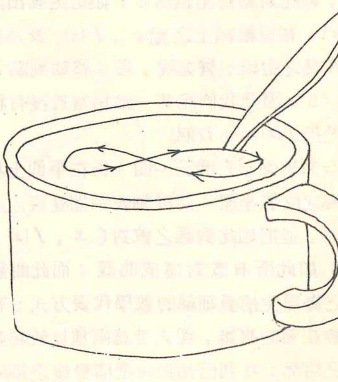
在高等微積分（或微分方程、拓樸學、實變分析、泛函分析等等）課程中，相信同學都已見過定點定理（Fixed point theorem）：縮距變換（contraction mapping）定點定理及Brouwer定點定理〔1；3〕；有關縮距變換定理証明過程之特質與應用在Bartle〔1〕及Marsden〔3〕兩書中可以找到；至於Brouwer定點定理，除特殊情況是中間值定理（Intermidate value theorm）之特例外，需藉其他工具來解決〔2〕。鑑於定點性質之重要，本文想藉Marvin Shinbrot〔4〕在1966年於美國科學雜誌（Scientific American）之部份觀點，談談定點定理之一些實際操作及日常生活或科學現象定點性質之實際應用。希望讀過這篇文章後，對於定點定理之學習有所助益。

若你在一條橡皮條上標記出一連串的點再把它拉長，你可發現這些點之次序不會改變，這仍是拓樸學上研究幾何圖形經由彎曲、伸展、扭轉或其他連續變形後能保持之直覺可接受的結論；其他的拓樸事實並不都是那麼明顯，它們之精確性似乎並不都是那麼直覺可接受的；有關定點定理這一類結果所涉及的問題仍在於曲面上的某些點，當此曲面從事「連續變形」工作後重新顯現於原位置！首先讓我們來看看下面的例子，體會Brouwer定點定理眞義！

〔例一〕若我們攪拌一杯咖啡（見圖一，二）不管時間多長或應用何種方式，只要足夠小心注意保持杯上之咖啡面不產生飄盪，則依定點性質最簡單的推論，當如此攪拌停止且等到杯內咖啡靜止後，此咖啡面至少有一點會回到它原先之位置；譬如說，按圖一以其中心分子質點之圓形旋轉之簡單攪拌方式，此中心點爲定點；通常的操作方式比較複雜（見圖二）隨時都可感覺到表面上之任何分子質點全在移動；由Brouwer定點定理僅知有定點分子存在但並沒指出何點是定點。



（圖一）



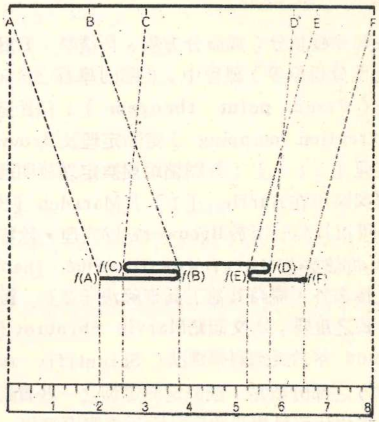
（圖二）

〔例二〕假設我們把這一頁的紙張撕下，以任何方式弄皺或摺疊，然後再放回原位置區域內，此時放回的「紙」不超出原來位置之邊緣，此被弄皺的紙，至少有一點恰好在未撕下時所佔位置之正上方；此事實對於學過定點定理的人很容易解釋，因爲此皺紙爲比攪拌咖啡更簡單的變形，紙張不會變長而咖啡面上之任意兩點距離幾乎都在隨時改變。

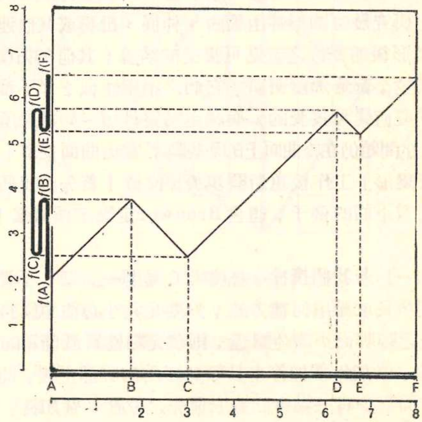
〔例三〕（Brouwer 定點定理之一簡單直覺操作方式）首先讓我們把一細繩拉直後放在桌上，其次我們將此細繩經任意次數的摺疊並移動到由此原細繩所形成之正方形區域內（如圖三），則此時可以看出此摺疊後之細繩上有一點會回到它原先沒摺疊前所佔的點（如圖三中 $f(C)$ 與 $f(D)$ 之間的某一點，亦即此點在經由此項變形下，相當於沒有改變其原先之位置；這個結果可藉原細繩及摺疊後者各表成平面上之圖形，比較它們之曲線並設法証明兩曲線至少相交於一點（詳見圖三～圖六）；爲此，我們先量此細繩之長並把此繩之左端標記成0而其他的點則依其與左端點之距離以吋爲單位對應一正數（即其坐標）；不妨設此細繩長爲8吋則最右端的點記爲點8（如圖四，F(8)）；同樣地我們可在摺疊後之細繩得到新的標記點，比如說一點原先與左端點A之距離爲4吋而移動後新點與A點距離爲3，則此新點簡記爲點3；如此定義出函數，記成 $f(x)$：在原細繩上之點 x，$f(x)$ 表示摺疊移動後與A點之距離；譬如說，點4移動到點3，所以 $f(4)=3$；因此我們說某一點相當於沒有移動的意義仍是指 $f(x)=x$ 有解。

右面兩圖形（圖三～四）仍在平面上橫軸表示原細繩之位置坐標；而縱軸表示摺疊後之細繩之位置坐標，並把如此對應之數對（x，$f(x)$）標記於圖上；如此所有數對構成曲線；而此曲線仍爲剛提過之物理性摺疊細繩的數學代表方式；有時曲線可能會相當的複雜，圖六是爲兩種比較特殊之定點定理之情況；我們已知如何把摺疊後之細繩表成曲線（如圖四）；現在依同樣技巧把原來的細繩視成經由特殊不變的變形亦表成曲線（如圖五）中之對角線，則由作圖區域之限制，很容易地看出此兩曲線必相交；而此相交點（x_0，$f(x_0)$）之 x_0 即爲 $f(x)=x$ 之一解。

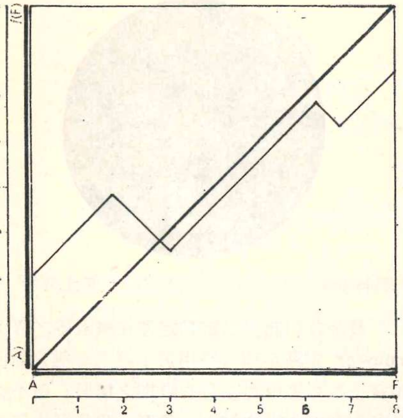
應注意的是：本例題並不一定限定於細繩，只要注意變形歷程，亦可用其他如橡皮筋等具有伸縮性的物料取代；這裏唯一的區別是橡皮筋所代表之曲線不一定是線段，可能是直正曲線的形狀！

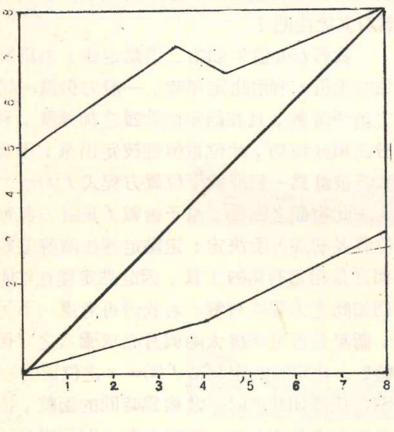


（圖三）



（圖四）





〔例四〕 **Brouwer** 定點定理對於 2 - 維情況 亦可應用；現在考慮具有無限彈性的橡皮圓盤，我們可把如此之圓盤以各種不同方式而不撕碎地加以伸展，或摺疊變形最後放回橡皮圓原先所佔之區域位置內；有關 **Brouwer** 定理在 2 維情況的解說是很值得欣賞的；首先我們考慮一圓盤，假設 **Brouwer** 定理是錯誤，即表示在此變形後沒有一點會保持固定的性質，此証明的過程（事實上如同這一頁之紙張的情況也一樣成立），依下面 6 個圖形之步驟而完成：

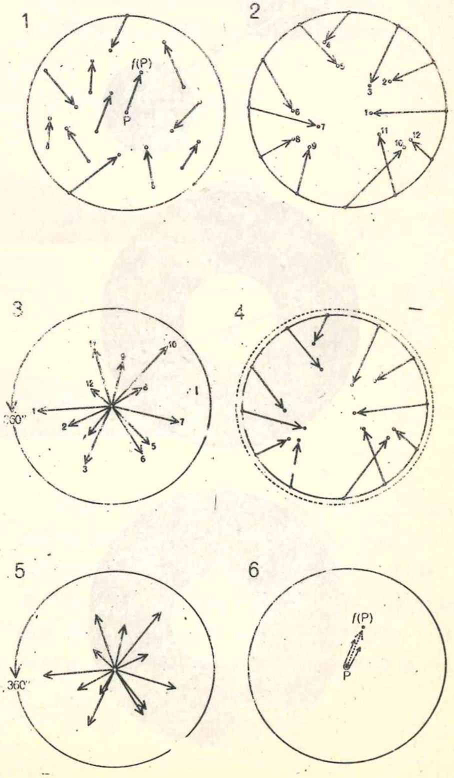
圖 1　每一點有一箭頭表示該點變形後之新位置。

圖 2　因任意點不會向外界移動，在圓盤邊界的點箭頭指向圓內。

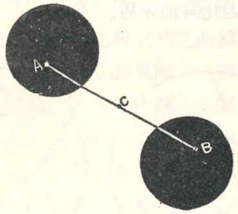
圖 3　按圖 2 之箭頭把它們視成以圓心為出發點，如此這些變換向量（箭頭）共作成了 360° 的完全旋轉。

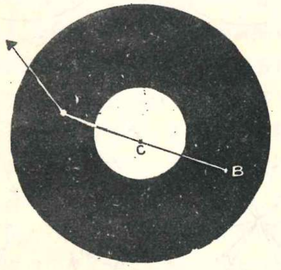
圖 4 5　再考慮原圓盤之稍微裏面之圓周之變形情況，由於是連續變形的結果，這些箭頭如前地形成一完全旋轉而這對所有之同心圓均亦成立。

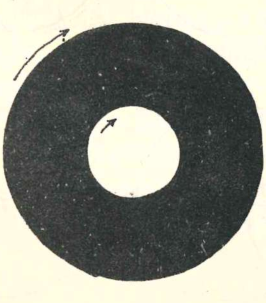
圖 6　若此時考慮“很小”的圓；其圓周指向幾乎是同一方向，因此其淨旋轉數是 0 而不是 1；因此與前矛盾。

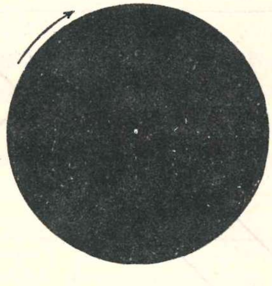


其次，讓我們指出Brouwer 定點定理之一些限制；在前面的幾個實例中，對於變形後放回的位置均有所限制；本來在Brouwer 定點定理應用到連續函數$f: B \rightarrow B$，其中$B = \{x \in R^p: |x| \leq k\}$爲$P$維空間之球，其定義域與值域範圍是應注意的；在一無限的區域上（如一條直線，整個平面）之變形操作不見得具有定點性質；想像一無限長之直綫細繩作一向右移動一吋的平移，則此細繩上之任一點均已向右移動一單位，因此沒有定點；如此我們欲知道一區域內經過任意連續變形，恒具有定點需加上有界之自然條件；其次此區域應具有凸性性質（Convexity）下面之圖七中，相離之圓，或同心圓形成非凸集；而圓環域經由旋轉變形後沒有定點；若是對於凸集之圓域依其圓心之任一旋轉，則圓心恒爲定點了！



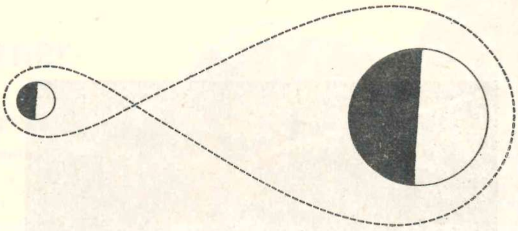




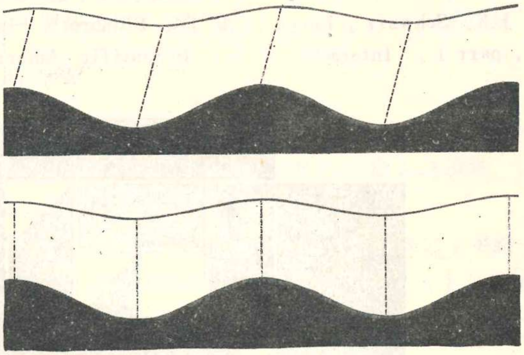


最後我們想提提定點定理在無限維之情況，Brouwer 定點定理可應用於１維或２維之曲面上；事實上亦可應用到任意有限維之情形；但不能隨意地應用到無限維空間上，然而，我們很幸運地見到有些情況下可運用於無限維空間；此地所以說「幸運」的意思是因足以讓人驚奇的最有興趣的定點性質的運用是發生於無限維空間裏；現在就讓我們來看看其緣由吧！

我們都知道牛頓第二運動定律：力爲質量與加速的乘積；利用此定律時，一般力仍爲一物體位置之給予函數，且在給定此物體之加速度，利用微積分之積分技巧，此位置恒能被定出來；因此牛頓公式能被視爲一般形式下位置方程式$f(x) = x$，其中x表此物體之位置，給予函數f是由力與質量，初位置及初速度所決定；定點定理在瞭解這類方程式而言是相當有用的工具，因定點定理往往能告訴我們如此之方程式有解；若我們再考慮一下另一問題：衞星是否可能繞太陽與月亮成圖八之“倒８”運轉？一肯定的答案相當$f(x) = x$之位置方程是否有解？任意如此之解，當然爲時間的函數，因此我們設法尋求是否存在一時間函數$x(t)$而滿足該方程式了！此函數$f(x)$可視爲時間函數之變換而形成正如攪拌咖啡時其咖啡面視爲由圓盤上之點到新的點之變換！如此$f(x)$表示之變換是否有定點，由於如此之函數依時間而改變必需看成無限維空間之“點”，因此我們需確定如此給予之包含未知函數之方程式是否有解？而我們需要在無限曲面之定點性質！

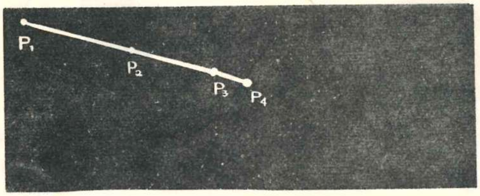


對於上面所提的軌跡問題能藉由其他科學方法來處理！事實上常藉不直接引用定點性質的其他方式來回答！然而利用無限維曲面的定點性質仍是目前我們所瞭解解決此類問題最好的工具；因此，有許多的物理問題至目前所知之解決方法唯有利用定點定理仍是不足爲奇的事！其他流體力學中之水流問題也常屬於這一類型，現在考慮一具有高低型狀如正弦弧型的河床，是否這水流所造成的河面會形成與河底完全類似週期形狀之河面（圖八）？或者每種如此之水流面一定不具週期性質？目前已可找到的答案是：該河面可具週期性質！因此更進一步地提醒我們另一問題：在逆流或順流之進況下是否河面之最高點與最低點恰好會發生於河床之最高點與最低點之正上方；或者會略有移動！這類問題在 1967 年左右仰賴於定點定理得到正式肯定的答案！至今不知有否其他不必利用定點定理爲工具之此類問題之解答方案。有關縮距變換（記成T）的定點性質，不必限制於有限維空間的情況，〔見



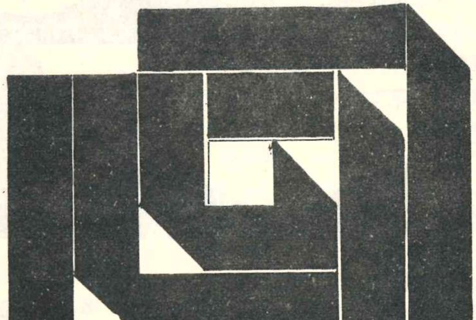
Marsden 3 . P.116 〕其証明之特性仍在於隨便選取一點P出發，由縮距性質得到一連串的點列 P_1，P_2，…；而此點列具有一極限點即爲定點（見圖十）；應注意：這時不僅知 T 具有定點且是唯一的；而這種縮距變換之定點性質，由物理科學問題轉化成 $f(x)= x$ 之縮距算子 f 之微分方程式得以得到解決，因此縮距變換定點定理具有相當應用價值！

總之，本篇主要是討論利用定點定理作爲數學特徵現象的舉例，在平面上與直線上之變換之定點概念的純幾何概念已被推廣應用到力學，流體力學甚或宿命論的哲學問題！縱然，所有存在於數學的鎖鏈很難保持，但毫無疑問的是有關幾何，代數和解析概念的相互關係是新數學能廣泛的應用於哲學應用上。



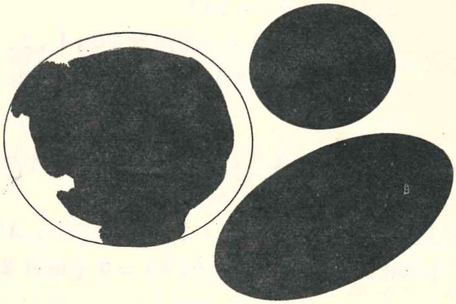
參考資料

1. R.G. Bartle, The elements of real analysis, John Wilesy & Sous. Inc., New York 1964.
2. N. Dunford and J.T. Schwarz, Linear operators, part 1, Interscience. New York, 1958.
3. J.E. Marsden, Elementary Classical Analysis, 協進圖書有限公司。
4. M. Shinbrot, Fixed-point theorems, Scientific American 1966 年 1 月.



Chales 說：純幾何常在各種問題中，用一簡單及自然的方法，去追求眞理之源，去解開鍊住問題的神秘之鎖，使得我們明晰的、個別的和完整的了解。

Sperner 補理之簡介



鄭芳枝

定點的理論始於一九一一，Brouwer 證明了任何由E^n上之單位球體B^n映至其本身之連續函數T皆有一定點，其證明需用較高深之理論，而Knaster，Kuratowski Mazurkiewick 於一九二九利用 Sperner補理給予淺顯之證明。Sperner 補理除了可以證明定點定理外，其本身在組合理論上亦爲相當有趣的問題。

以下敍述Sperner 補理之內容和證明：

《定　義》設Δ表n－單純體，$\delta=\{\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_k\}$若滿足

1. $\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i = \Delta$
2. $\Delta_i \cap \Delta_j$ 爲－k單純體，$k \leqslant n-1$，或空集　$\forall\, i \neq j$
3. 在Δ_i之頂點P_i，若$P_i \in \Delta_j$，則P_i必爲Δ_j之頂點

則稱δ爲Δ之完全細分。

今Δ之頂點分別以$(0, 1, 2, \cdots, n)$表之，定義一函數f從$\{\Delta_i : i = 1, 2, \cdots, k\}$之各頂點映至$\{0, 1, 2, \cdots, n\}$，使得若$P_i$爲$\Delta_i$之頂點，則$f(P_i) \in \{r_0, r_1, \cdots, r_m\}$，此處中$(r_0, r_1, \cdots, r_m)$表$\Delta$之最小之子單純體包含$P_i$，而這類函數將以$S(\delta)$表之。

補理（Sperner）若δ爲n單純體Δ之完全細分，則稱任何$f \in S(\delta)$，存在奇數個$\Delta_i \in \delta$使得$f(\Delta_i) = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$

$$f(\Delta_i) = \{\, f(p)\ ;\ p \text{ 爲 } \Delta_i \text{ 之頂點} \,\}$$

證明： 將用數學歸納法，對n做推論，$n=1$時爲顯然。今設$n-1$時此補理亦眞。欲證n時補理亦眞。令$\rho(\delta)=$表δ中Δ_i滿足$f(\Delta_i)=\{0, 1, 2, \cdots, n\}$之個數

$\sigma_i(\delta)=\Delta'_i$之個數，此中$\Delta'_i$爲$\Delta_i$之$n-1$子單純體，且

$$f(\Delta'_i) = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$$

$\sigma(\delta) = \sum \sigma_i(\delta)$

$\alpha(\delta)$ ＝在 Δ 之子單純體 $(0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 上之 Δ'_i 之個數，此中 Δ'_i 爲 Δ_i 之子單純體，使得

$$f(\Delta'_i) = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$$

若 $f(\Delta_i) = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ 則 $\sigma_i(\delta) = 2$

故 $\sigma(\delta) - \rho(\delta) = 0 \pmod 2$

但若 Δ'_i 不在 Δ 之 $n-1$ 子單純體上時，Δ'_i 必同時爲確實兩個 $\Delta_i \in \delta$ 之 $n-1$ 子單純體，故 $\sigma(\delta) - \alpha(\delta) = 0 \pmod 2$

$\therefore \quad \rho(\delta) = \alpha(\delta) \pmod 2$

考慮 $\delta|_{(0, 1, 2, \cdots, n-1)} = \delta'$，則 $f|_{\delta'} \in S(\delta')$ 且

$$\alpha(\delta) = \rho(\delta')$$

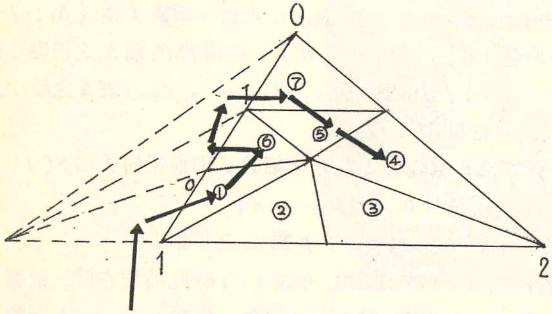
$\rho(\delta')$ 爲奇數，故 $\rho(\delta)$ 亦爲奇數。

現舉簡單的例子，以闡釋如何找出 $\Delta_i \ni$

$$f(\Delta_i) = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$$

當 $n = 2$ 時，設 Δ 爲完全細分之 2－單純體，其頂點以 0，1、2 表之

$$\Delta = \Delta_{①} \cup \Delta_{②} \cup \Delta_{③} \cup \Delta_{④} \cup \Delta_{⑤} \cup \Delta_{⑥} \cup \Delta_{⑦}$$



用箭頭表示尋找所要之 $\Delta_{ⓘ}$ 之途徑，首先由含 0，1 之邊進入某一三角形，再經由另一含 0，1 之邊進入另一三角形，如此繼續下去，直到無法用此方法進入到另一三角形，則最後箭頭所停住之三角形，即爲所求。

讀者若有興趣，可深思下列幾個問題：

1. 爲何箭頭會終止而不繼續前進？
2. 將原來之圖形重新標 0，1，2 看看能否找到所要之三角形。
3. $n \geqslant 3$ 又如何？

Ramblings in Algebraic Geometry

紀文鎮 | Rudiments of Birational Geometry

This article is concerned with a number of elementary "Birationality" concepts of algebraic geometry which are related to Topology, Modern algebra, etc. The reader is not assumed to have any prior knowledge of algebraic geometry, neither of its general theorems nor of concrete examples. The main purpose of this article is to arouse some students' interest in algebraic geometry. Since it is a rambling essay, there are only concept motivations and some properties (without proofs) in the contents.

Throughout what follows we are concerned with one and the same algebraically closed field k, which we call the ground field. We recall that an irreducible algebraic curve X defined by the equation $f(x,y)=0$ is said to be rational if there exist two rational functions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ in $k(t)$ of which at least one is not constant, such that $f(\varphi(t), \psi(t))=0$ identically on t.

Curves of order 1, that is, straight lines, are, of course, rational.

It is easy to verify irreducible curve X of order 2 is rational. For example, we can get a rational parametrization as the projection of X from a fixed point (x_0, y_0) in X onto a line that does not pass through this point. (Fig. 1)

However, there exist non-rational curves of order 3. In fact, $x^n+y^n=1$ is non-rational for $n>2$, if n is not divisible by the characteristic p of k. This example lead us to the following question. How can we recognize whether a given plane algebraic curve is rational ?

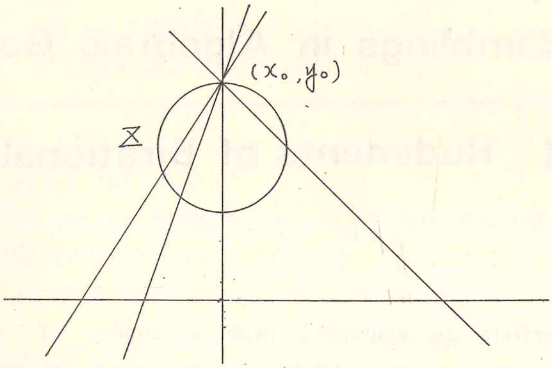


Fig. 1

For this purpose we associate with every irreducible plane algebraic curve X a certain field : Let X be given by the equation $f(x, y) = 0$, We consider rational functions $u(x, y) = p(x, y) / q(x, y)$ such that $q(x, y)$ is not divisible by $f(x, y)$. Two functions $p(x, y) / q(x, y)$ and $l(x, y) / m(x, y)$ defined on X are said to be equal on X if the polynomial $p(x, y) m(x, y) - q(x, y) l(x, y)$ is divisible by $f(x, y)$. It is easy to verify that rational functions, considered to within equality on X, form a field. This is called the field of rational functions on X and is denoted by $k(X)$.

Applying Lüroth's theorem to our question we deduce a nice conclusion : Let X be an irreducible algebraic curve, then X is rational if and only if $k(X) \cong k(t)$, where $k(t)$ is the field of rational functions over k.

There are at least two proper significations in this conclusion at our first sight :

The one in importance; let X be a rational curve, then we can obtain a parametrization has the following properties:

1) every point $(x_0, y_0) \in X$, with finitely many possible exceptions, can be represented in the form $x_0 = \varphi(t)$, $y_0 = \psi(t)$, for some t.

2) for all points, with finitely many possible exceptions, this representation is unique.

In fact, suppose that under the isomorphism $k(X)\to k(t)$ the function $\chi(x,y)$ goes over into t, then the inverse isomorphism $k(t)\to k(x)$ is given by the formula $u(t)\to u(\chi(x,y))$. Bearing in mind that the two correspondences are inverses of one another, we arrive at the relations:

$$x=\varphi(\chi(x,y)),\quad y=\psi(\chi(x,y)),\quad \text{and}\quad t=\chi(\varphi(t),\psi(t))$$

So, the parameter t can be chosen as a rational function of the coordinates x and y. From this, we get a simple application of rational curves on the integral calculus. Given a rational curve X, the rationality of this curve implies the following fact: for every rational function $g(x,y)$ defined on X, the indefinite integral $\int g(x,y)\,dx$ can be expressed in terms of elementary functions.

Another signification is the mortivation of "birational isomorphism". Let X: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ be a rational algebraic curve in (x,y)-plane, and Y be the line $s=0$ in (s,t)-plane. By above assertion, we know that there exist functions $f: X\to Y$ and $g: Y\to X$ defined by $f(x,y)=(0,\chi(x,y))$, $g(s,t)=(\varphi(t),\psi(t))$. One should notice that f and g are inverses of one another. In fact

$$g(f(x,y))=g(0,\chi(x,y))=(\varphi(\chi(x,y)),\psi(\chi(x,y)))=(x,y)$$
$$f(g(0,t))=f(\varphi(t),\psi(t))=(0,\chi(\varphi(t),\psi(t)))=(0,t)$$

It seems very possible to come across a new type of connection that such functions may exist between algebraic curves even if those are non-rational.

For this end, we define a more general concept:

Let X and Y be irreducible curves given by the equations $f(x,y)=0$ and $g(x,y)=0$, respectively. A rational mapping of X into Y is defined as a pair of rational functions $f_1(x,y)$ and $f_2(x,y)$ defined on X such that the function $g(f_1(x,y),f_2(x,y))$ vanishes on Y. It is easy to verify that for all points $(x_0,y_0)\in X$, except finitely many, the values $f_1(x_0,y_0)$ and $f_2(x_0,y_0)$ are defined and that $(f_1(x_0,y_0),f_2(x_0,y_0))\in Y$.

Two curves X and Y are called birationally isomorphic if there exist rational mappings of X into Y and of Y into X that are inverse to one another. Clearly, the notion of a rational curve is included in this more general concept.

It is obviously that "birationally isomorphic" is an equivalent relation on the set of all algebraic plane curves; and hence we have: X is rational if and only if it is birationally isomorphic to a line. Having exhibited an example of a non-rational curve we have shown incidentally that the concept of birational isomorphic is not trivial: not all curves are birationally equivalent to each other.

Here is a non-rational birational equivalent example:

char $k \neq 2,3$. the formulae $s = x/1-y$, $t = \sqrt{3}(1+y)/1-y$ determine a birational isomorphism of the curve $x^3+y^3=1$ into the curve $t^2 = 4s^3-1$.

So we arrive at one of the central problems of algebraic geometry: how to classify plane algebraic curves to within birational isomorphism. Even today we can hardly claim that there is an exhaustive solution of this problem.

As in the investigation of rational curves, it seems to be very natural that we can make the following conjecture: Two irreducible curves X and Y are birationally equivalent if and only if $k(X) \cong k(Y)$. (Answer: Yes.) As an exercise, we suggest that the reader verify it by the " most natural" way. Thus the problem of classifying algebraic curves to within birational isomorphism is the geometrical aspect of the natural algebraic problem of classifying (to within isomorphism) extensions of k, of transcendence degree 1 and generated by finitely many elements. Certainly, we don't confine our attention to fields of transcendence degree 1, but to consider fields of arbitrary finite transcendence degree. In other words, we have to go beyond the limits of the theory of plane algebraic curves and have to consider algebraic varieties of arbitrary dimension.

We denote by k^n the n-dimensional affine space over k and X a closed subset of k^n.

An algebraic closed subset (if no ambiguity, we call it closed set for short.) in k^n is a subset $X \subset K^n$ consisting of all common zeros of finitely many polynomials with coefficients in k. We get immediately the following properties:

(a) the intersection of any number of closed sets is closed.

(b) the union of finitely many closed sets is also closed.

As a consequence of a) and b), the closed subsets of k^n satisfy the axioms for the closed sets of a topology. This topology will be called Zariski topology. However, one should notice that the Zariski topology is a very unusual type of topological space. As a matter of fact, it is quasicompact (having the Heine-Borel covering property) T_1-space (not necessarily T_2). The D.C.C. condition of closed sets leads to the quasi-compactness at once.

Each polynomial f in $k[T]$ (where T is a set of variables $T_1, \cdots, T_n$) determines a function $x \to f(x)$ on k^n with values in k, and the restriction of this function to X is called a regular function on X. The reqular functions on X form a k-algebra $k[X]$, which is called the coordinate ring of X. In fact, $k[X] \cong k[T]/U_X$, where U_X consists of all polynomials $F \in k[T]$ that vanish at all the points $x \in X$. Moreover, it is a finite dimensional semiprime commutative k-algebra. Conversely, every finite dimensional semiprime commutative k-algebra arises as the coordinate ring of some closed set in k^n (for some n).

Let $X \subseteq k^n$, $Y \subseteq k^m$ be closed sets, a mapping $f: X \to Y$ is regular if there exist m regular functions $f_1, \cdots, f_m$ on X such that $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$ for all $x \in X$. It is easy to check that all regular functions are continuous in the Zariski topology. A basis for the Zariski topology on a closed set X is given by the open sets: $\{X_f\}_{f \in k[X]}$, where $X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. Let X, Y be closed sets. For the convenience of the following discussion, Hom (X, k) replaces $k[X]$ for a moment. Let $\mathcal{D}$ be the category of algebraic closed sets (and their regular mappings), and $\mathcal{A}$ be the category of commutative k-algebras (and their k-homomorphisms). Do the routine checks step by step as in the module categories, we immediately have the contravariant Hom-functor Hom $(-, k): \mathcal{D} \to \mathcal{A}$. Now let us find out when Hom $(-, k)(f)$ is k-monomorphism, where f is a morphism of a pair of objects (X, Y). By the notion of homological algebra, we know that is necessarily so if $f(X)=Y$. However, it can happen that $f(X)\neq Y$, yet $\overline{f(X)}=Y$. For example : The projection $f(x,y)=x$ from $xy=1$ into k^1. In fact; repeating some elementwise arguments, it follows that Hom $(-,k)(f)$ is k-monomorphism if and only if $\overline{f(X)}=Y$, that is, if $f(X)$ is dense in Y.

A regular mapping $f: X\to Y$ of closed sets is called an isomorphism if it has an inverse regular mapping $g: Y\to X$. From what we have said above it is not difficult to show that closed sets are isomorphic if and only if their coordinate rings are isomorphic. Moreover, the set of morphisms from X to Y and the set of k-homorphisms from $k(Y)$ to $k(X)$ are canonically isomorphic. Thus the functor Hom $(-,k)$ is full and faithful, and for a given object $k[X]$ in $\mathscr{A}$, there exists an object X in $\mathscr{Q}$ such that Hom $(-,k)(X)\cong k[X]$. The facts just mentioned show that Hom $(-,k)$ determines an equivalence of $\mathscr{Q}$ and a certain subcategory $\mathscr{A}_0$, of $\mathscr{A}$; in fact, $\mathscr{A}_0$ be the category of finite dimensional commutative semiprime k-algebras.

In the precedings we have come across the concept of an irreducible plane algebraic curve. Now we state an analagous concept in the general case : A closed set is irreducible if it is not the union of two strictly smaller closed sets. Obviously, it comes to the same factorization property as plane algebraic curves. Thus every closed set has an incontractible decomposition into irreducible closed sets (by the noetherian decomposition theorem).

Next we state the concept of irreducibility of a closed set X in terms of the ring $k[X]$. It is easy to check that a closed set X is irreducible if and only if $k[X]$ is an integral domain. This in turn is equivalent to the fact that U_X is a prime ideal.

If X is irreducible closed set, then the field of fractions of the ring $k[X]$ is called the field of rational functions on X, it is denoted by $k(X)$. Certainly, this notion coincides with that we have mentioned above.

Now, let X be an irreducible closed subset of k^n, Y be any closed subset of k^m. A rational mapping $f: X\to Y$ is a collection of functions $f_1, \cdots, f_m \in k(X)$ such that $(f_1(x), \cdots, f_m(x)) \in Y$ for every points $x \in X$ at which all the f_i are well-defined (regular). It must be borne in mind that a rational mapping is not a mapping of the whole set X into Y, but it necessarily determines a mapping of some nonempty open subset $U \subset X$ into Y. This is an essential difference between algebraic geometry and other branches of geometry, for example, topology. One should notice that a rational mapping f is a continuous mapping from the open subset U of X into Y. (w.r.t. the Zariski topology).

For convenience, we assume X, Y and Z are irreducible closed sets. A rational mapping $f: X \rightarrow Y$ is called dominating if $f(X)$, in fact, it is $f(U)$, is dense in Y. We leave it to the reader to verify that: there exists a natural one-one correspondence between dominating rational mappings $f: X \rightarrow Y$ and field inclusions $f^*: k(Y) \rightarrow k(X)$.

Suppose we have two rational maps $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. Then the composition of f and g can be defined in the obvious way. In particular, the composition is welldefined to be a rational map if f is dominating. Moreover, the composition of two dominating rational maps is also dominating (by the continuity) and we have $(gf)^* = f^*g^*$. The rational map $f: X \rightarrow Y$ is called birational isomorphism if the following equivalent conditions are fulfilled:

1) f is dominating and f has an inverse dominating rational map.

2) f is dominating and the field inclusion $f^*: k(Y) \rightarrow k(X)$ is an isomorphism.

Obviously, isomorphic closed sets are birationally isomorphic. The projection of the curve $xy = 1$ into k^1, although not isomorphism, is birational isomorphism. More generally, every irreducible closed set is birationally isomorphic to a hypersurface in some affine space k^n. Closed sets that are birationally isomorphic to an affine space are called rational. In the previous, we have come across rational algebraic curves are birationally isomorphic to the 1-dimensional affine space k^1. We are concerned with two equivalence relations: isomorphism and birational isomorphism, and we know that both these equivalence relations can be defined purely algebraically. In this context it is important to clarify what rings are of the form $k[X]$ and what fields of the form $k(X)$, where X is an irreducible closed set. The answer is very simple :

An algebra A over a field k is isomorphic to a ring $k[X]$, where X is an irreducible closed set, if and only if A has no divisors of zero and is finitely generated over k. An extension K of k is isomorphic to a field $k(X)$ if and only if it is finitely generated.

About 150 years back, it was realized that for many purposes it was inadequate to consider only the above "affine" closed sets. An immense simplification could be introduced in many problems by considering "projective" closed sets. There is no doubt that projective varieties play a central role in algebraic geometry.

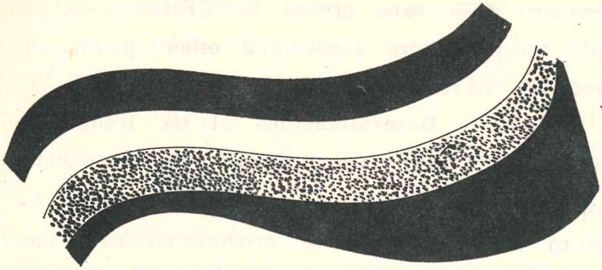
Let P^n be the n-dimensional projective space over k, and k_0^n be the set of all points $x=(x_0, x_1, \cdots, x_n)\in P^n$ for which $x_0\neq 0$. k_0^n is naturally isomorphic to k^n under the map $(x_0, x_1, \cdots, x_n) \rightarrow (x_1/x_0, x_2/x_0, \cdots, x_n/x_0)$. The original mortivation for introducing P^n was to add to the affine space $k^n \cong k_0^n$ the extra "point at infinity "$P^n - k_0^n$ so as to bring out into the mysterious properties that went on at infinity. In defining concept on projective "Varieties", it needs more subtle skill different from the affine case. For this we refer the reader to some excellent references, for instance, [1],[2].

During the past 20 years, algebraic geometry was growing rapidly in many directions : Birational Geometry, Riemann-Roch Theorem and Intersection Theory, Algebraic Cycles, Geometry of Families of Varieties, Moduli of Algebraic Varieties, Periods of Integrals on Algebraic Varieties, Geometry of Algebraic Curves, Geometry of Algebraic Surfaces, and Vector Bundles. At this period, many conspicuous results vere contributed by several mathematicans. For instance, the famous problem of "desingularization" of algebraic varieties has been solved by Hironaka (1964) and Abhyanker (1968); Some comprehensive results on the problem of Riemann's "moduli" were done by Mumford in a series of remarkable papers (1964-1972); Some well-known problems on the "Weil Conjecture" have been proved by Grothendieck and M. Artin; Besides those, many papers concerning other problems were contributed by Shafarevich, Atiyah, Griffiths, Godeaux, Kodaira, Manin, Dolgachev, etc. In particular, Generalizations of the Hodge theory to non-compact algebraic Varities with singularities have recently been started by French mathematician Deligne and much progress has made by him. I am happy to report that those mathematicans mentioned above all remain mathematically active: Hironaka, Griffiths Mumford at Harvard University; Grothendieck, Deligne at Institut des Hautes Etudes Scientifiques; Atiyah at Oxford University; and Shafarevich, Manin, Dalgachev at Steklov Mathematical Institute in Moscow, etc.

I wish to thank Professor Leu, who taught me the same course one year ago.

REFERENCES

1. I.R. Shafarevich, "Basic Algebraic Geometry". Springer-Verlag, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 213 1974.
2. D. Mumford, "Introduction to algebraic geometry". mimeographed notes, Harvard Univ., Cambridge, Mass., 1967.



泛代數

陳邦台

我們在中學時代，已吸收了代數方法，使用字母並把式子用字母表示出來，然後按照一些一定的定律，對式子進行運算。在初等代數裏，字母表示的是普通的數，所以其運算律都是一般數的運算律。在數學裏，我們常使用不同的方法來從事符號運算，其中字母不復代表數，而對於這些東西的運算律可能異於初等代數裏的運算律。

例如，由於幾何、力學、物理的需要，我們使用向量。以及，近代微分幾何（流型理論），泛函分析與量子力學（線性算子）等等，都是應用代數方法，才變成清楚且易了解。又，人類同高速的電子計算機進行計算，也是基於代數計算機械化問題的發展。

假使對於某些事物的集合，定義出某些確定的運算，同時定下這些運算必須滿足的定律，則定義了一個代數系。形形色色的代數系，如群、環、體、Boolean代數，絡、M—群，李氏代數等等接踵誕生。

而泛代數（Universal Algebra）的精神，在尋求並發展，上述形形色色的代數系所共有的性質。可以說是爲了〝提綱挈領〞吧！甚至，無限元偏代數（Infinitary partial algebra），可將拓樸視爲其一特例。

以下，我們嚐試引入〝同餘關係〞來說明一般化的〝代數同構定理〞。

《註》①同餘關係在群論則爲正規子群。

②本文所謂〝第一、第二〞代數同構定理與某些書所用名稱不同。

【引理1】

設A爲一非空集合

稱π爲A上一分割，表示

$$\pi=\{A_\alpha \mid A_\alpha\subset A,\ A_\alpha\cap A_\beta=\phi,\ \alpha\neq\beta\}$$

稱θ爲A上一等價關係，表示

$\theta\subset A\times A$具有下列性質：

1° 反身性　$a\in A$，$(a,a)\in\theta$

2° 對稱性　若$(a,b)\in\theta$則$(b,a)\in\theta$

3° 遞移性　若$(a,b)\in\theta$，$(b,c)\in\theta$，則$(a,c)\in\theta$

給A上一等價關係θ

令商集合 $A/\theta=\{[a]\theta \mid a\in R\}$

其中

$[a]\theta=\{b\in A \mid (a,b)\in\theta\}$

易證：A/θ爲一分割

給A上一分割 $\pi=\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$

令 $R_\pi=\{(a,b)\in A\times A \mid a,b\in A_\alpha$ 對某一$\alpha\in I\}$

易證：R_π爲A上一等價關係

由此得到，A上等價關係與分割具有一一對應。

【引理2】

①設映射$f:U\to V$

定義　核$f=\{(x,y)\in U\times U \mid f(x)=f(y)\}$

易證：核f爲U上一等價關係

②定義　$\varphi: U\to U/\theta$

$x\mapsto[x]\theta$　其中$\theta=$核f

則 φ 爲映成。

③定義　$\Psi: U/\theta \to f(U)$

$[x]\theta \mapsto f(x)$

則 Ψ 爲一對一且映成。

稱泛代數 $A=\langle A_0, A_1\rangle$ 表示 A_0 爲一非空集合，A_1 爲一 A_0 上運算族。

稱 A 爲 τ 型，表示

有序化 A_1，其序數爲 $O(\tau)$

對 $\gamma < O(\tau)$ 對應 n_γ 一元運算 $(f_\gamma)_A$（n_γ 爲非負整數）

則 A_1 可記爲

$\langle (f_0)_A, (f_1)_A, \cdots, (f_\gamma)_A, \cdots \rangle$

（若不混淆，可簡記 $(f_\gamma)_A$ 爲 f_γ）

以下所討論之代數均爲同型（τ 型），即設

$A=\langle A_0, A_1\rangle$　　$B=\langle B_0, B_1\rangle$

爲 τ 型代數。

稱映射 $\varphi: A_0 \to B_0$ 爲 A，B 之一同態，表示

對 $\gamma < O(\tau)$　　$a_0, \cdots, a_{n_\gamma-1} \in A_0$

$(f_\gamma)_A(a_0, \cdots, a_{n_\gamma-1})\varphi$

$=(f_\gamma)_B(a_0\varphi, \cdots, a_{n_\gamma-1}\varphi)$

若又 1－1 且映成，則稱之爲同構。稱 θ 爲 A 之同餘關係，表示 θ 爲 A_0 之等價關係，且對 $\gamma < O(\tau)$，若

$(a_i, b_i) \in \theta$　　　$a_i, b_i \in A_0$

$0 \leqslant i < n_\gamma$

則 $(f_\gamma(a_0, \cdots, a_{n_\gamma-1}), f_\gamma(b_0, \cdots, b_{n_\gamma}-1)) \in \theta$。

【引理3】

設 $\varphi: A \to B$ 爲同態映射

已知　$\theta =$ 核 φ 爲 A_0 上一等價關係

易證：θ 爲一同餘關係

證：對 $\gamma < O(\tau)$

$(a_i, b_i) \in \theta$　　　$a_i, b_i \in A_0$

$0 \leqslant i < n_\gamma$

則　$\varphi(a_i) = \varphi(b_i)$

則 $(f_\gamma)_A(a_0, \cdots, a_{n_\gamma-1})\varphi$

$=(f_\gamma)_B(a_0\varphi, \cdots, a_{n_\gamma-1}\varphi)$

$=(f_\gamma)_B(b_0\varphi, \cdots, b_{n_\gamma-1}\varphi)$

$=(f_\gamma)_A(b_0, \cdots, b_{n_\gamma-1})\varphi$

則 $(f_\gamma(a_0, \cdots, a_{n_\gamma-1}), f_\gamma(b_0, \cdots, b_{n_\gamma-1})) \in \theta$

【引理4】

設 $A=\langle A_0, A_1\rangle$ 爲一 τ 型代數，θ 爲其一同餘關係，可定義商代數

$A/\theta = \langle A_0/\theta, A_1/\theta\rangle$

其中，商集

$A_0/\theta = \{[a]\theta \mid a \in A_0\}$

對 $\gamma < O(\tau)$

$[a_0]\theta, \cdots, [a_{n_\gamma-1}]\theta \in A_0/\theta$

$(f_\gamma)_{A/\theta}([a_0]\theta, \cdots, [a_{n_\gamma-1}]\theta)$

$=[(f_\gamma)_A(a_0, \cdots, a_{n_\gamma-1})]\theta$

【引理5】

$\varphi: A_0 \to A_0/\theta$　爲同態蓋射

證：引理2，已說明 φ 爲良置且蓋射，今只須證，φ 保持運算

$f_\gamma(a_0, \cdots, a_{n_\gamma-1})\varphi$

$=[f_\gamma(a_0, \cdots, a_{n_\gamma-1})]\theta$

$=(f_\gamma)_{A/\theta}([a_0]\theta, \cdots, [a_{n_\gamma-1}]\theta)$

$=(f_\gamma)_{A/\theta}(a_0\varphi, \cdots, a_{n_\gamma-1}\varphi)$

第一同構定理：

設 $\varphi: A \to B$ 是一同態蓋射　$\theta =$ 核 φ

則 $A/\theta \cong B$ 如下

$\Psi: [a]\theta \to a\varphi$

證：引理2，已說明上述映射爲一對一且映成。

今只須證，Ψ 保持運算

$f_\gamma([a_0]\theta, \cdots, [a_{n_\gamma-1}]\theta)\Psi$

$=[f_\gamma(a_0, \cdots, a_{n_\gamma-1})]\theta\ \Psi$

$=f_\gamma(a_0, \cdots, a_{n_\gamma-1})\varphi$

$=f_\gamma(a_0\varphi, \cdots, a_{n_\gamma-1}\varphi)$

$=f_\gamma([a_0]\theta\ \Psi, \cdots, [a_{n_\gamma-1}]\theta\ \Psi)$

爲了描述商代數 A/θ 上同餘關係，我們引進下列觀念。

設 Φ 爲 A 之同一餘關係且 $\Phi \geqq \theta$（不妨想作 $\Phi \geqslant \theta$），則可定義一二元關係 Φ/θ 如下

$([a]\theta, [b]\theta) \in \Phi/\theta$

若且唯若

$(a, b) \in \Phi$　$(a, b \in A_0)$

【引理6】

證：易證Φ/θ爲A/θ上一等價關係。今只證其保持運算。

$([a_i]\theta, [b_i]\theta) \in \Phi/\theta$

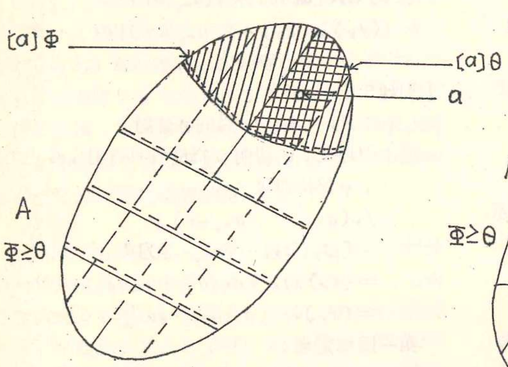
$\Rightarrow (a_i, b_i) \in \Phi$

$\Rightarrow (f_\gamma(a_0, \cdots, a_{n_\gamma-1}),$
$f_\gamma(b_0, \cdots, b_{n_\gamma-1})) \in \Phi$

$\Rightarrow ([f_\gamma(a_0, \cdots, a_{n_\gamma-1})]\theta,$
$[f_\gamma(b_0, \cdots, b_{n_\gamma-1})]\theta) \in \Phi/\theta$

$\Rightarrow (f_\gamma([a_0]\theta, \cdots, [a_{n_\gamma-1}]\theta),$
$f_\gamma([b_0]\theta, \cdots, [b_{n_\gamma-1}]\theta)) \in \Phi/\theta$

我們可以下圖表示其直觀意義（利用引理1）



【定理】

設$A=\langle A_0, A_1\rangle$爲一代數，$\theta$爲$A$上一同餘關係$\langle C(A/\theta); \leqq\rangle$爲$A/\theta$上所有同餘關係所構成的絡。$\langle[\theta); \leqq\rangle$爲絡$\langle C(A); \leqq\rangle$中，由$\theta$所生成的偶理想$[\theta)=\{\Psi | \Psi \geqq \theta\}$，則

$\langle C(A/\theta); \leqq\rangle \cong \langle[\theta); \leqq\rangle$如下

$\Phi \in C(A/\theta) \to \overline{\Phi} \in C(A)$

$(a,b) \in \overline{\Phi} \Rightarrow ([a]\theta, [b]\theta) \in \Phi$

$\Phi \in [\theta) \to \Phi/\theta \in C(A/\theta)$

換言之，商代數A/θ上同餘關係的行爲，可以A上同餘關係Φ且$\Phi \geqslant \theta$表示。

第二同構定理：

設$A=\langle A_0, A_1\rangle$爲一代數，$\theta$，$\Phi$爲$A$上同餘關係且$\theta \leqslant \Phi$，則

$A/\Phi \cong A/\theta$ ~~Φ/θ~~

$[a]\Phi \to [[a]\theta](\Phi/\theta)$

證：考慮映射$\xi: A/\theta \to A/\Phi$

$[a]\theta \to [a]\Phi$

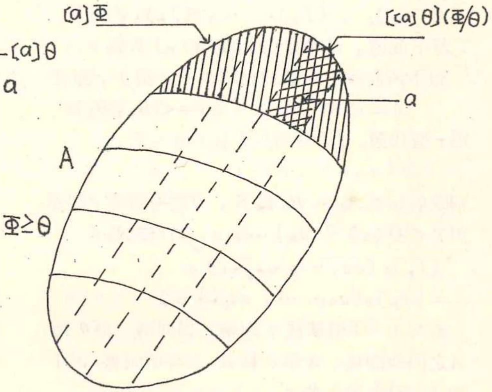
易證其爲同態蓋射

核$\xi = \{([a]\theta, [b]\theta) | [a]\Phi = [b]\Phi\}$
$= \{([a]\theta, [b]\theta) | (a,b) \in \Phi\}$
$= \Phi/\theta$

由第一同構定理，知

$A/\theta \big/ \Phi/\theta \cong A/\Phi$

其直觀意義，可以下圖表示



參考書目

1. 數學之內容方法及意義（徐氏基金會譯）(1956俄著，1964英譯，1970中譯)。
2. Universal Alegebra (Grätzer) (1968)。
3. Topics in Universal Alegebra (Bjarni J'onsson) (1972)。

中國數學發展史

編輯小組

數學是研治一切科學的工具。歷史比較長久的自然科學，如天文學，如物理學，如化學等，都因爲充分利用數學來整理，來推衍，所以才能發煌光大，建立出完整的體系。近代新興的自然科學，如生物學，如地質學，如心理學，馴至人文科學裏的社會學、經濟學等，也多是因爲採用數學去歸納去分析，才有迅速的進展。從物質方面來講，世界文化的進步，可以說是隨着科學的昌明以俱來的。從另一方面來講，科學愈昌明，它所仰求於數學的地方就愈多且愈精湛。時至今日，從事一切科學工作，莫不需倚畀於數學。因此，有人曾把數學稱爲一切科學的后座，更有人把一種科學中用到數學地方的多少，作爲判定這種科學發展程度的準繩。姑不論這些譬說是否中肯，但至少可以顯見數學在科學中的地位。

於此，須加指出的，就是數學是一種探求眞理的學問，其本身自成一體系，它的應用，是別的科學的需求。雖其產生是從應付實際問題開始，但應用是狹隘的，因之，應用反又成爲數學發展的羈絆。數學的眞正發展，是在突破這道「實用」的藩籬以後，這種從「實用」轉到「求眞知」的轉變，才是數學智識的發軔點。

歐西數學發展粗具形式的最早國家是古埃及。其後是希臘。希臘人承襲埃及人的餘緒，在紀元前幾個世紀裏，歷經各學者的研究發明與提倡，擴大了數學的境界，從而奠下了數學的基礎。中世紀時期，數學曾一度沒落，但著論立說，仍不乏人。十七世紀以後，名家代出，數學的發展，急轉直上，日新月異，有如波濤洶湧，氣象萬千。在橫的方面，廣袤博大；在縱的方面，深邃幽遠。到了現在，數學乃蔚爲一種最完整最宏遠的科學。

反觀我國，在一部輝煌的洋洋的世界數學史上，幾乎沒有我們揷足的地方。其實，我國的數學，正如我國的文化，發祥亦甚早。幾千年來，雖然沒有作積極性的發展，但也不乏獨立的創見與發明。筆者願在此爲我國古來數學的發展，略作陳說。

附帶說明的是本文旣用文字敍述，凡涉及數字、符號、圖形、及演算的地方，均避免不用。因此，有些解釋，不易闡述得清楚，這是不得已的。

辨識數目與記數是人類的基本本能。其實，有些高等動物，它們也具有簡單的數目觀念，譬如有一種猫與非洲產的一種猩猩，它們就有辨數的能力。

簡單說來，數的運用，就是數學。從辨數到數的運用，在智慧上有着很大的一段距離。運用數是人類獨具的本能。

有史以前，我國的數學智識究竟發展到什麼樣的地步，因爲沒有記載，很難查考。大抵上古的人，會用石片在木頭上或樹幹上刻缺痕，在石壁上或石板上劃線道，或堆積石子以記數，都是我們可以想像得到的。我國數學的應用，應遠在伏羲以前。伏羲畫八卦，據德國數學家萊本尼玆稱，它是一種二進位的方法。周易是我國最古的一部經書，全書裏處處離不開數。易繫辭傳云，「上古結繩而治，後世聖人，易之以書契」。老子與莊子，也都講到結繩。結繩記事，已涉及用數，所謂「事大大其繩，事小小其繩，結之多少，隨物衆寡」，是則我國數字的應用，並不後於古埃及。

前面曾經說過，數學的起源，始自應用，這在古今中外，差不多都是一樣的。埃及因爲尼羅河定期泛濫，田畝地界年有變遷，不得不講求測量，因此他們的幾何學形成得最早。腓尼基人長於經商，所以他們精於計算的方法。巴比倫對於天文曆算研究得很早，印度的數學，大致是應用在宗教祭祀方面。我國古時，相傳伏羲作規矩，而「伏羲執規，女娲執矩」，則是我國相沿已久且流傳甚廣的傳說。因爲有規矩的制訂，所以建築的圖案能夠採用幾何圖形。國內發掘仰韶時代的陶器，其上都繪有整齊的幾何圖形，足證明是規矩造成的。至於居室的建造，因多用準繩，「規、矩、準、繩」到後來乃成爲一系專門的名詞。又我國以農立國，重視農事，須知農時，故對天文曆法，研究甚早。世本稱，「黃帝伏羲和占日，常儀占月，臾區占星氣，伶倫造律呂，大撓作甲子，隸首作算數」。尚書堯典裏載有天文曆法記錄。禮記王制裏說到田畝算法，所謂「天子之田方千里，公侯田方百里，伯七十里，子男五十里」，及「制農田百畝，百畝之分，上農夫食九人，其次食八人，其次食七人，其次食六人，下農夫食五人…」等，皆足以說明我國古時已普遍用到數學。

我國最早造數並且可以徵引的是伏羲。漢書律曆志稱「伏羲畫八卦，由數起，至黃帝堯舜而大備」。伏羲以後，相傳作數的是隸首。世本稱，「黃帝使隸首作數」。而漢徐岳的數術記遺中也說，「隸首注術，乃有多種」；又說，「黃帝爲法，數有十等，及其用也，乃有三焉」。照後來的解釋是，我國把個、十、百、千、萬等五個單位當作「五數」。十等是指億、兆、京、垓、秭、壤、溝、澗、正、載。三種用法是指三種進位的方法，即下數用十進，以十萬爲億，十億爲兆，…中數用萬進，以萬萬爲億，萬億爲兆，…上數用自乘進，以萬萬爲億，億億爲兆，…。這種記數方法，設想得相當周全，當時的人是否已能顧慮到如此的細密，以及當時是否有創造這樣大的數目的需要，恐怕頗有問題。它可能是後人附會出來的。但我國早就有億、兆等字樣，例如書經裏稱「億兆」、「兆民」，毛詩稱「千億」，六韜稱「億有八萬」等，却是有書可以徵信的。這些也都是十進位的明證。

我國古來數學上重要的措施發明及著述

我國的數學 固然沒有作積極的提倡與發展，但自周朝起，列爲教育學科的一種，漢朝仍之，唐朝設置書算博士，舉行算學考試，宋元學者，紛紛研究數學，明清兩朝，吸收西洋曆算，所以三千年來，可以稱道的建樹，仍舊不少。本文因限於篇幅，未能逐一介紹，玆將重要的措施、發明、與著述略述如下：

數學成科 我國數學的發展，到了周朝，已有相當的基礎。周朝把算數一門列爲教育的必修學科。周官保氏內記有，「教國子以六藝，一曰禮，二曰樂，三曰射，四曰御，五曰書，六曰數」；內則裏說，「六年教之數與方名，十年出就外傅，居宿於外，學書計」，都是說明在教育裏列有數學一科。這項規定，到漢朝仍舊被沿用着，例如前漢書食貨志裏便記有這樣的一句，「八歲入小學，學六甲、五方、書計之事」。

九九 九九術是乘法用的口訣，因爲從九九（八十一）開始，所以稱它爲九九。關於九九歌訣，我國很早便有傳說，管子輕重篇裏稱，「伏羲作九九之數，以應六道」；魏劉徽九章注裏稱，「庖羲始畫八卦，作九九之術」，認爲是伏羲作的，照後人推想，未必眞正可信。不過，荀子、呂氏春秋、淮南子、戰國策、孔子家語、與史記索隱等書裏都曾提到它，則這口訣在周秦以前似乎便已有了。敦

煌石室所發現的「九九術殘木簡」，應是漢朝的遺物。

周髀算經 相傳我國最古的數學書是周髀算經。這本書一共分為兩卷，傳說是周公與商高問答的話。可是，話裏可疑的地方很多，而且書裏還曾經引用過呂氏春秋，所以假使不是後來的人添進去的那麼完成這本書的時代最早不應在戰國以前。清初姚際恒則認為這是僞書。

周髀算經裏有下列幾個重點：

㈎整數的勾股關係——用勾三股四弦五的關係造出來的三角形是直角三角形。

㈄割圓說　認為圓的圓周長與直徑的比是三比一，即圓周率為三。

㈅測量術——應用三角量法以量地，列有測量學裏的基本智識，所謂，「平矩以正繩，偃矩以望高，覆矩以測深，臥矩以知遠」。

㈆繪圖術——除說明用三四五的整數比例關係畫直角三角形外，還說明用兩個直角三角形可以合成一個矩形，及轉動直角三角形可以畫圓。是謂之環矩以為圓，合矩以成方。

書裏還一再言及等差級數，如七衡之直徑以二遞進；二十四氣，以九、十、九又六分之一寸遞為加減等是。

漢魏的數學——漢魏時期，我國的數學，相當發達。算經中的九章、孫子、張丘建、夏侯陽、紀遺、與三等數等，都是在這個時期裏完成的。著名的數學家有張蒼、耿壽昌、張衡、劉歆、趙爽、鄭玄、徐岳、王蕃、與劉徽等人。秦朝焚書以後，又經戰亂，各種册籍，不毀於火，也毀於兵，故多散失不全。漢初，張蒼與耿壽昌二人均以善算出名，兩人搜求數學遺書，並予以删補，九章算術經他們整理以後，才便於後人學習。劉歆定圓周率，我國推求圓周率，可以說就從這個時候開始。張衡與鄭玄均精於曆算。徐岳著數術記遺。趙爽作勾股方圓圖注，用圖形表示勾股弦三者間的關係。曹魏時，劉徽注九章算術，九章經他這次注訂後，才成完本。他從圓內接正六邊形起推求圓周率，是前人所未曾論到的。此外，他並創立重差術，利用三角與幾何比例關係以測高測遠。

九章算術—九章算術也是我國很早的數學書。書裏所集的材料很多，分類也相當完備。漢朝研究它的風氣最盛，以後各代研究數學的人，也莫不研讀它。

九數一詞，雖然早在周禮地官保氏裏便已有了，但是在周朝，未必已能把數學作這樣周密的劃分。西漢時有算術而不叫九章，漢書藝文志裏也沒有言及九章算術，經人們考證，九章算術的名字，恐怕是到東漢或曹魏的時候才有的。

九數的說法，各家註說不一。漢鄭玄所稱的周官九數是方田、粟米、差分、少廣、商功、均輸、方程、贏不足、與旁要等九種。魏劉徽的註說是方田、粟米、差分、少廣、商功、均輸、盈不足、方程、與勾股等九種。劉徽注九章算術後，九章一書，才算有定本行世。書中共設有問題二百四十個，關於幾何形體的討論，除弓形（弧田）、四邊形（四不等田）、球缺（宛田）、鼓形（鼓田）等幾種為近似值外，其餘都完全正確。在少廣一章裏曾提到單分數，是我國古時候應用分數記載畸零數值的一個例證。勾股章裏列有一元二次方程式。

九數的意義，照劉徽九章注的注說是，方田以御田疇界域，粟米以御交質變易，差分以御貴賤稟稅，少廣以御積冪方圓，商功以御功程積實，均輸以御遠近勞費，盈不足以御隱雜互見，方程以御錯糅正負，勾股以御高深廣遠。從這裏，我們一則可以看出來九章數學包羅的廣泛，再則也可以看出來我國古時候的數學是從實用裏衍生出來的。

勾股方圓圖注 勾股方圓圖注說明直角三角形勾股的變化關係與它們的推求方法，這是趙爽（君卿）作的。趙氏所在的時代不詳，可能是漢朝人。他把幾何圖形，施以朱、青、黃等顏色，使它們「出入相稱，各從其類」。後來，劉徽注九章算術，也沿用這法子。他在圖中說，「趙君卿曰，勾股各自乘，併之為弦實，開方除之，即弦也」這是說弦長等於勾、股平方和的平方根。劉徽又說，「案玄圖，又可以勾股相乘為朱實二，倍之為朱實四，以勾股之差自乘為中黃實，加差實，亦成弦實」，這是說明求弦長的另一種方法，與後來印度巴斯卡拉阿刻雅（Bhaskara Acarya）在公元一五一〇年所證明的結果相類似。

另外，圖注中還列有「以差實減弦實，半其餘，以差為從法，開平方除之，復得勾矣，加差於勾即股」，是推勾與股的方法。

五曹、海島、張丘建、夏侯陽、五經算、綴術，與輯古等十種；南宋時鮑澣之所傳刻的則爲黃帝九章，周髀算經，五經算法，海島算經，孫子算經，張丘建算經，五曹算法，輯古算法，夏侯陽算法，與算術拾遺等十種。

唐代的數學 唐代的數學，上承漢魏，下接宋元，是我國數學史上最爲重要的時期。唐朝初年，王孝通著輯古算經一書，該書與九章，孫子，海島等同被後人看作重要的數學書。貞觀年間，李淳風、梁述、與王眞儒等受命註算經十書，後來交由國學應用，以前各代的數學著述，到這時候才正式由官方頒行於天下。印刷術在唐朝已開始應用，加以政府釐訂算學制度，舉行算學考試，於是唐朝的數學，朝野上下，都很盛行。

我國的考試制度，實在是從隋朝開始，這裏面並包括有算數。隋書百官志裏記有，「算學博士二人，算助教二人，學生八十人，弁隸於國學」，舊唐書裏也說，「隋始置算學博士二人於國庠」。只是隋朝立國的時間很短，沒有什麼顯著的成就。

唐代的算學制度起初是在學校下面設置算學博士二人，助敎一人，算學生三十人，典學二人。學制定爲七年。三十人中，第一組十五人學九章，海島，孫子、五曹、張丘建、夏侯陽、周髀；第二組十五人學綴術與輯古。他們同時還習讀記遺與三等數兩書。每年舉行歲試，成績分上、中、下三等。七年學成，舉行畢業考試，第一組考九章三帖、海島、孫子、五曹、張丘建、夏侯陽、周髀、五經等七書各一帖。第二組最初考綴術六帖，輯古四帖；後來改爲綴術七帖，輯古三帖。這種算學制度先後曾修改多次，不過終唐之世，都在用它。

唐代著名的數學家有王孝通、李淳風、僧一行、邊岡、劉孝孫、陳從運、與龍受等人，他們一方面研讀舊有的算學書，另一方面還從事著述。

唐代吸收印度的文化，在數學上，除曆法外，大小數方法及筆算方法都是在這個時候傳入的。當時，印度對於零位，還是用「點」來代替，這可從開元占經「算字法樣」條中所記的「…右天竺算法，用九個字乘除，其字皆一舉札而成，九數至十數，進入前位。每空位處，恒安一點，有問咸記，無由輒錯，連算便眼」一段話裏看出來。此外，近東流行的土盤算法，也在唐代傳入我國。土盤算法是用砂代紙，把沙土布在盤上或地面上，用竹或鐵去書寫。

唐代的聲敎遠及海外，日本不時派遣僧人來我國留學，知名的有吉備眞備，宗叡等人。日本就在這個時期設立學校，教授算術，所採的算經十書爲周髀、孫子、六章、三開、重差、五曹、海島、九司、九章、與綴術等，可說全是受我國的影響。

再有，從前人們以爲我國商業通用的大寫數字壹、貳、叁、…拾、佰、仟等字是從宋朝開始的，其實在隋唐時期便已有了，這點我們不難從許多的舊册籍中察知。

宋元時期的數學 宋元算學是我國數學史上的黃金時代。宋神宗元豐七年，由官家刻算經入秘書省，同時在國子監的下面設置算學取士。當時並訂有「元豐算學條例」，可惜現在已無從查考。徽宗崇寧年間，將元豐算學條例修成敕令，後又頒布國子監算學敕令格式。金人破汴京，秘閣三館所藏的書籍版片，全被擄去。南宋時，鮑澣之傳刻算經十書，使得我國古時的算學書，得能普遍地流傳。大體說來，在這個時期裏，政府方面對於算學的興廢變動比較多，民間的研究風氣則十分盛行。名家在宋如秦九韶著數學九章十八卷，楊輝算法七卷；在金如李治著測圓海鏡二十卷，益古演段三卷；在元如朱世傑著算學啓蒙三卷與四元玉鑑三卷等，都是後世傳習的數學名著。

劉益、賈憲 劉益、宋人，用勾股的方法，研究演段與鎖方問題，著有議古根源一書。書中所用的帶從開方法，正方損益法，與帶益隅開方法，都是先前所未用過的法子。他的帶從開方裏所舉的式子雖然只論到一元二次方程式，但他所用的法子已與現在所習知的解高次方程式，不盡根的霍納法（Horner's Method）相似。其後，賈憲、秦九韶、李治、郭守敬、與朱世傑等人在他們的論著中所引的正負開方術，都是根據他的這種法子。霍納法是在公元一八一九年發表的，劉益是北宋時候的人，所在的時代約爲十一世紀，比較起來，劉益的發明要比霍納早七八百年。

賈憲，北宋人，著有算法斆古集二卷，即宋史所指的黃帝九章細草一書。他所創用的釋鎖平方法及立方法，與十七世紀法國數學家巴斯卡（Blaise Pascal）所發明的三角形法相同，比起來，又要

早四五百年。他的遞增三乘開方法，用以求四次方根，已與霍納法甚爲相近。

秦九韶 秦九韶，南宋末年人，精通星象音律算術以至於營造方面的學問，著有數學九章一書。清羅士琳說，「秦九著數學九章，而古正負開方術顯」。他在演算中最早採用零號，同時並創用簡化的數碼，我國商業上通用的數字簡碼就起源在這裏。

秦氏的數書九章裏包括九個大類，即：㈠大衍；㈡天時；㈢田賦；㈣測望；㈤賦役；㈥錢穀；㈦營造；㈧軍旅；㈨市易等是。此外，他還討論大衍，垛積、招法、率變等問題，而對於正負開方術一項，更多發明與創見。在他以前，我國用開方法解方程式只論到二次式與三次式，劉益的帶從開方法，只講到二次；賈憲的三乘開方法，也只推到三次。秦氏則推廣到多乘方（多次）。他所用的法子，完全與霍納法相似，比較起來他當然要早五百多年。

秦氏還討論到數。在大衍總數術裏，他把數分爲「元數」（即整數），「收數」（即小數），「通數」（即分數），與「復數」（即十的乘方數）等幾種。他所稱的「兩兩連環求等」，就是求最小公倍的法子。

李治、楊輝 李治，金代人，長於算數，著有測圓海鏡二十卷及益古演段三卷。他創立「天元一」方法。在他的著述裏對這方法闡述得也特別詳盡。他把代數式子裏的常數叫作「太極」，於它的旁邊記一個「太」字；把一次的未知數叫作「天元」，於它的旁邊記一個「元」字。在測圓海鏡裏，太在元下，所謂「元下必太，太上必元，故有元字，不記太字，有太字，不記元字。元上一層，則元自乘數；又上一層，則元再乘數，凡上一層，則增一乘。太下一層，則除太數；又下一層，則元再除太數，凡下一層，則增一除」就是說代數式裏常數，一次項，二次項，…多次項及負一次項，負二次項…負多次項等的記法。

楊輝，南宋人著有詳解九章算法（後附纂類），詳解算法，日用算法，乘除通變本末，田畝比類乘除捷法，續古摘奇算法等書，後三者合稱爲楊輝算法。他在詳解九章算法中曾用級數求三角垛，四隅垛，及方垛的和。在續古摘奇算法中，列有縱橫圖。他的「九子排列，上下對易，左右相更，四維挺出」四句話，是後來作奇行縱橫圖的根源。他還排有百子圖。

朱世傑 朱世傑，元朝人，著有算學啓蒙三卷及四元寶鑑三卷。四元寶鑑裏討論到現在稱爲一元到四元的各次方程式的問題。他把天、地、人、物四個字分別當作四個未知數，用起來相當便利，所謂「按天地人物成立四元，以元氣居中，立天元一於下，地元一於左，人元一於右，物元一於上，…」就是指這點而言。這法子叫做四元術，是前人所不曾發明的。

此外，他對於級數，也很有研究。在垛積方面，列有落一形、撒星形、四角落一形、嵐峯形、三角嵐峯形、四角嵐峯形、撒星更落一形、三角撒星更落一形、與圓錐垛積等問題。在招數方面，他提出的有築堤差夫，差夫給米；圓箭束招兵，招兵給米；平方招兵，招兵支銀，招兵給米；立方招兵，招兵支錢等頗爲複雜的級數求和的問題。

朱世傑還編有九歸除法。數字演算需要有適當的歌訣，著名的九九，便是演算乘法的基本歌訣，演算除法，古時有商除，宋時有歸除，楊輝又另立歸括，但都很繁難，不便應用。朱世傑所定的九歸除法，很是簡單，對於多位除法，最爲合用。後來珠算的除法，就是本着這種歌訣。

求一術 求一術出於孫子的「今有物不知其數，三三數賸二，五五數賸三，七七數賸二，問物幾何」問題。明朝流行到民間，這問題被稱作「鬼谷算」或「韓信點兵」，我國古來的數學家，在這上頭，很下了一番研究的工夫。

求一術是求解不定方程式的一種方法，孫子算經上沒說明詳細的解法，這是它的缺憾。宋朝秦九韶發明「大衍求一術」，用大衍方法去推求，才顯出解法的奧妙來。後來，人們絡續予以改良，另外推出幾種簡單的解法，求一問題，乃完全獲得解決。

縱橫圖 縱橫圖是一種數字排列的遊戲，我國自宋元起，研究這種圖形的構成方法及變化情形很是風行。相傳，伏羲時黃河中龍馬負圖的「河圖」，與大禹時洛水中神龜獻書的「洛書」，所指的都是縱橫圖。不過，這種傳說，到北宋時才有，因此可以推測是後人發現了這種圖形的關係編造附會的。河圖上只不過顯示了從一到十的十個基本數字，含有以十進位的意思。洛書中所列的共是九個數，從一到九，每三個排成一排，結果不論是縱行，橫

行，或斜對角線上三個數的和，都是十五，算是一種很巧妙的發現。這與今日所謂的方陣圖，或西人所稱的「魔方」，完全相同。

其實，洛書就是流傳的九宮。漢徐岳的數術記遺裏記有九宮算，是古時候記數方法的一種。甄鸞注稱，「九宮者,卽二四爲肩,六八爲足,左三右七七，戴九履一，五居中央」，這恰是洛書上排列的形式，可見九個數的這種排列關係，早就被人發現了，而洛書的名稱是後加的。

後人根據這種構圖關係，曾造出來各形各色的方陣圖及雜形陣圖。楊輝在他的續古摘奇一書中，就曾列有各式的縱橫圖多種。

正負符號的運用　相傳在周朝用紅籌黑籌表示正負，劉徽注九章算術「方程」章裏說，「正算赤，負算黑，否則以邪爲異」，是不是我國很早就已定出正負數來，現在尚無確實的證據。宋秦九韶用正負數開方是可考的事實。後來，李治、朱世傑等人都是在數字上畫一斜線以表示負數，沒有斜線的便是正數。清道光以後，李善蘭和華蘅芳等，用丁字符號表負，用倒丁字符號表正。這種記法，當然不適用於縱橫的數碼上。

明清算學　明朝注重八股，政府的數學考試制度，久已廢止，民間研習數學的風氣又不盛，沒有出什麼著名的數學家，所以這時期可說是我國算學的衰弱時期。到明朝末年，歐洲的傳教士來我國傳敎，同時傳授各種曆算，西洋的數學，從此乃正式輸入我國。西洋的名著「幾何原本」就是在這個時候譯成中文的。在這時期裏，歐洲來我國最著名的人是利瑪竇，我國介紹西算最力的是李之藻與徐光啓兩人。

清朝初年，西人來我國的傳教士日多，而由他們所介紹來的曆算也日多，清聖祖康熙銳意學習曆算，由西洋傳敎士到宮裏去教授，同時並注意算學教育，又造成研治數學的風氣。後來編著的數理精蘊等書，就是從他們教授時所編的滿文漢文算法講義刪改修訂而成。西洋輸入我國的數學，這時又有筆算、代數、幾何、對數、與三角等。在這段時期裏，我們研習古算的雖然仍大有人在，而且也很盛行，無如中算比不上西算的精簡而有系統，所以寖演寖變，我國的古算乃逐漸失色而終成陳迹。

有清一代著名的數學家，初有黃宗羲、王錫闡、梅文鼎等人，後則有李善蘭、華蘅芳等人。

結　語

我國的數學，發祥很早。我國早就知道用十進位，並創用個、十、百、千、萬、億、兆等數字。在西方，除了埃及、巴比倫及希臘以外，幾乎沒有別的國家能與我國相比擬。而他們的記數法，還不及我國的完善。我國古代的九章算術，普遍討論到各種應用問題，這在古時候數學發展的初期，能有如此的成就，實在是值得我們重視的。

可是，兩千多年以來，歐西的數學，急起直上，日新又新，截至近世，他們在數學上的發明與創說，簡直使人有身入璇宮目迷五色的感覺。我國呢，相反地，在這悠長的一段時期裏，並不是沒有研究及發明，可是比起他們來實在是太少了。就是到了明清之際，西學東漸，許多研究數學的人，還如同古來的讀書人一直埋頭在五經四書裏一樣，仍困在周髀、九章、孔子、五曹等有限的幾本古書的圈子裏，很少有人能跳出這致用的小圈子，晉入到眞正的純粹的數學園地裏去。

究其原因，並不是我國人的數學智能比不上外國人，我國古時候的數學發展，正是我國人能於數學的明證。兩千年來，我國的數學所以沒有進展的原因，不是因爲我們不能，而是因爲我們沒能。在這期間，別人在向前走，而我們却停住了。我國從漢朝以來歷代的尊崇儒術、罷黜百家，視工藝爲末務的政策，正是我國科學進步及數學發展的枷索。有的說，我國的數字不便於計算，數學的符號也不完全，是數學進步的阻礙，這說法可說是倒果爲因。要知道阿拉伯數字是在十二世紀才流傳於歐洲，而數學裏所用的各種符號，也大多是近世才創用的。倘使我國從早就能注意數學，不受拘束，則爲適應實際發展需要，說不定國人會更早地發明並應用簡單的數字及數學符號了。

倒是我國的獨處東亞，幅員遼濶，又是亞洲的文明古國，少與外國接觸，多多少少曾影響到數學的發展。如果能常與歐西的國家往還，彼此

圓周率　假如周髀經是我國最早的數學書，那麼這書裏的「圓周率三，圓徑率一」一句話，便是我國對於圓周率的最早的記載。我國古時候研究圓周率的人很多，著名的像劉歆、張衡、蔡邕、王蕃、與劉徽等，都曾致力於它。而西漢時的劉歆則是最早研究它的人。劉歆所算的圓周率是三．一五四七，張衡的是十的平方根，蔡邕的是三．一二五，王蕃的是三．一五五五，劉徽則作三．一四。

劉徽求圓周率的方法是從圓內接正六邊形的邊長算起，然後依次將邊數加倍，求十二邊形，廿四邊形、四十八邊形等的邊長，最後各邊將與圓周密合，而所包的面積也必與圓面積極端接近。所謂，「割之彌細，失之彌小，割之又割，以至不可割，則與圓周合體，而無所失矣，這種立論，是正確不移的。

劉徽是曹魏時代的人，也是我國古時候一位傑出的數學家。前面曾經說過，九章算術經他注後，才算有定本。他除推求圓周率以外，還造重差術，列於九章終篇。他在九章序裏說，「輒造重差，并爲注解，以究古人之意，綴於勾股之下，度高者重表，測深者累矩，孤離者三望，離而又旁求者四望」。重差術是測高測遠的方法，實爲人們用三角法測量的濫觴。唐朝以後稱重差術爲海島算。

劉徽所算的圓周率只取到三、一四，沒有作更多的推求。後來到劉宋時，祖冲之用綴術計算，圓周率的較精確數值，才算是肯定。據隋書律曆志載，「宋末南徐州從事史祖冲之更開密法，以圓徑一億爲一丈。圓周，盈數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽；朒數，三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽，正數在盈朒二限之間。密率，圓徑一百一十三，圓周三百五十五。約率，圓徑七，周二十二。又設開差　，開差位，兼以正圓參之，括要精密，算氏之最者也。所著之書，名曰綴術，學官莫能究其深奧，是故廢而不理」。他所得的密率比值，一三分之三五五，用起來很方便。這數值德人奧圖（Valentinus　Otto）於一五七三年才提出來，兩人相比，祖氏的要早上一千一百年。可惜祖氏的證法久已失傳。

祖冲的兒子祖暅之，也精通數學。他用劉徽的割圓術繼續推算，求得圓周率爲三．一四一六。他並曾推求圓球的體積，假定一個圓球容於一立方體內，切成「合蓋形」推算，再用四與圓周率的比例關係，求得圓球體積爲圓周率乘直徑立方的六分之一，結果與希臘人所得的完全相同。

孫子算經　孫子著孫子算經三卷，隨書經籍志作二卷。孫子是什麼時候的人，已不可考。清戴震因爲書中有長安洛陽相去，及佛書二十九章等字樣，斷定他是漢明帝以後的人。書裏講籌位，詳細說明縱橫布算的方法。九九則始九九終一一。下卷記有「物不知數」問題，是前此在別處所未曾提到的，也是後世大衍求一術的根源。在古數學書中，除掉周髀算經與九章算術以外，要算孫子算經爲最古。

張丘建算經　張丘建所在的時代也不詳，大概是在孫子之後而在夏侯陽之前。宋傳本有張丘建算經三卷。他的百鷄術一題，一問三答，從古以來，幾乎是家喻戶曉的。這題是一個三元一次不定方程式，除九章算術方程章裏的「五家共井」一題略微相近，可說是我國最早講不定方程式一問數答的題目。書中講述的分數除法以及平面形和高線成比例兩點，也是前人所未論及的。此外，書中還列有兩個一元二次方程式的題目。

夏侯陽算經　夏侯陽著夏侯陽算經二卷。現在所行的本子是韓延傳下來的，書裏面加入他自已的意見，序文大概也是他作的。戴震認爲韓延是隋朝初年的人，是則夏侯陽當較韓延爲早。書中所記的演算，與古時候的略有不同，定位法用不同的名稱後來楊輝的乘除通變算寶與李治的益古演段，差不多都是根據他的說法。又，書中所引的十乘加一等，百乘加二等，十除退一等，百除退二等等說法，含有正負指數的意思。唐李淳風所注的海島算經裏說退位一等，退位二等，大概就是根據這一點，另外，對於四不等田的面積，他用二鄰邊之和之半與其他二鄰邊之和之半的乘積去計算，這法子和古埃及與希臘所用的算法一樣。

算經十書　算經十書是我國古代書名算學書的總稱，因爲這些書在數學方面的價值很高，所以把它們崇之爲經，算經十書所包括的是那些書，各朝所指的不完全相同。後周甄鸞是最早撰注算經的人，他所注的是九章、周髀、紀遺、孫子、五曹、五經、張丘建、夏侯陽、三等數、與海島算經等十種。我國古代的算學著作，經過他這次的注述，形式才算肯定。他自已並著有甄鸞算術一書，有人說五經算經也是他撰著的。

算經十書在唐朝所學的是九章，周髀、孫子、

文化溝通，不時受到新的刺激，新的影響，我國的數學，或已有較大的成就。明清兩代間的西算輸入，刺激、充實、並刷新了我國古老的數學，就是他山之石可以攻錯的例證。

現在，無可否認諱言地，我們的數學教育完全採用了外來的制度與教材，這舉措應是正確的。由於長期地抛了錨，我國舊有的數學實在太古老了。時至今日，世界的文明是全人類共同創造出來的，如果是好的，大家就一致採用；不好的，大家就設法改進或棄去。我們既不因爲不冠袍帶履而說我們忘本。我們當然也不該說放下自已的數學而說我們不長進。我們儘可以把既往作爲鑒戒，但我們必得向前看努力於最新科學的研究。我們有能力，有光榮的歷史，只要我們做，我們定可以做得到並做得好。

（本文節自"中國學史論集"原作者：：管公度 林致平）

四色問題

去年夏天，全世界的數學家們起了一陣騷動，因爲百多年來懸疑未決的四色問題被美國伊利諾大學的兩位數學家阿倍爾（K. Appel）及哈根（W. Haken）解決了。

在彩色的地圖上或中學生的地理作業簿裏，我們總是習慣地把相鄰的兩區，塗以不相同的兩種顏色，雖然世界上有一百多個國家，但根據經驗，我們知道只要幾種顏色就夠了。那麼最少要幾種呢？四色問題就是針對這個問題而給的一個臆測。它說：任意分區地圖，無論在平面上或在球面上，只要四種顏色就夠了。但在這裏我們規定⑴任何一個地區都必須是連結的（connected）。⑵如果兩區只有有限點相交，則不算相鄰。

這個問題誰最首先提出的？沒人知道。最早有記錄可尋的是一八五二年十月廿三日，英國數學家摩根（A. demorgan）給愛爾蘭數學家漢米頓（W. Hamilton）的一封信上。一九五〇年代德國數學家赫希（H. Heesch）提出一套放電理論（放電只是比擬，與電學無關。）來討論這個問題。有一次赫希在德國基爾（Kiel）大學的討論會上談他的方法，那時還是學生的哈根也在坐，他聽聽得津津有味，從此決定了鑽研四色問題。

經過了十幾年的努力，哈根在這方面並沒有長足的進展，一九七二年五月，哈根在伊利諾大學的一個討論會上談到四色問題非靠計算機不可，也談到計算機可能會遭遇到的種種困難。最後又表示雖然知道困難所在，但實際上也不知道怎樣克服這些困難云云。此時聽衆之一的邏輯學家阿倍爾舉手說他相信計算機可以解決問題！而且志願與哈根合作，經過四年的努力，他們終於發明了一套解決各種困難的方法。一九七六年六月，一切就緒了，他們使用1,500小時計算機時間，來協助證明了四色定理：

〔註：詳情請參考科學月刊65年12月號及66年1月號，或數學傳播第一卷，第四期「淺談四色定理」〕。

✦ 編輯小組 ✦

是否是否 是否是否是否是否是否是否是否是否 是否是否是否是

吊爾反爾

編輯小組

YESNO YESNO YESNO YESNO YESNO YESNO YE

數學和邏輯的關聯是衆人皆知的，事實上，我們一直嚐試指出的重點之一就是：人人都能研究數學，只要他能做邏輯的推理。此敍述的相反～學過數學的人就能做邏輯的推理～却處處被證明爲不確的。數學家談論政治起來，簡直有辱他所受的教育～眞是令人悲哀的事情。有人抓住微不足道的事實，拿來證明「國家衞生服務處」（National Health Service）的整個構想錯了。左翼分子也經常想經由辯論使人信服蘇俄政權所做的一切事都是對的。教育學家早已放棄希望將數學中的基本思考習慣用在其它方面。當然，這種轉移也並非不常發生。我們最好的法官之一就曾是一個數學家。但一般而言，數學的訓練並不像邏輯的訓練那樣有用。現在我們要看看邏輯本身是否永遠可信！

公元前六世紀，一個克里特的著名詩人和預言家Epimenides 曾經說過：「所有克里特（Crete）人都是說謊者」，我們看看能從話中推演出什麼來，首先將其寫爲下面形式：「克里特人說的任何話都是錯的。」

Epimenides 說了這句，而他自己是克里特人，故所有他說的話都是錯的。特別是他所說的「克里特人說的任何話都是錯的」也是錯的，換句話說，克里特人講的話並不是都錯的！我們怎麼辦？

要看清楚到底是怎麼回事，最好把上面的推論寫爲：

(1)克里特人說的任何話都是錯的；

(2)(1)中的話就是克里特人說的。

(3)故(1)是錯的；

(4)故克里特人說的話並不都是錯的。

所以

(1)和(4)不得同時爲眞。但我們由(4)導出(1)用的是一般的邏輯過程，結果敍述(1)却自相矛盾。

讀者也許聽說過：「有個鄉村的理髮師宣稱，他替村中所有不自己刮臉的人刮臉，而他是村中唯一的理髮師。」這個敍述看來沒什麼好挑剔的，直到我們問：「誰替理髮師刮臉？」

如果他不自己刮臉，他便成了村中不自己刮臉人之一，因而得讓理髮師替他刮臉，卽他自己。但如果他刮了自己的臉，自然而然又成了村中不接受理髮師刮臉的人！

這一類的近代詭論，我們還有一個例子，考慮英語中的所有形容字，各字都有一定的意義。有些形容字其意義也適用於形容字本身；其它的則不然。例如「Short」（短的）是一個短字，「English」（英國的）是英國字，但French（法國的）並不是一個法國字。而「hyphenated」（以短横相連的）也不是一個以短横相連的字。

由於形容字的意義不是適用於它本身，就是不適用，我們因而可以將所有形容字分爲兩部份。一部份叫做「Autological（自我一致的）」，其意

義適用於自身。另一部份叫做「heterological（自我不一致的）」，其意義不適用於自身。以下用autological 與 heterological的中文意思來代替這兩個英文中的形容詞。我們現在有了兩種形容字，自我一致的或自我不一致的，任何形容字必須屬於這兩種形容字中的一種。

現在看看形容字「自我不一致」的結果如何。假如「自我不一致的」是「自我不一致的」，顯然這句話已表示它是自我一致的。故「自我不一致的」得是「自我一致的」！另一方面設「自我不一致的」爲自我一致的，則它又不是自我一致了，因而「自我不一致的」必須是自我不一致的！

我們可以想出更多這一類的例子，但我們已提出了足夠的例子證明就是純粹邏輯也會出毛病，而那些對邏輯沒有實際經驗的人，却老是對邏輯大加讚美。現在我們要研究方才所描述的各詭論的通性。前面所說的任何語句都是以某一集合的所有元素爲敍述對象，而語句或語句來源本身即是這個集合的元素。

爲了更精確地解釋我們的意思，讓我們就前述的詭論一一來討論：

在第一個詭論裏，我們遇到了語句「凡是克里特人講的話都是錯的」，因爲這也是克里特人講的話，所以它也是克里特人說的話所成集合的一份子。

在鄉村理髮師的例子當中，我們所論的是村中所有人的集合，不論他們是否自己刮鬍子。理髮師顯然也是這集合中的一份子。最後，我們看第三個詭論，所有形容字的集合，不論自我一致或自我不一致，顯然包含了形容字「自我不一致」。

當一個語句係針對某一集合的全部元素來做敍述，語句本身或語句的來源也是這集合中的一份子時，謬誤的循環便難免因此而產生了。早在1906年羅素（Bertrand Russel）便因嚐試打穩邏輯的根基而發明了「邏輯型式」（Logical types）的理論。羅素指出邏輯的實體並非只有一種型式，而是分成許多很不相同的型式，雖然它們看起來很相似。這位邏輯學家指出，敍述一個物件集合的所有份子和敍述物件本身並不屬於同一種型。

舉例來說，拿「克里特人說的話都是錯的」這語句來看，這語句中所指的語句是用來敍述事情的。可是它自己却不是敍述事情的，而是敍述「敍述事情的語句」的。因此它是另一種邏輯型式的語句，我們可以判定這語句不能用來敍述它自己。這就避免一個矛盾的例子。可是在集合論中，還有其它根深蒂固的困難。曾有一個時候，羅素甚至嚐試建立不用集合觀念的邏輯。

羅素有一個最著名的詭論，是關於一群集合，集合本身爲（或不爲）集合中的一個元素。我們很容易看出一個集合必定是這兩種內的一種。例如，所有人的集合並不是一個人，然而所有概念的集合仍是一個概念，故也是所有概念的集合中的一份子。

因此我們可將所有集合分爲兩大類：集合本身亦爲集合中的一份子的所有集合叫做S，集合本身並不是集合中一份子的所有集合叫做T。T既爲其本身並非集合中一份子的所有集合所形成的集合，故T本身亦是個集合。我們看看它有什麼性質？它是自己的一個元素，或者不是。若T是它自己的一份子，也就是說T的一份子，則它應是不爲集合本身一份子的集合之一。另一方面，如果T不是它自己的一份子，它應在集合T之內。但此敍述本身證明了T爲本身的一份子。我們已知任何集合不屬S便屬T，可是若將這個敍述用在集合S，T本身就發生矛盾。

羅素詭論與近代數學的發展息息相關。事實上，它在數學界裏曾引起了劇烈的風波。在此之前，「所有集合的集合」這觀念常爲人輕易所用。這場風波打擊了許多數學家，其中之一爲Gottlob Frege。Gottlob Frege是一個德國人，曾下了許多年的工夫欲將數學建立在邏輯的基礎上。他主要的成就，即是兩册研究算術基礎的論著，其中他使用了「所有集合之集合」的觀念。1903年，當第二册正要出版的當兒，羅素將我們方才提到的詭論寄給了Frege，在Frege的第二册著作中有這樣的介紹：

「一個科學家再也碰不上比這更爲令人不悅的事情：有人把他即將完成的著作摧毀殆盡，本書正將付梓時，竟然也被羅素先生的一封信如此的擺佈了。」

Frege的人格在數學史上是很出名的，因爲數學家很不容易了解自己的錯誤，更不情願在著作上承認錯誤。然而令人感到高興的，他的成就並未完全作廢，今日他的聲譽依然佔有相當高的位置。

Cantor 是另一個受到羅素與其它詭論顯著影響的數學家。他一手建立的壯麗而雄偉的結構，今日仍然無瑕疵的屹立無恙，那陣曾經搖動過它的巨變不曾給他帶來顯見的損傷。

羅素因他在數學基礎方面的成就而聞名，他勇敢的嚐試證明數學與邏輯爲一，並且深信整個純粹數學可以由邏輯導出。我們現在敍述兩個觀念，它們在數學中很基本，但難以說屬於邏輯。

(1)歸納原理（The Principle of Induction）這可以敍述如下：「假如一性質對1爲眞，而且證得若對n爲眞，則對$n+1$爲眞，那麼它對所有正整數皆爲眞。」

我們在前面曾用過此原理，它構成了許多證明的基礎。一個定理要證明對任意n爲眞，只需從1開始一步一步的證到n，因此讀者會奇怪它爲什麼叫做原理（Principle）？這是因爲上面的證法只能對一定的n使用，我們無法用它證明對所有n都爲眞。所以得用上一個假設，即如此原理中所述的。

(2)Zermelo 選擇公設（Zermelo's axiom of Choice）

廿世紀初，Zermelo指出許多證明都靠着從一已知集合中〝選〞出一元素的可能性而成立。例如在前面我們直覺的說明無窮幾何級數的和的觀念～不停的平分一段線段，「選擇」其中一半去掉。此例中的「選擇」並沒有什麼困難，我們所選的總是左邊的線段。但是我們即將看到，事情並非永遠如此的單純。有些時候非用到選擇公設不可。首先我們把這個公設的正式敍述寫出來：

「選擇公設」：若S爲由一族不相交且非空的集合S_i所組成，則存在一集合R，其元素由諸S_i中各取一而得。

「不相交」（Disjoint）集合，意指沒有共同元素的集合。設集合S由英格蘭的郡縣所組成，S_i各由這些郡縣的公共建築組成。那麼我們能找到一集合R，其元素由各郡縣各選一公共建築而得。我們可以指定選取各郡縣中最古老的公共建築。但當我們不明確的指定此元素，或者因某種原因無法明確地指定此元素，或者該集合族的元素有無限多個時，事情就不是那麼簡單了。舉例來看，想像有一個世界，其中存在着無窮多雙鞋子，是否有一個集合R，由每一雙鞋選一隻鞋子組成？

我們可以回答有，因爲這隻鞋可定義爲：每雙鞋左邊的那一隻。但是假使這想像的世界也包含有無限多雙襪子。在此情形之下，有沒一個相當的集合R存在呢？不幸襪子製造時是不分左右的，所以我們無法由各雙襪子選一隻出來定義一個集合R。

我們可以不管這些缺陷，仍然認爲應當假設這樣的一個集合的確存在；如此做就得用到選擇公設，然而在方才「鞋」的例子當中，並不需要訴諸此公設。

羅素在他1937年出版的「數學原理」（Principles of Mathematics）的序文說：

沒有人知道選擇公設是否是對的，我們很容易想像一個使此公設爲眞的世界，我們不可能證明有某種世界存在使得選擇公設是錯的，但我們也不可能（至少我如此相信）證明這樣的世界絕對不存在。起初我不明白這公設的重要性，直到「數學原理」出版了一年以後。我的觀念才改變，就這件事情使得這本書因而含有某些錯誤。

Poincaré 是法國偉大的數學家，他一開始就對從邏輯獨導數學的嚐試抱着輕蔑的態度。Poincaré 不僅是偉大的數學家，也是筆調惧人尖酸刻薄的作家，並且不怕（不像許多數學家）說出想說的話。他的名著「科學與方法」（Science & Method）裡有毀滅性的批評，攻擊那些認爲整個數學可從邏輯導出的人。此書的Nelson 版附有一篇羅素所寫的很謹愼、保守的序。

我們現在簡單的描述一下其它學派對數學基礎的想法。上述的學派，即Frege ～ Russel 學派，常稱爲「邏輯主義派」（School of Logisticism）。另外還有兩派：「直覺主義派」（School of Intuitionism）與「形式主義派」（School of Formalism）。

直覺主義遠溯到Kronecker（1823～1891），他堅持數學是基於「直覺產生」的自然數而創造的，Kronecker 努力將一切數學的事物化爲數論的形式，這可以從1886年他在柏林一個會議上所說的一句著名的話得到說明：「Die ganzen Zahlen hat der Liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk」。（上帝創造了整數，整數以外都是人爲的工作）。

今日持這個觀點的最偉大的代表人物是荷蘭數

學家 Brouwer 。直覺主義最强烈的特點是所謂「自足性」(Self-Sufficiency)。一點兒都不依賴其它的哲學或邏輯。它的基本概念由「直覺」(intuition)而來，這有點像康德(Kant)的時間直覺(非空間直覺)。明確的說直覺主義認爲個人有能力進行一系列心智活動，先是第一活動，然後另一個，再另一個等等。以這種方式吾人可以得到「基本序列」(fundamental series)，其中最著名的例子便是自然數的數列。

這一個步驟和語言的使用無關，數學裏之所以使用符號，也使用日常語言，主要是爲了做思想上的交換，但這就是符號在數學上唯一的作用。他們這種態度像是將數學在實質上當作了人的活動，而非有組織的或文化整體的活動。另外也可能他們强調數學基礎得從語言的影響中解放。

直覺主義，其邏輯之最有趣，最驚人的觀點之一是拒絕接受排中律及其結果。我們曾在第四章與其它章中用到它，即對命題P來說，其反命題的反命題仍然爲P，換句話說，負負得正，用符號寫就是：

$$(P')' = P$$

這個定律在平常的數學中受到廣泛的使用，證明定理的方法之一是：首先假設定理爲僞，再證明這個假設導致矛盾，如此定理便證明了。任何導致矛盾的命題必是錯的。故若假設定理爲僞，則由前述的原理(P的反命題的反命題爲P)此定理爲眞。所有用歸謬法的證明都是這一個型式。

直覺主義者不接受這一類證明。他們接受一個原理：任何蘊涵了矛盾的命題必定是錯的，但這並不是排中律($(P')' = P$)。因此近代數學許多成果都爲Brouwer學派所否認，但有爲數相當多的定理用他們的方法重新證過。數學分析中能用實際計算方法建立的那些部分，一般而言，都可以在直覺派數學中發現。

一命題非眞即僞，這是排中律所蘊涵的意思，它已得到了廣泛的承認，此地我們舉一個至目前爲止尚不能判定是非的命題做爲例子：

一數N定義如下：「N爲滿足$0 \leqq N \leqslant 1$的一個數。寫成小數形式，記它的小數點後第n位數字，a_n爲0,但是如果在π之小數部份的第n位數字爲連續七個「7」，～7777777～中的頭一個7，此時記a_n爲1。」

假如N以此法定義：我們不能說是否$N=$零，因爲我們無法知道π經過小數展開以後是否確有連續七個「7」存在。因此我們不能證明$N=$零，也不能證明$N \neq$零。當然將來這兩個情形中的一個可能會得到證明。

直覺主義者深信語言和符號不是數學的根基。與直覺主義成强烈對比的是形式主義。形式主義者深信符號，符號間的運算構成數學的重心。要解釋形式主義的觀點，我們必須追溯Hilbert 早期在數學公設方面的成就。

我們可以在幾何中選一組公設爲基礎，發展歐幾里得幾何。公設是一個我們接受，但不嘗試做證明的命題。現在我們希望選出的公設都是互相獨立的，以免一個公設可以從其它公設導出，此外有一件事情也很重要，就是說，由諸公設導出的諸事實不能矛盾！我們要求由一組公設建立起來的數學應該沒有矛盾。舉例言之，假設我們討論的是某些未定義稱做點和線的東西，由某一個公設推論得一線不得含兩個以上的點，但由另外幾個公設推論得，確有一包含三點的線存在，這就不是我們所高興見到的事。

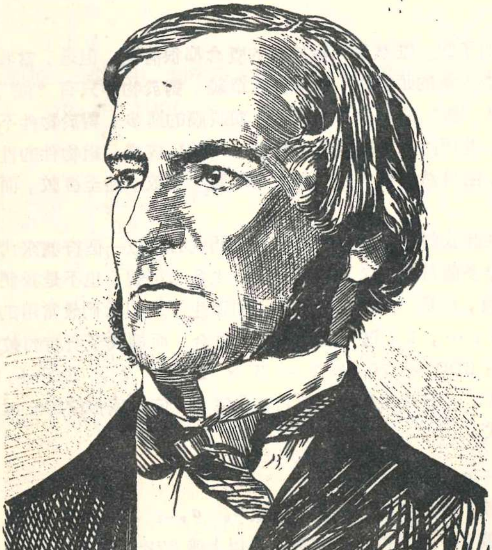
總而言之，我們首先要求：公設必須互相獨立，不但實用而且有美學上的價值。實用與美在數學中緊密的湊合在一起。要證明一組公設免於矛盾，通常不是個容易的問題。證明方法之一爲尋找一套滿足這組基本公設現成數學體系。若數學體系本身毫無矛盾，那麼這些基本公設也同樣的沒矛盾。這樣一套數學體系就稱爲這組公設的「模型(Model)」。但是要證明已知的數學模型(例如實數的算術)，免於矛盾實在不易。就實數的算術這個例子言之，這樣的證明就還不曾完成！故以公設爲根基建立數學並不能克服所有的困難。

爲了應付這些困難，Hilbert 決定將公設的方法和邏輯的方法聯合起來。建立了所謂「後設數學」(Metamath-ematics)。後設數學討論一般數學的證明，證明本身形成了研究的主題。任何數學理論當中只有某些證明的方法是可行的，假若我們能證明任何式子不和與其意義相反的式子同時由此證明方法產生，則此數學體系就稱爲不矛盾的數學體系。

對於某些基本的數學體系,「相容性」(Consistency)的證明已成功的完成。例如,有關整數的某一套基本公設系統已經過了證明爲相容的。不過它尚未被拓展到整數的全部算術系統。然而 Hilbert 的整數計劃是否可行却由於Goedel 的研究而顯得很可疑。Goedel 的結果刋載於1931年,內容大略爲說明在任何廣泛的系統~廣泛得容下所有形式化後的基本數論的所有公式~之中,總有一些定理(或公式)不能證明爲是,也不能證明爲非。

我們大概已講了足夠多的東西說明數學基礎是一門不可缺少,正在發展之中的科目,雖然數學家們所創造的數學並沒有經過證明爲毫無矛盾,多數數學家都會十分快樂地進行他們的研究,一點也不以爲有一天整個富麗文化的雄偉建築會坍壓在他們身上。我們也許可以這麼說,研究數學基礎的數學家對數學基礎裏有數學味道的問題比較有興趣,數學基礎裏如何採用適用邏輯的問題比較不感興趣。

〔本文節自邵重鋼譯:The Gonerol Art of Mathematics 〕



喬治・布耳

✦今天,不僅在數理邏輯的書上可找到布爾的大名,在有關代數、格子理論(latlice theory)、機率論和情報理論(information theory),還有關於集合論的出版刋物等書籍裏,「布氏代數」四個字也是屢見不鮮的,僅僅廿世紀這個時候,就可到處見布氏形式主義的豐饒、富庶。

數學

0和1的世界

呂玉琴

數學的開始，起因於人類計算物件時，發明了數。雖然我們對於數的概念都很清楚。但是，當我們回過頭來看它形成的過程，卻是很慢的。在最古老人類的頭腦中，思想非常單純，對於物件只有“有”和“無”的概念，而沒有“量”的概念，更談不上抽象“數”的概念了。隨著人類頭腦的進步，對於物件不僅能判斷其“有”“無”，更能意識到其量的多寡，進而由於實際生活的需要，“數”成爲一組物件的性質之一，因而開始接受“數”的抽象觀念。漸漸地，由自然數擴大到整數，有理數、實數，甚至複數，而有今日輝煌的數學體系。

一旦“數”的概念形成後，對於每一個數（在此我們只討論自然數），我們就必須以一個符號來代表它，由於“數”有無限多個，而我們卻無法造出那麼多個符號來代表它，同時，太多的符號，也不是我們的記憶所能負擔的，因此就必須重覆的使用某些符號，於是“進位法”就隨之而產生了。以我們最常用的十進法，即“逢十進一”來說，它是由「0，1，2，…，9」這十個符號重覆組合，而構成了所有的數。例如“三百七十二”這個數，記成 372，它是由 $300+70+2=3\times10^2+7\times10^1+2$ 所形成的。在這裏，最重要的是，數字符號3，7，2的意義是決定於它在百位、十位，或個位的位置。同理，我們可以將任一個自然數 z 寫成如下的形式：

$$z=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_1\times10+a_0$$

其中 a_n，a_{n-1}，…，a_0 都是0到9這十個整數。於是 z 可以用縮寫符號 $a_n\ a_{n-1}\ \cdots\ a_0$ 來表示。我們可以注意到係數 a_0，a_1，…，a_n 都是 z 連續被10除所得來的餘數，再以上述372這個數爲例：

$$\begin{array}{rrl} 10\,\underline{)\ 372} & & \text{餘數} \\ 10\,\underline{)\ 37} & \cdots & 2 \\ 10\,\underline{)\ 3} & \cdots & 7 \\ 0 & \cdots & 3 \end{array}$$

雖然今日在數學的計算上，大都採用十進法，一般稱作“以十爲底”，但是以“十”作爲底數，並非是必要的，只要任何大於1的數，都可以被用來當作底數，如果我們選擇 x 當作底數，則如同以“十”爲底的情形，任一個自然數 z，同樣也可以表成：

$$z=b_m\times x^m+b_{m-1}\times x^{m-1}+\cdots+b_1\times x+b_0$$

的形式，這裏的 b_0，b_1，…，b_m 便是 z 連續被 x 除所得來的餘數，所以 b_0，b_1，…，b_m 就只能是0到 $x-1$ 這 x 個整數了。由於記數法不一定以十爲底，在此，我們定義 372，這符號表示 $3\times8^2+7\times8$

十2這個數，右下角的中文字表示底數，3、7、2這三個數表其係數，那麼$3\times 10^2+7\times 10+2$記成$372_{十}$，以此來分辨不同的底數，（當然，這些係數都必須是大於或等於零，而小於底數的整數）於是：

$$372_{八} = 3\times 8^2 + 7\times 8 + 2 = 250_{十}$$

$$372_{十} = 5\times 8^2 + 6\times 8 + 4 = 564_{八}$$

$$\begin{array}{rll} 8\,\underline{)\,372} & & \text{餘數} \\ 8\,\underline{)\,46} & \cdots 4 & \\ 8\,\underline{)\,5} & \cdots 6 & \\ 0 & \cdots 5 & \end{array}$$

從上述理論觀點來看，以“二”爲底數的進位系統，是底數最小的進位系統。在此二進法中，僅需要0與1這二個數字，就可以把所有的數，都用這二個符號的組合來表示，進而我們定義在二進法系統中，加法與乘法的運算如下：

加法

+	0	1
0	0	1
1	1	10

乘法

·	0	1
0	0	0
1	0	1

並且將說明在二進法中，加法與乘法，亦可如同在十進法中一樣的運算自如：

$$35_{十} = 100011_{二}$$

$$10_{十} = 1010_{二}$$

$$\begin{array}{rll} 2\,\underline{)\,35} & & \text{餘數} \\ 2\,\underline{)\,17} & \cdots 1 & \\ 2\,\underline{)\,8} & \cdots 1 & \\ 2\,\underline{)\,4} & \cdots 0 & \\ 2\,\underline{)\,2} & \cdots 0 & \\ 2\,\underline{)\,1} & \cdots 0 & \\ 0 & \cdots 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{rll} 2\,\underline{)\,10} & & \text{餘數} \\ 2\,\underline{)\,5} & \cdots 0 & \\ 2\,\underline{)\,2} & \cdots 1 & \\ 2\,\underline{)\,1} & \cdots 0 & \\ 0 & \cdots 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 35_{十} + 10_{十} &= 100011_{二} + 1010_{二} \\ &= 101101_{二} = 45_{十} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 100011 \\ +\quad 1010 \\ \hline 101101 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 35_{十} \times 10_{十} &= 100011_{二} \times 1010_{二} \\ &= 101011110 = 350_{十} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 100011 \\ \times\quad 1010 \\ \hline 1000110 \\ 1000110 \\ \hline 101011110 \end{array}$$

由上面的例子，我們可以看出，僅由0與1這二個符號所構成的二進法，亦可以在加法和乘法的運算下，達到與十進法相同的目的。此二進法，係十七世紀末期的大數學家，萊布尼茲（Gottfried Wilhem

Leibniz　1646 ～ 1716 ）所發現的。如果我們再往前一步，1與0這二個符號，不正是人類最初的兩個概念“有”和“無”嗎？雖然“有”和“無”是兩個最單純的概念，卻包含了每一個數，並且能夠很圓滿的達成其運算，引出了整個數系的全貌，Laplace 曾說：「在他（萊布尼兹）的二元算術裏，萊布尼兹看到了宇宙創始的形象，他設想1代表上帝，0表虛無，上帝從虛無創造了萬物，正如在他的計算體系中，1和0能表示所有的數一樣。」

在數學領域中的另一基本要素是嚴密的邏輯推論，爲了澄清亞里斯多德艱難的論理學，英國的喬治布耳（Gorge　Boole　1813 ～ 1864）建立了記號論理學，這個系統，是用邏輯上的定律，來定義一個抽象的代數，也就是一般所謂的布耳代數（Boolean　Algebra　）。我們先敍述下列幾個邏輯定律：

1. Idempotent　Laws　（　等律）

(a)　$P \vee P \equiv P$　　(b)　$P \wedge P \equiv P$

2. Commutative　Laws（交換律）

(a)　$P \vee Q \equiv Q \vee P$　　(b)　$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$

3. Associative　Laws（結合律）

(a)　$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$

(b)　$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$

4. Distributive　Laws（分配律）

(a)　$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

(b)　$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

5. Identity　Laws　（本位律）

(a)　$P \vee F \equiv P$　　(b)　$P \wedge T \equiv P$

(c)　$P \vee T \equiv T$　　(d)　$P \wedge F \equiv F$

6. Complement　Laws（互除律）

(a)　$P \vee (\sim P) \equiv T$　　(b)　$P \wedge (\sim P) \equiv F$

(c)　$\sim(\sim P) \equiv P$　　(d)　$\sim T \equiv F$，$\sim F \equiv T$

7. Demorgan's　Laws（棣摩更律）

(a)　$\sim(P \vee Q) \equiv (\sim P) \wedge (\sim Q)$　　(b)　$\sim(P \wedge Q) \equiv (\sim P) \vee (\sim Q)$

如果我們以“1”表敍述爲眞，“0”表敍述爲假，而以“·”表“$\wedge$”，“十”表“V”，由邏輯推論的定律，我們可以得到下列的運算表：

＋	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

同時更可進一步的推得，對於任意a，b，$c \in \{0, 1\}$滿足：

1. Idempotent　Laws

(a)　$a + a = a$　　(b)　$a \cdot a = a$

2. Commutative　Laws

(a)　$a + b = b + a$　　(b)　$a \cdot b = b \cdot a$

3. Associative　Laws

(a)　$(a + b) + c = a + (b + c)$

(b)　$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

4. Distributive　Laws

(a)　$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (b + c)$

(b) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

5. Identity Laws

(a) $a + 0 = a$ (b) $a \cdot 0 = 0$

(c) $a + 1 = 1$ (d) $a \cdot 1 = a$

6. Complement Laws：對於任何 $a \in \{0, 1\}$，存在 $a' \in \{0, 1\}$，使得

(a) $a + a' = 1$ (b) $a \cdot a' = 0$

即 $0' = 1$，$1' = 0$

7. Demorgan's Laws

(a) $(a+b)' = a' \cdot b'$ (b) $(a \cdot b)' = a' + b'$

有了這些運算的基本定律，就可以把一個敘述翻譯成〝0〞與〝1〞這二個符號，配上上述的運算原則，而提供了演繹推理的結果，布耳代數幫助我們解決了許多複雜的邏輯推理，這個概念今日正被廣泛的應用在邏輯電路，與電子計算機的設計上。

在科學一日千里的今天，電子計算機憑著可以快速處理繁雜的計算與演繹推理，而成為廿世紀的時代寵兒。但是電子計算機的設計與運算特性，不外乎是演繹推理，二進位算術及邏輯電路。正由於電子計算機是由電路的開與關來操縱，因此這部機器就如同古老人類一樣，只能接受〝有〞與〝無〞（即〝1〞與0）這兩個最基本的概念，但是它卻能夠解決許多複雜的問題，這最主要的原因是由於〝一個數系〞和〝嚴密的邏輯推理〞便足以用來處理自然界所發生的問題，其處理的方法，不外乎是先將實際問題轉化成數學模式，再運用數學的演算過程，而得到答案後，再回到原來的實際問題，其中所用的數學演算過程，便是靠數系和邏輯推理來完成的，數學也就是由這二個系統所發展出來的，而這二個系統的構成元素便是〝0〞和〝1〞。因此，整個數學領域就是一個〝0〞和〝1〞的世界。

參考資料：布林代數與其應用 彭源昌 陳弘毅 譯

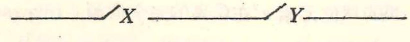
布林代數淺說 彭源昌 譯

數學是什麼 吳英格 余文能 劉政 譯

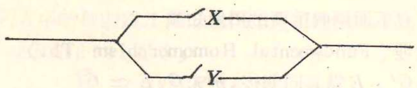
數學漫談 傅溥 譯

邏 輯 電 路 圖

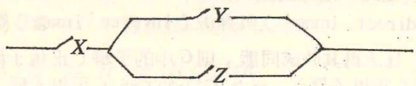
$X \cdot Y$ (1)



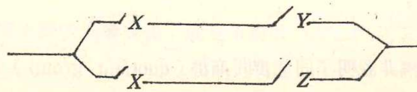
$X + Y$ (2)

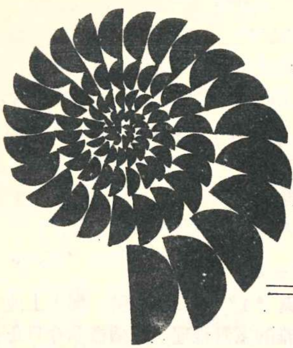


$X \cdot (Y + Z)$ (3)



$X + (Y \cdot Z)$ (4)





關於 “群” (group) 的同構定理

許清土

關於“群”(group)的同構定理(Isomorphism Theorem)

“群”是只有一種結合法的代數系，是近世代數學中最基本的概念，在應用上也甚爲廣泛，成爲研究“環”(ring)與體(field)的基礎。

而在這裏，我們所要敍述的，只就群的同構關係加以描述，進而研究存在於其中的三個重要的同構定理。實際上，“同構關係”不僅在群中可以討論，即使在具有更多種結合法的代數系裏也存在著，所以在應用上也非常之廣。

首先，必須敍述下面幾個有關的“名詞”：

(1)同態(homomorphism)：

假如G，G'爲兩個群，若存在某一函數f：$G\to G'$使得對G中任意兩個元素a，b，

$$f(ab)=f(a)f(b)$$

則函數f便是從G映至G'的同態。

(2)$G\sim G'$：

若(1)中所述之f爲一映成函數，則G與G'間之同態關係用$G\sim G'$表示。

(3)同構(isomorphism)：

若(2)中所述之f又爲－1－1函數，則f就是G與G'的一同構，而G與G'間的關係以$G\simeq G'$表示。

(4)同態核(kernel)：

上述(1)中G'裏的單位元素e'在G裏的完全像源(inverse image)就是這種同態關係的同態核。

此外，且須有下面兩個重要的預備知識：

①同態的基本定理(Fundamental Homomorphism Th.)

假設$G\sim G'$，E爲其同態核，那末$G/E\simeq G'$

※下述之定理皆是此一定理的應用※

②同態群的像(direct image)與像源(inverse image)關係：

設$G\sim G'$且f爲其映成同態，則G中的子群(正規子群 normal subgroup)在G'中的像也是G'中的子群(正規子群)。反之,G'中的子群(正規子群)的完全像源也是G的子群(正規子群)。

下面所述的定理，無非說明了同態群間商群(quotient group)的同構關係，是所謂的“第一同構定

理：

【定　理】設$G \sim G'$，且H' 是G' 的正規子群，若H是H' 在G中的完全像源，那末$G/H \simeq G'/H'$

證明：無疑地，H必然是G中的正規子群，因爲$G \sim G'$，而且$G' \sim G'/H'$（此爲一自然同態—— natural onto mapping）。

所以 $$G \sim G'/H'$$

但，G'/H'的單位元素H'在G'中的完全像源亦即H'本身，由假設，H' 在G中 的完全像源爲H，也就是G與G'/H' 的同態核是H。由同態基本定理

$$G/H \simeq G'/H'$$

定理中的H'是已知的正規子群，而後求得與其在G中的完全像源之同構關係。看了這定理之後，很容易的使我們聯想到下面的問題：即〝定理改爲H是已知G中的正規子群，而後求得與其在G'中的像之同構關係，那麼上述第一同構定理是否仍然成立〞。答案是否定的。不過，我們可以肯定的是它們之間的同態關係仍舊維持著。i.e. $G/H \sim G'/H'$

假如$G \sim G'$，E爲其同態核G的子群H在G'的像爲H'，K是H'在G中的完全像源。而我們現在要考慮的也就是K是否等於H。其實促使上述定理無法仍然成立的主要癥結就在於K未必就是H了。當然，如果恰巧$K=H$，那麼定理卽可成立。不過$K=HE$ 是同態關係所產生的必然現象。因爲HE的像是H'

$$\therefore \quad HE \subseteq K \quad \cdots\cdots(1)$$

反之，$\forall k \in K$與某$h \in H$在G'中必有相同的像。因此$h^{-1}k$的像必定是G'中的單位元素（identity）於是$h^{-1}k \in E$，i.e. $k \in hE$，故$K \subseteq HE$ ……(2)

由(1)，(2) $$K = HE$$

至此，我們立卽得知只要$E \subseteq H$，自然$K=H$，因此定理也就仍然有其存在價值。

《例》設$Z \to Z_6$由$k \to [k]$所定義，其中$k \in Z$，則顯然地$Z \sim Z_6$，且Z_e的像爲

$$\{[0],[2],[4]\} = Z_e'$$

且同態核爲Z_e之子集，故根據第一同構定理$Z/Z_e \simeq Z_6/Z_e'$

由此亦可推知$\{Z_e, Z_0\}$實爲Z的一分割（partition）。

【定　理】設K是群G的正規子群，H是G的子群，則$HK/K \simeq H/H \cap K$

證明：因爲$G \sim G/K$，而H在G/K中的像卽爲H/K，以$\overline{H}$表之，則$H \sim \overline{H}$，而且同態核是$H \cap K$（由預備知識(2)，可知$H \cap K$ 是H的正規子群）。

由同態基本定理： $$\overline{H} \simeq H/H \cap K$$

再者，$G \sim G/K$ 的同態核是K，故$\overline{H}$在G中的完全像源就是HK了（由預備知識(2)，可確定HK是G的子群），於是$HK \sim \overline{H}$，再根據同態基本定理

$$HK/K \simeq \overline{H} \simeq H/H \cap K$$

顯然地，這定理乃在於敍述兩個子群的同構關係，就是所謂的〝第二同構定理〞。

《 例 》由本定理，不難知道$(20)/(140) \simeq Z_7$

因爲 $(20) \cap (7) = (140)$ $(20) + (7) = (1) = Z$

$\therefore$ $(20)/(20) \cap (7) \simeq (20) + (7)/(7) = Z/(7) = Z_7$

如果繼續推廣到四個子群間的同構關係，便是"第三同構定理"

【定 理】設A，B爲群G的子群，A^*爲A的正規子群，B^*爲B的正規子群，則

$$A^*(A \cap B)/A^*(A \cap B^*) \simeq B^*(B \cap A)/B^*(B \cap A^*)$$

證明：顯然地$(A \cap B^*)(B \cap A^*) \subseteq A \cap B$，因爲$B^*$是$B$的正規子群，$A \cap B$是$B$的子群，是故

$$A \cap B^* = A \cap B \cap B^*$$

成爲$A \cap B$的正規子群。

同理，$B \cap A^* = B \cap A \cap A^*$ 也成爲$A \cap B$的正規子群。

因此$(A \cap B^*)(B \cap A^*)$ 即是$A \cap B$的正規子群。

現在我們的目的是要證明

$$A^*(A \cap B)/A^*(A \cap B^*) \simeq A \cap B/(A \cap B^*)(B \cap A^*)$$

因A^*是A的正規子群，故$A^*(A \cap B)$成群。

如此，可令對應$a^*x \to x[(A \cap B^*)(B \cap A^*)]$，代表

$$A^*(A \cap B) \text{ 至 } A \cap B/(A \cap B^*)(B \cap A^*)$$

的映成同態。理由簡述如下：

1° 若$a_1^* x_1 = a_2^* x_2$

則$(a_2^*)^{-1} a_1^* = x_2 x_1{}^* \in A^* \cap (A \cap B) \subseteq A^* \cap B$

$\subseteq (A \cap B^*)(B \cap A^*)$

i.e. $x_2 x_1{}^{-1} \in (A \cap B^*)(B \cap A^*)$

$\therefore$ $x_2 \in x_1(A \cap B^*)(B \cap A^*)$

i.e. $x_1(A \cap B^*)(B \cap A^*) = x_2(A \cap B^*)(B \cap A^*)$

2° 這種對應顯然是映成（函數）。

3° $(a_1^* x_1)(a_2^* x_2) = a_1^* a_2^* x_1 x_2 = (a_1^* a_2^*) x_1 x_2$

所以，必然 $A^*(A \cap B) \sim A \cap B/(A \cap B^*)(B \cap A^*)$

再者，若設a^*x在$A \cap B/(A \cap B^*)(B \cap A^*)$中的像爲

e'（e'爲$A \cap B/(A \cap B^*)(B \cap A^*)$中的單位元素

i.e. $a^*x \to e'$ （實際上e'就是$(A \cap B^*)(B \cap A^*)$

顯然地， $x \in (A \cap B^*)(B \cap A^*)$

故 $a^*x \in A^*[(B \cap A^*)(A \cap B^*)] = A^*(A \cap B^*)$

相反的 $A \cap B^* \subseteq (A \cap B^*)(B \cap A^*)$

因此$A^*(A \cap B^*)$的任意元素在$A \cap B/(A \cap B^*)(B \cap A^*)$中的像就是

$e'[=(A \cap B^*)(B \cap A^*)]$ 了

至此：一方面證明了$A^*(A \cap B^*)$是$A^*(A \cap B)$的正規子群，一方面根據"同態基本定理"

又證明了 $A^*(A \cap B)/A^*(A \cap B^*) \simeq A \cap B/(A \cap B^*)(B \cap A^*)$

同理，將A, A^*分別改爲B, B^*。

我們又可證明 $B^*(B \cap A)/B^*(B \cap A^*) \simeq A \cap B/(A \cap B^*)(B \cap A^*)$

所以定理得證。

瞭解了這定理的內涵之後，直接便可知道〝第二同構定理〞確是〝第三同構定理〞的一個特例。因爲只要把後者的 B^* 看做是單由「單位元素構成的群」，再加上 $B \subseteq A$ 的條件，自然前者立即可由後者推導出來。

這三個定理，似乎漸次複雜，但道理實爲一貫，而且皆以〝同態基本定理〞爲預備定理。

最後在此必須說明的是：雖然上面所討論的〝同構〞是就〝群〞而言，其實在向量空間（veetor spece ）。

甚至在任何代數系（algebraic system)裏，〝同構關係〞的討論更成爲重要的課題。最簡單的，諸如將群中的正規子群，改爲環中的理想子環（ideal subring)，子群的積(product)改爲子環的和（sum)同樣地，上述的〝同構定理〞仍然存在於〝環〞中。

此篇乃是將〝群論〞裏的同構關係這部份加以系統整理而已，願提供給同學們作爲參考，更希望能藉此收〝拋磚引玉〞之效。

數學不討人喜歡？

數學之所以不討人喜歡，除了人爲的因素外，另一項更重要的原因恐怕就是；在數學遊戲中，一般人動不動就犯規，而且愈是賭氣；愈是容易被判出局。事實上，這只不過表示了在預設的情境中，數學的規矩較之一般學科來得峻嚴些罷了。因此，除非天性使然，否則〝不喜歡數學〞和〝不喜歡思考〞是近乎同義的。

Introduct to
M-injective modules

張維慧

在本篇中，R is an associative ring with identity and all R-modules are unitary (i.e. unital).

R-modules 之介紹：If R is any ring, not necessarily containing an identity element, and if $(M, +)$ is an additive abelian group then. M_R. is a right R-module in case there exists a mapping $(x,r) \to xr$, $x \in M$, $r \in R$ of $M \times R$ into M satisfing the following conditions:

(1) $(x+y)r = xr + yr$

(2) $x(r+s) = xr + xs \qquad (\forall x, y \in M,\ r, s \in R)$

(3) $x(rs) = (xr)s$

a left R-module $_RM$ is defined symmetrically.

If M is a right and left R-module, then M is a R-module.

unital：M_R is a unital module in case R contains an identity element 1, and $x1 = x \quad \forall x \in M$.

R-hom 之介紹：A mapping $f: M_R \to N_R$ is called R-homomorphism from M_R into N_R, if

① $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) \qquad \forall m_1\, m_2 \in M$

② $f(rm) = rf(m) \qquad \forall r \in R, \quad \forall m \in M$

我 們 都 知 道 ：

Definition 1 ： A right R-module Q_R is injective $\Leftrightarrow$ $\forall$ R-monomorphism f from a right R-module A into a right R-module B and $\forall$ R-homomorphism g from A into Q. $\exists$ an R-homomorphism h from B into Q, $\ni$ $h \circ f = g$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f", "\text{mono}"'] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, "h"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

我們可視A_R爲 B_R之一 submodule（因爲A_R is iso to a submodule $f(A)_R$ of B_R）所以一個right R-module Q_R 是否爲 injective 此與g是否可以extend R-homomorphism $h: B \to Q$ 的問題有關，（注意此處必須對於任一個 right R-module B_R 及 B_R的任一個 submodule A_R，任一個R-homomorphism g from A into Q 是否能被延拓到一個R-homomorphism h from B into Q）大體上說來，此與R是那類的環及Q_R 本身的性質有很密切的關係。

很自然地，我們會聯想到下面兩個問題：

(1)當B_R具有某些性質時（那些？）則由B_R之任一個submodule 映至Q_R 的 homomorphism 皆可被延拓到B_R。

例：B_R 爲completely reducible時，則任一個submodule A_R of B_R is a direct summand of B_R （i.e. $\exists$ a submodule C_R of $B_R \ni B_R = A_R \oplus C_R$ ）此時 $\forall$ $f: A_R \to Q_R$, $\overline{f}: B_R \to Q_R$ defined by $\overline{f}(a+c) = f(a)$ $\forall$ $a \in A$ & $c \in C$ 則$\overline{f}$是f的延拓。

這裡：complete reducible：

B_R is complete reducible if B_R is an R-direct sum of R submodules B_R^i, i.e. $B_R = B_R^1 \oplus B_R^2 \oplus \cdots \oplus B_R^m \ni B_R^i$ is irreducible $\forall$ $i = 1, 2, \cdots, m$.

(2)當Q_R具有某些特性時（那些？）則對於某類（那類？）的B_R之任一個 submodule A_R 映至Q_R的homomorphism皆可被延拓到B_R.

例：當Q_R爲injective 時 $A_R \to Q_R$ 的homomorphism 可以被延拓到$B_R \to Q_R$上。

我們為了方便起見將令M_R為一個 fixed right R-module.

Definition 2 : A right R-module Q_R is M-injective $\Leftrightarrow$ for each R-submodule N of M every homomorphism from N into Q can be extended to a homomorphism from M into Q.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[dl, "h"] \\
Q &
\end{tikzcd}
\qquad h \circ i = g$$

To characterize the M-injectivety:

Definition 3 : Let B_R be a R-submodule of a right R-module A, Then is an M-extension of B $\Leftrightarrow$ $\exists$ an R-homomorphism φ from M into $A \ni A = B + \varphi(M)$.

我們知道這些定義以後，下面有一些等價的關係便於大家的學習：

Proposition : The following statements are equivalent :

(1) Q_R is M-injective.

(2) If A_R is an M-extension of B_R then any homomorphism from B_R into Q_R can be extended to a homomorphism form A_R into Q_R.

(3) For any M-extension A_R of Q_R is a direct summand of A_R.

proof : (1) $\Rightarrow$ (2)

Let A_R be an M-extension of B_R, then $\exists$ an R-homomorphism $\varphi : M \to A \ni A = B + \varphi(M)$.

Let $g : B_R \to Q_R$ be an R-homomorphism, then $g \circ \varphi$ is an R-homomorphism from $\varphi^{-1}(B)_R$ into Q_R, where $\varphi^{-1}(B)_R$ is a submodule of M_R

$\because$ Q_R is M-injective, $\exists$ an R-homomorphism $h : M \to Q \ni h\mid_{\varphi^{-1}(B)} = g \circ \omega$

$\because$ $A = B + \varphi(M)$

$\therefore$ $\forall\, a \in A$, $\exists\, b \in B$, $m \in M \ni a = b + \varphi(m)$

defined $f : A \to Q$ by $f(a) = g(b) + h(m)$

(i) f is welled-defined

for if $a = b + \varphi(m) = 0$, then $-b = \varphi(m) \in B$

$\therefore$ $m \in \varphi^{-1}(B)$

hence $h(m) = g(\varphi(m)) = g(-b) = -g(b)$

therefore $h(m) + g(b) = f(a) = 0$

(ii) f is an R-homomorphism

if $a_1, a_2 \in A = B + \varphi(M)$

$\therefore$ $\exists\, b_1, b_2 \in B$ $m_1, m_2 \in M \ni$

$$a_1 = b_1 + \varphi(m_1)$$
$$a_2 = b_2 + \varphi(m_2)$$

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= b_1 + b_2 + \varphi(m_1) + \varphi(m_2) \\ &= b_1 + b_2 + \varphi(m_1 + m_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(a_1 + a_2) &= f(b_1 + b_2 + \varphi(m_1) + \varphi(m_2)) \\ &= f(b_1 + b_2 + \varphi(m_1 + m_2)) \\ &= g(b_1 + b_2) + h(m_1 + m_2) \\ &= g(b_1) + g(b_2) + h(m_1) + h(m_2) \\ &= [g(b_1) + h(m_1)] + [g(b_2) + h(m_2)] \\ &= f(a_1) + f(a_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(ca) &= f(cb + c\varphi(m)) = f(cb + \varphi(cm)) \\ &= g(cb) + h(cm) = cg(b) + ch(m) \\ &= c[g(b) + h(m)] = cf(a) \end{aligned}$$

(iii) $f\mid_B = g$

if $a \in B \subset A$, $f(a) = g(b)$

$\therefore$ f is an extension of g.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Let A be an M-extension of Q_R.

Then the identity mapping $I_Q : Q_R \to Q_R$ can be extended to a homomorphism from A into Q (by (2))

$\therefore$ $A = Q \oplus \ker \varphi$

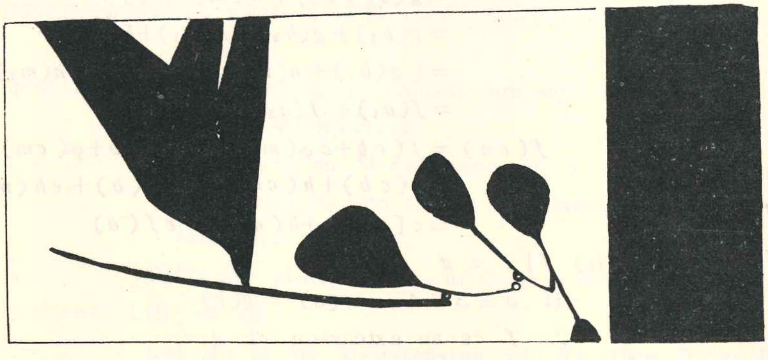
(3) $\Rightarrow$ (1)

Let N_R be a submodule of M_R, g be an R-homomorphism from N_R into Q_R let $D=\dfrac{Q\times M}{H}$, where $H=\{(g(n),-n)\mid n\in N\}$.

Define : $\varphi = Q_R \to D_R$ by $\varphi(q) = (q, 0)+H$ and
$\phi = M_R \to D_R$ by $\phi(m) = (0, m)+H$

Then φ ϕ are R-homomorphism $\ni \varphi\circ g = \phi|_N$ and $\varphi(Q)+\phi(M)=D$. So D is an M-extension of $\varphi(Q)$, which is isomorphic to Q, by (3) $\varphi(Q)$ is a direct summand of D. Set p be the projective mopping from D into Q. Then $p\circ\varphi = I_Q$ (where I_Q is the identity mapping on Q), and $f=p\circ\phi$ is an R-homomorphism from M into Q $\ni$ $f|_N=g$, $\therefore$ Q_R is M-injective.

由以上可知M-injectivety 與 M-extension 有很密切的關係，若同學們想要研究此問題最好能先進一步去獲得些有關環論的知識。



Descartes 說：人類心智與生俱來有完美空間、時間和運動等觀念

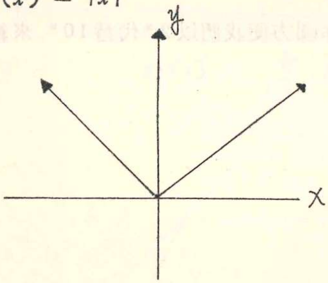
到處連續——到處不可微分

張永寬

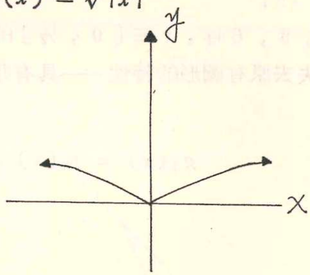
在微積分裏，定義當 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 存在時，稱 f 在 x 點可微分。我們知道若 $f(x)$ 在某一點 a 可微分，則 f 必在 a 點連續；但 f 在 a 點連續，不一定保證 f 在 a 點可微分。本文的目的在舉一個具有後者這種性質而平常又極罕見的函數。這個函數的特點在於它定義域中的每一點都連續，但每一點都不可微分，並且它的圖形在我們直觀的印象中是很難成立的。

首先我們先來看下面三個函數：

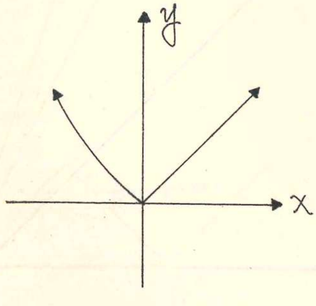
(1) $f(x) = |x|$



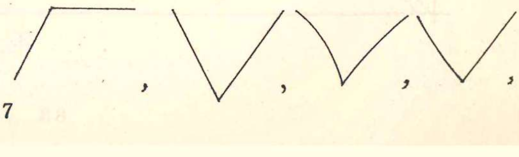
(2) $f(x) = \sqrt{|x|}$



(3) $f(x) = \begin{cases} x, & 若\ x \geqslant 0 \\ x^2, & 若\ x < 0 \end{cases}$



這三個函數都在它們定義域中的每一點連續，並且除了 0 點以外都可微分。從圖形的觀察中可以看出點 $(x, f(x))$ 在 $(-\varepsilon, 0)$ 及 $(0, \varepsilon)$ $\varepsilon > 0$ 的滑動都很平滑，換句話說，即 f 在 $(x, f(x))$ 的斜率變化很小，但從 $(-\varepsilon, 0)$ 移動到 $(0, \varepsilon)$，當經過 0 點時斜率却突然起了很大的變化，以至於 f 在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 的圖形呈現不平滑的現象如



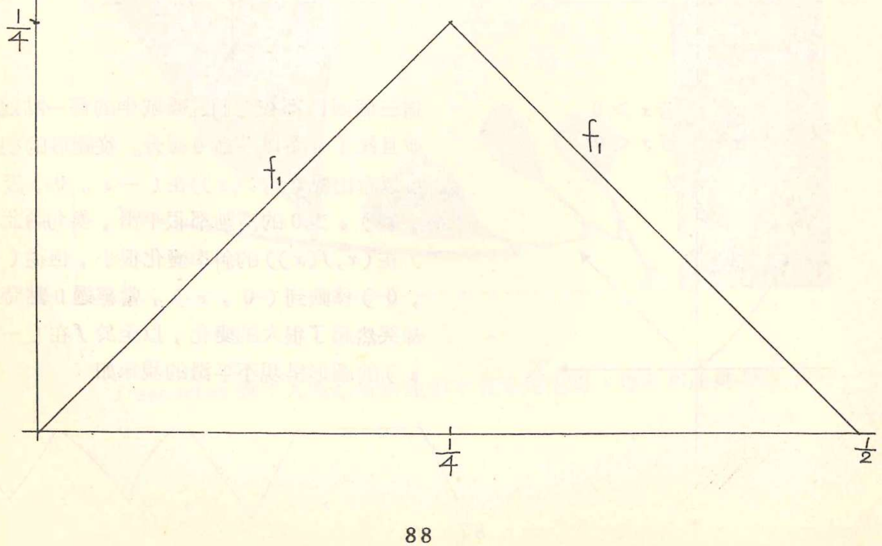
等有尖點的形狀。由此我們得到一個概念，當函數 f 在 a 點連續，但不可微分時，f 在 a 點會呈不平滑的尖頂狀態。有了這個概念之後，我們再來看本文所要提的函數：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}<10^n x> \qquad x\in R,\quad <y>$$ 表示 y 到最近的整數的距離。

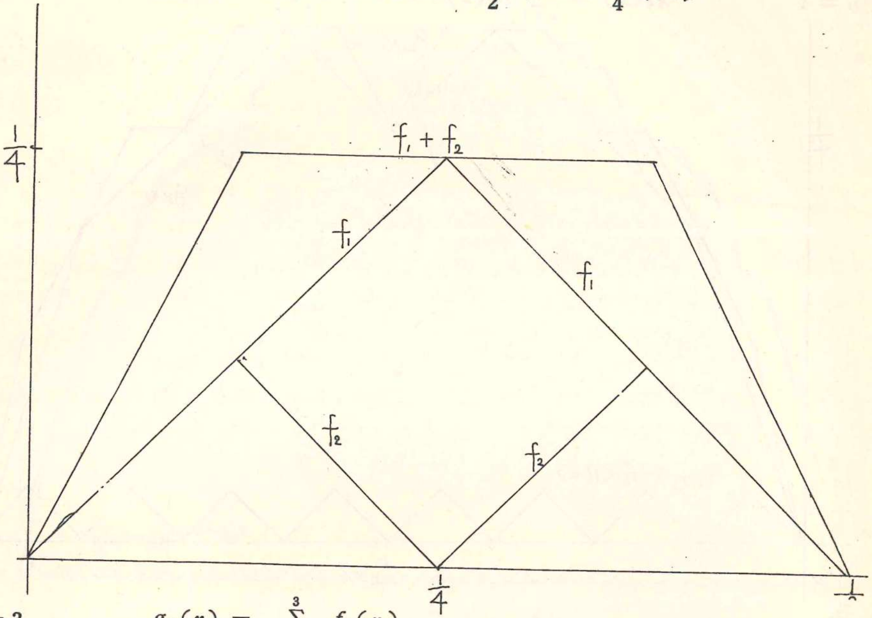
在上面的三個函數中，f 只在0點不可微分，可是現在這個函數却在它的定義域中到處連續到處不可微分，這是非常特殊的。從剛剛得到的那個概念，我們可以預測到 f 必在每一點都是尖頂狀的，可是在我們直觀的印象中，兩個尖點之間必定還存在有一小段平滑的曲線，所以到處是尖頂狀的圖形，在我們的直觀中是很難被接受的。然而事實上，我們却可以證明這樣的一個函數是存在的。（見(1) p. 422 ～ 423）

由於 f 的圖形是如此的怪異，所以要一次將它畫出是有所困難的，因此我們採用逼近法來求它的近似圖：對級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}<10^n x>$ 而言，它的一般項 $\frac{1}{10^n}<10^n x>$ 仍爲 x 的一個函數，故令 $f_n(x)=\frac{1}{10^n}<10^n x>$，則 $f(x)$ 可寫成 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$。又令 $g_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)$，則當 n 越來越大時，$g_n(x)$ 會越來越逼近 $f(x)$。以下是 $n=1$，2，3，4，5，6時，$x\in[0, \frac{1}{2}]$ 的圖形，爲了作圖方便我們以 2^n 代替 10^n 來繪圖，但這並不失去原有圖形的特性——具有非常多的尖點。

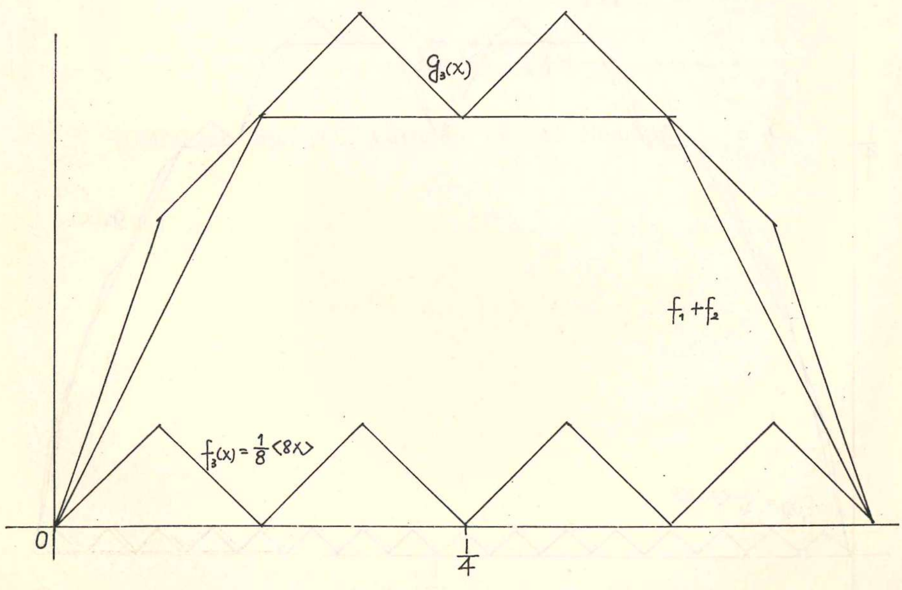
(1) $n=1$ $\qquad g_1(x)=f_1(x)=\frac{1}{2}<2x>$



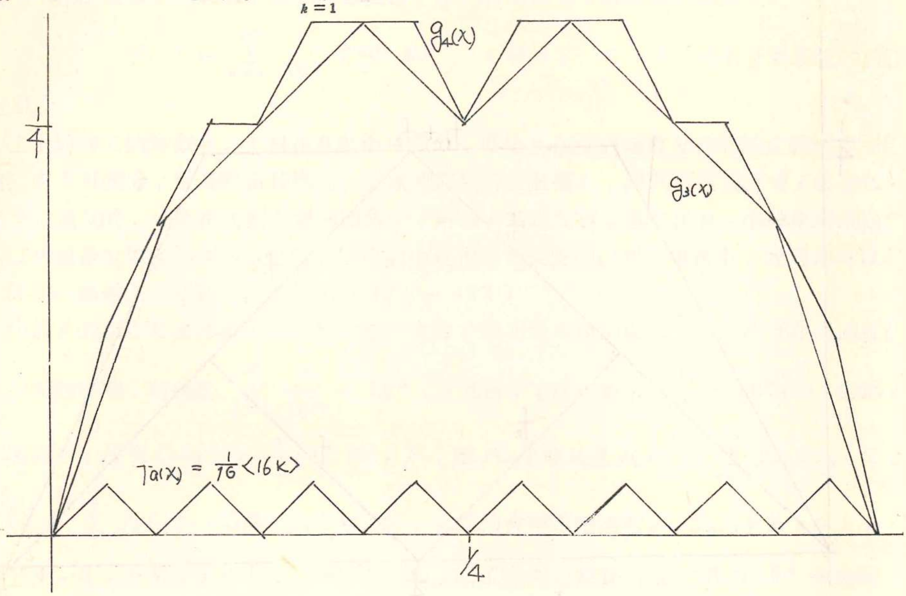
(2) $n = 2$ $g_2(x) = f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{2} <2x> + \frac{1}{4} <4x>$



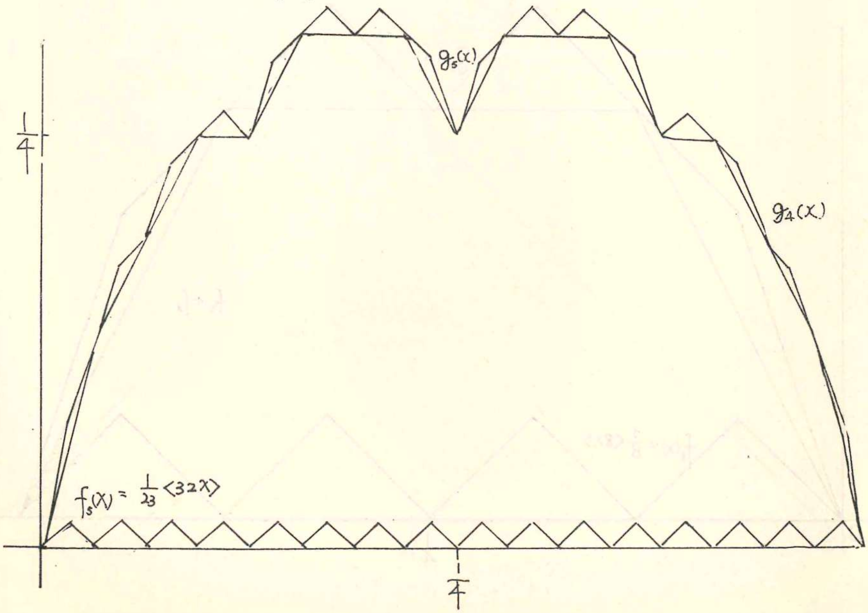
(3) $n = 3$ $g_3(x) = \sum_{k=1}^{3} f_k(x)$



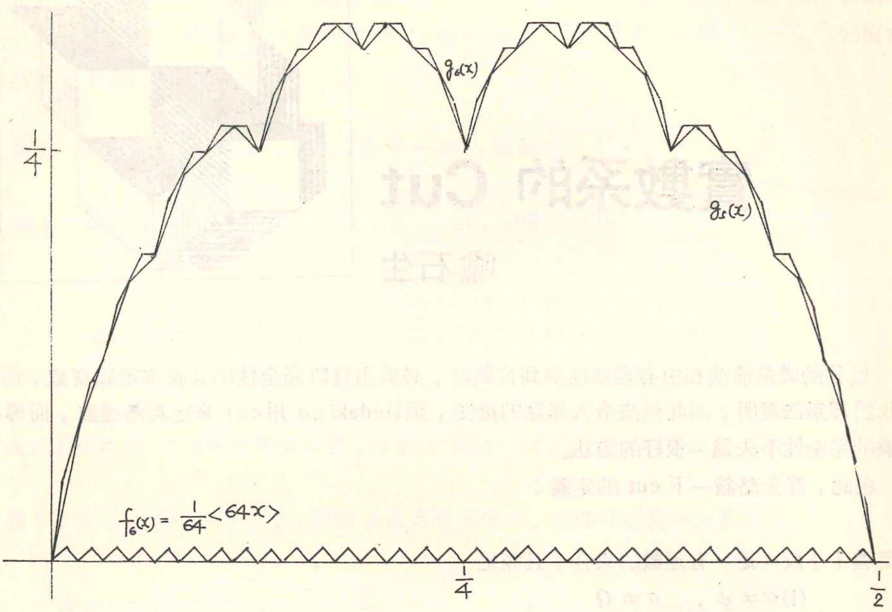
(4) $n = 4$ $\qquad g_4(x) = \sum_{k=1}^{4} f_k(x)$



(5) $n = 5$ $\qquad g_5(x) = \sum_{k=1}^{5} f_k(x)$



(6) $n=6$ $\qquad g_6(x)=\sum_{k=1}^{6} f_k(x)$

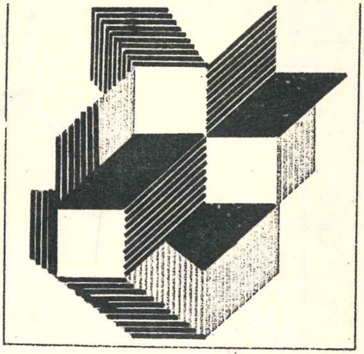


參考資料

(1) Michael Spivak : Calculus. W. A. Benjamin, In C.

實數系的 Cut

喻石生



以往的數系推演在由有理數推演到實數時，必須用實數完全性的公設來定義實數，而公設我們却無法證明，因此無法令人滿意的接受，至Dedekind 用cut 來定義無理數，而導出實數的完全性不失爲一很好的方法。

在此，首先略敍一下 cut 的定義：

《**定義 1**》設 α 是一有理數的集合，且滿足

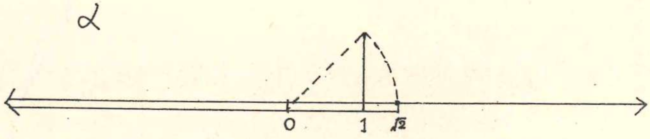
(1) $\alpha \neq \phi$,　$\alpha \neq Q$

(2)若 $p \in \alpha$ ，每一 $q \in Q$ 使 $q < p$ ，則 $q \in \alpha$

(3)在 α 中無最大之有理數

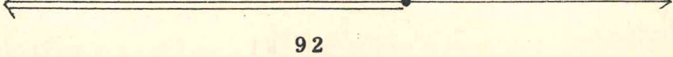
則稱 α 是一 cut

例 1　$\alpha = \{ p \mid p \in Q,\quad p^2 < 2, 或 p < 0 \}$ 是一 cut.



【**定理 1**】若 $p \in \alpha$ ，且 $q \in \alpha$ ， $q \in Q$ ，則 $p < q$

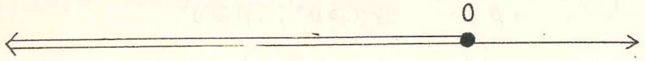
[註] 若 $r \in Q$ ，則 $\alpha = \{ x \mid x \in Q,\ x \angle r \}$ 是一 cut，α 稱爲有理數 cut，記作 $\alpha = r^{**}$



$q \in R$ 若 $\forall p \in \alpha$，$p < q$ 則稱 q 為 α 之一上界，如此可知任何 cut 皆有上界，也就是不屬於此 cut 之數，又因 $r < r$ 是不合理的，故註中，$r \notin \alpha$ 而 $p < r$ 則 $p \in \alpha$，我們稱 r 是 α 的最小上界。

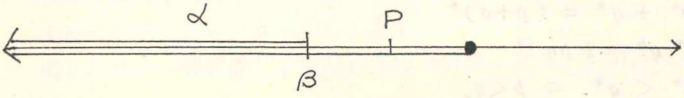
例 2　$\alpha = \{ x \mid x \in Q , x < 2 \}$ 是一 cut，記做 $\alpha = 2^*$

例 3　$\alpha = \{ y \mid y \in Q , y < 0 \}$ 是一 cut，記做 $\alpha = 0^*$



《**定義** 2》$\alpha = \beta \Rightarrow p \in \alpha$ 則 $p \in \beta$，且 $q \in \beta$ 則 $q \in \alpha$，否則 $\alpha \neq \beta$。

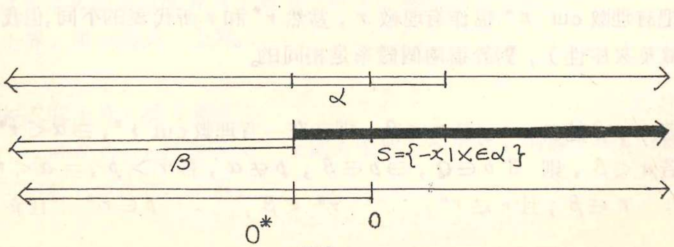
《**定義** 3》$\alpha < \beta \Leftrightarrow$ 有一 $p \in Q$，使得 $p \in \beta$ 而 $p \notin \alpha$，同理可定義 $\alpha > \beta$



［**定理 2**］設 α，β 是兩 cut，γ 是所有 $r = p + q$（$r \in Q$，$p \in \alpha$，$q \in \beta$）之 r 所成的集合則 γ 是一 cut，記做 $\gamma = \alpha + \beta$。

例 4　$\alpha = \{ x \mid x \in Q , x < 2 \}$，　$\beta = \{ y \mid y \in Q , y < -3 \}$，則 $\gamma = \{ z \mid z \in Q , z < -1 \}$

定理 3］若 α 是一 cut 則 $\exists ! \beta$ 是 cut，使 $\alpha + \beta = 0^*$，記做 $\beta = -\alpha$



［**定理 4**］ α，β 是二 cut， $\alpha \geqslant 0^*$，$\beta \geqslant 0^*$，若 γ 爲所有負有理數及正有理數 γ，所成的集合，其中 $\gamma = pq$。$p \in \alpha$，$q \in \beta$，$p \geqslant 0$，$q \geqslant 0$，則 γ 是一 cut，記做 $\gamma = \alpha\beta$.

《**定義 4**》α 是 cut，則 $|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & 若\ \alpha \geqslant 0^* \\ -\alpha, & 若\ \alpha < 0^* \end{cases}$

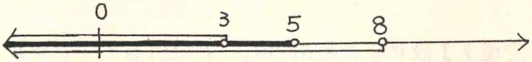
［**定理 5**］ α，β 是二 cut，則

$$\alpha\beta = \begin{cases} -|\alpha|\,|\beta|, & 若\ \alpha < 0^*,\ \beta \geqslant 0^*\ 或\ \alpha \geqslant 0^*,\ \beta < 0^* \\ |\alpha|\,|\beta|, & 若\ \alpha < 0^*,\ \beta < 0^* \\ \alpha\beta, & 若\ \alpha \geqslant 0^*,\ \beta \geqslant 0^* \end{cases}$$

例 5 $\alpha = \{x \mid x \in Q,\ x < 2\}$， $\beta = \{y \mid y \in Q,\ y < -3\}$
設 $\gamma = |\beta| = -\beta$，則 $\gamma = \{\gamma \mid \gamma \in Q,\ \gamma < 3\}$
則 $\alpha\beta = -|\alpha|\,|\beta| = -(\alpha\gamma) = \{z \mid z \in Q,\ z < -6\}$

［**定理 6**］ 對任何有理數 p 及 q 得
(1) $p^* + q^* = (p+q)^*$
(2) $p^* q^* = (pq)^*$
(3) $p^* < q^* \Rightarrow p < q$

例 6



$3^* + 5^* = (3+5)^*$

例 7 $3^* < 5^* \Rightarrow 3 < 5$

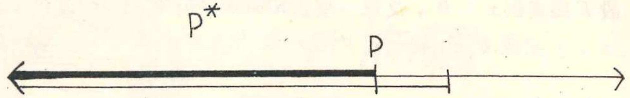
我們若注意所謂有理數 cut，這一類 cut 的話，會發現和 cut r^* 相對應的有理數 r 具有相同的和、積及次序性，由這個事實，說明了有理數系的次序體系和有理數 cut 相同，因此我們能夠把有理數 cut r^* 視作有理數 r，當然 r^* 和 r 所代表的不同，但我們所關心的性質（數學運算及次序性），對於這兩個體系是相同的。

［**定理 7**］ 若 α，β 是二 cut，且 $\alpha < \beta$，則存在一有理數 cut r^*，$\ni \alpha < r^* < \beta$

證明 若 $\alpha < \beta$，則 $\exists\ p \in Q$，$\ni p \in \beta$，$p \notin \alpha$，擇 $r > p$，$\ni \alpha < r^* < \beta$
$\because\ r \in \beta$，且 $r \notin r^*$， $\therefore\ r^* < \beta$， $\because\ p \in r^*$，且 $p \notin \alpha$，

$\therefore \quad \alpha < r^*$

［定理 8］對任何 cut α ，$p \in \alpha \Leftrightarrow p^* < \alpha$

圖：

若稱cut 爲實數而有理數cut 則視相同有理數（而稱爲有理數），所有其他的cut 稱爲無理數，則得到有理數系如同實數系的一個子集；定理 7 ，告訴了我們，在任意兩實數間有一有理數存在；定理 8 ，則顯示每一個實數 α 是使得：$p < \alpha$ 的所有有理數 p 所成的集合

例 8　$\alpha = \{ x \mid x \in Q ,\ x < \sqrt{2} \} = \{ x \mid x \in Q ,\ x^2 < 2$ ，或　$x < 0 \}$

［定理 9］設 A 和 B 爲實數的兩集合，使得

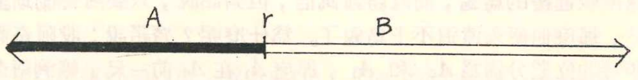
(1)每一實數不在 A 中，即在 B 中，

(2)沒有元素既在 A 中又在 B 中，

(3) A 和 B 皆不是空集合，

(4)若 $\alpha \in A$ ，且 $\beta \in B$ ，則 $\alpha < \beta$ ，

則存在唯一一個實數 γ ，使得對任何 $\alpha \in A$ ，$\alpha \leqslant \gamma$ ，對任何 $\beta \in B$ ，$\gamma \leqslant \beta$。

圖：

若 $\gamma \in A$ ，則 γ 是 A 中的最大數，若 $\gamma \in B$ 則 γ 是 B 中的最小數，而由於(1)所以必至少有一成立，而由於(2)所以不會同時成立，γ 的存在顯示出我們在有理數系中發現的空隙已被塡滿。此外，由每一個cut 有一個最小上界，我們立即能把每一 cut 視同其最小上界，就是如此，因此定理 9 ，常稱爲實數完全性定理。

《定義 5》設 E 是實數所成的集合，若有一數 y ，使得對所有 $x \in E$ ，$x \leqslant y$ ，我們稱 E 有上界，而 y 爲其一上界。

《定義 6》若 E 有上界，設 E 滿足：

(1) y 是 E 的一上界 (2)若 $x < y$ 則 x 不是 E 的上界，則稱 y 爲 E 的最小上界，同理可定義下界及最大下界。

例 9　$E=\{x \mid x=1/n, n=1, 2, 3, \cdots\}$ 則 E 有界，且 1 是其最小上界，0 是其最大下界，而 $1\in E$，$0\notin E$。

［**定理 10**］設 E 爲實數 $x>0$，及每一整數 $n>0$，有唯一一個實數 $y>0$，使得 $y^n=x$，y 記做 $\sqrt[n]{x}$ 或 $x^{1/n}$。

由是，我們利用 cut 導得了實數的完全性，及實數本身。此一過程係用定義及定理去導得，而不用實數完全性的公設，而可明確的定義實數，及實數的完全性。

參考資料

1. Walter Rudin : Principles of Mathematical Analysis.
2. Errett Bishop : Foundations of constructive Analysis.
3. Michael Gemignani : Introduction to real analysis.
4. Robert. G. Bartle : The elements of real analysis.

一個關於極限的問題

大家都知道神的兒子希臘大英雄阿奇勒斯（Archilles）是長跑健將，其速度較遲緩的烏龜，簡直勝强萬倍，但齊諾說，只要阿奇勒斯讓烏龜先跑一尺，那麼他便永遠追不上烏龜了。爲什麼呢？齊諾說：設阿奇勒斯和烏龜起步時的位置分別爲 A_0 和 A_1，那麼 A_1 在 A_0 前一尺，等到阿奇勒斯跑到 A_1 時，烏龜已在 A_1 前一萬分之一尺的 A_2 處了，等到阿奇勒斯跑到 A_2 時，烏龜又已在 A_2 前一億分之一尺的 A_3 處了。……如此討論下去，儘管阿奇勒斯和烏龜的距離不斷縮短，但阿奇勒斯仍然永遠追不上烏龜，請問你如何駁倒這個詭辯？

編輯小組

旋轉與鏡射的複合

廖賀田

§1 簡介旋轉與鏡射

一個函數 $f = R^2 \to R^2$ 若滿足：

$$f(a\overrightarrow{x} + b\overrightarrow{y}) = af(\overrightarrow{x}) + bf(\overrightarrow{y}) \qquad \forall a, b \in R,\ \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in R^2 \quad \cdots\cdots(1)$$

稱爲平面上的一個「綫性映射」。我們可以很容易的證明出：

『$f : R^2 \to R^2$ 爲綫性映射的充要條件是「存在4個實數 a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22},使得

$$f(x, y) = (a_{11}x + a_{12}y,\ a_{21}x + a_{22}y) \quad \cdots\cdots(2)$$

對任意 $(x, y) \in R^2$ 都成立」』。

［註］請參看高中數學實驗教材第四册，或Bartle：The Elements of Real Analysis p.155.

(2)式可表爲

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(3)$$

其中 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 稱爲 f 之自然矩陣表示，記爲〔f〕，亦即 $f(\overrightarrow{x}) = [f]\ \overrightarrow{x}$

『若線性映射 f 進一步滿足

$$f(\overrightarrow{x}) \cdot f(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} \qquad \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in R^2 \quad \cdots\cdots(4)$$

稱爲正交線性映射』〔〃·〃表示內積（inner product）〕，任何圖形經過正交線性映射後所得的像（direct image）與原圖形必然全等。

正交線性映射只有兩種，就是「旋轉」與「鏡射」，它們的矩陣表示，分別為

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ 與 } \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$ [註 1]

為了方便，我們定義下面二個符號：

(1)若正交線性映射 $r : R^2 \to R^2$ 之矩陣表示為

$$[r] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

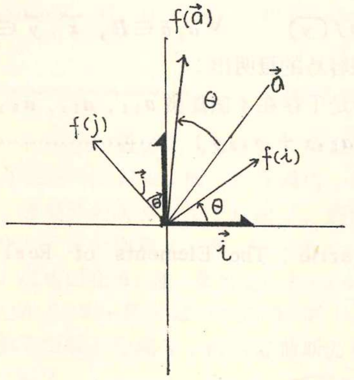
時，記為 $r = (\theta, +)$

(2)若正交線性映射，$S : R^2 \to R^2$ 之矩陣表示為

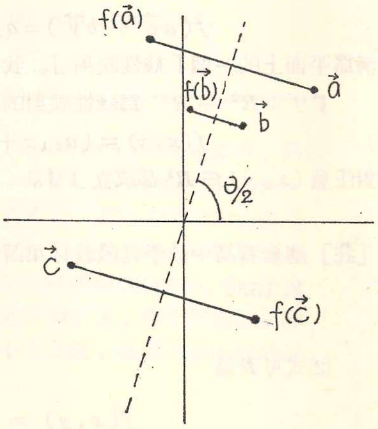
$$[s] = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

時，記為 $S = (\theta, -)$

我們知道 $(\theta, +)$ 就是把平面作一個〝以原點為中心，角度為〝θ〞的旋轉〞（見圖一），而 $(\theta, -)$ 就是把平面作一個〝以直線 $y = (\tan\ \theta/2)x$ 為軸的翻轉〞（見圖二）



（圖　一）



（圖　二）

§2 複合公式

對於任意兩個正交線性映射，f_1, f_2 它們的複合函數 $f_1 \circ f_2$ 仍為正交線性映射。若 f_1, f_2 皆為旋轉，則 $f_1 \circ f_2$ 仍為旋轉，若 f_1, f_2 中旋轉，鏡射各一，則 $f_1 \circ f_2$ 為鏡射。若 f_1, f_2 皆為鏡射，則 $f_1 \circ f_2$ 亦為旋轉，以上事實只是「定性」的結果。至於「定量」的結

果即角度如何變化的問題，我在高三時，曾導出下列公式：

［註］利用〔$f_1 \circ f_2$〕＝〔f_1〕〔f_2〕。請特別注意複合的次序：$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x))$，此運算不可交換。

$$1°\ (\theta,+)\circ(\phi,+)=(\theta+\phi,+)$$
$$2°\ (\theta,+)\circ(\phi,-)=(\theta+\phi,-)$$
$$3°\ (\theta,-)\circ(\phi,+)=(\theta-\phi,-)$$
$$4°\ (\theta,-)\circ(\phi,-)=(\theta-\phi,+)$$

以上四式，由於函數之複合具有結合性，故不論多少個正交線性映射的複合皆可計算出，而且某些題目可由此公式迅速解出，至於其證明，只須將兩矩陣相乘後，化簡即得，請讀者自行驗證，下面我們舉幾個例子加以說明：

［例1］設 f 爲轉角 $45°$ 之旋轉，g 爲以 y 軸爲軸之鏡射。我們由公式立刻有：

$$g\circ f=(180°,-)\circ(45°,+)=(135°,-)$$

故知 $g\circ f$ 爲對於矢角爲 $67.5°$ 直線的鏡射（本題爲實驗本第一版之論例3）。

［例2］求 $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$ （本題爲60年聯考題）

解　原式 $=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(-\beta) & -\sin(-\beta)\\ \sin(-\beta) & \cos(-\beta)\end{pmatrix}$

$$=[(\alpha,+)]\,[(-\beta,+)]=[(\alpha,+)\circ(-\beta,+)]$$
$$=[(\alpha-\beta),+]$$
$$=\begin{pmatrix}\cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta)\\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta)\end{pmatrix}$$

§3 應　　用

在高等代數中，The group of symmetries of the square（見下頁圖三）中，除了 e，r_1，r_2，r_3 之間的運算很簡明外，其他元素之複合都不太容易想像出來，若利用旋轉與鏡射的複合，就可以很容易得到結果。顯然

$$e=(0°,+),\quad r_1=(90°,+),\quad r_2=(180°,+),\quad r_3=(270°,+)$$

$$h=(0°,-),\quad d_1=(90°,-),\quad dv=(180°,-),\quad d_2=(270°,-)$$

[註] 請注意 $(\alpha,-)$ 中，α 爲翻轉軸矢角的兩倍。

若我們把角度以 90° 爲一單位，而將 90° 記爲 1，180° 記爲 2 等，則

$$e=(0,+),\quad r_1=(1,+),\quad r_2=(2,+),\quad r_3=(3,+),$$
$$h=(0,-),\quad d_1=(1,-),\quad v=(2,-),\quad d_2=(3,-)$$

在運算的時候，因爲角度爲模四同餘，故前面的數字爲以四爲模之同餘數。

[例 1] 求 $v\circ d_2$

解 $v\circ d_2=(2,-)\circ(3,-)=(-1,+)=(3,+)=r_3$

[例 2] $r_1\circ h=(1,+)\circ(0,-)=(1,-)=d_1$

[例 3] $d_1\circ r_3=(1,-)\circ(3,+)=(5,-)\circ(3,+)=(2,-)=v$

[例 4] $d_1\circ d_1=(1,-)\circ(1,-)=(0,+)=e$

其實，對於任意正 n 邊形之〝翻〞，〝轉〞所成之群，我們可以規定周角度量爲 n，於是角度之加減成爲在 Z_n 中的 $+_n$ 運算，計算起來就容易了。例如：在 The group of symmetries of the equilateral triangle 中（見圖四）

$$e=(0,+),\quad r_1=(1,+),\quad r_2=(2,+)$$
$$L_1=(0,-),\quad L_1=(1,-),\quad L_3=(2,-)$$

其中角度爲 Z_3 中的元素。

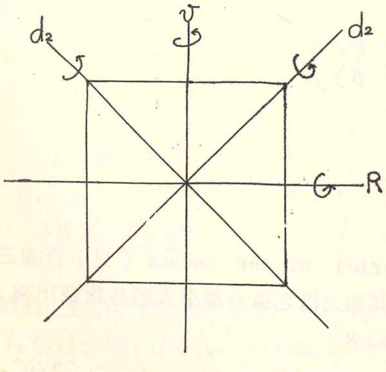


圖 三

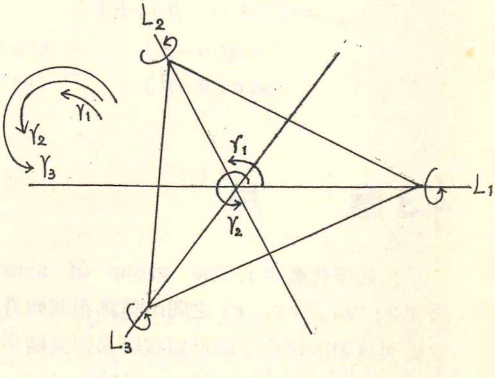


圖 四

§4 代數結構

令$G_s = \{(\alpha,+):\alpha\in Z_4\}\cup\{(\beta,-):\beta\in Z_4\}$，則$(G_s,\circ)$成一群（即 the group of symmetries of the square），令

$$D_n = \{(\alpha,+):\alpha\in Z_n\}\cup\{(\beta,-):\beta\in Z_n\}$$

則$(D_n,\circ)$成一群，事實上，平面所有正交線性映射所成之集合

$$S = \{(\alpha,+):\alpha\in \boldsymbol{R}\}\cup\{(\beta,-):\beta\in \boldsymbol{R}\}$$

亦成一群（以複合爲運算）。

若將$(\alpha,+)$簡記爲α，將$(\beta,-)$簡記爲β'，並且稱α爲實數，β'爲同實數，而$\circ$記爲$+$，則$S=\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{R}'$，（其中$\boldsymbol{R}'=\{x':x\in\boldsymbol{R}\}$），$(S,+)$可稱爲「雙軌實數群」因爲$\boldsymbol{R}$可用直綫表出，$\boldsymbol{R}'$可用另一直綫表出，且二直線互不相交。此時的$+$，可稱爲廣義和，定義如下：（對任意實數$x$，$y$）

$$\left.\begin{aligned} x+y &= (x+y)\\ x+y' &= (x+y)'\\ x'+y &= (x-y)'\\ x'+y' &= (x-y)\end{aligned}\right\}\quad\text{（右邊爲實數的加法）}$$

也就是說，兩個實數相加仍爲一實數，而實數與同實數相加爲同實數，兩個同實數相加又變成實數。這種「廣義和」具有「結合律」，但「交換律」不成立，有：

『$\forall\ \alpha,\beta\in S$，若$\alpha+\beta=\beta+\alpha$之充要條件爲：
1. $\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}$ 或
2. α,β有一爲0或
3. $\alpha=\beta\in\boldsymbol{R}'$ 』

在$(S,+)$中單位元素爲0，若$\alpha\in\boldsymbol{R}$，則其反元素爲$-\alpha$，若$\alpha'\in\boldsymbol{R}'$，則其反元素爲$\alpha'$，另外$o'$有下列特性：

1. $x+o'=x'$, $\forall\ x\in\boldsymbol{R}$
2. $o'+x=(-x)'$, $\forall\ x\in\boldsymbol{R}$
3. $o'+o'=0$
4. $o'+x'=-x$, $\forall\ x\in\boldsymbol{R}$
5. $x'+o'=x$, $\forall\ x\in\boldsymbol{R}$

若將1式作爲x'之定義，只要2、3兩式就足夠定義廣義和了

這是一個相當奇特的群，也許將來再定義一些運算後成爲一種有用的數學工具，如同複數一樣，可以解決許多問題也說不定。（姑妄聽之）

【註】實驗本以列向量表示$\overrightarrow{y}=\overrightarrow{x}A$，本文以行向量表示$\overrightarrow{y}=A\overrightarrow{x}$
所以二者之A差一個轉置（transpose）。

抽樣方法簡介

李孟峰

燈泡公司的品質管制員，如何計算該公司所生產燈泡的平均壽命？生物學家如何估計太平洋中某種魚類的數量有多少？醫生如何判定某疾病是否與遺傳有關？又某公司的審計員，想要了解超過 60 天以上欠款成爲呆帳的比率有多少？當然只要能對上述問題中所要調查的對象一個一個的去檢查（也就是所謂的"普查"）所得到的結果，必然是最準確的。但是，在燈泡公司所生產的燈泡都經過試驗後，才計算出平均壽命，那麼就必須花費許多時間和金錢來做檢驗，同時試驗完成後，燈泡也都損壞了，該公司的生產豈不等於零？因此，像這類受到某些因素的限制，或因爲母體（ population ）的數目過於龐大，以致於無法對母體中的每一元素（ element ），一一進行調查時，便可以運用統計理論，從母體取出其中一部份元素，這些元素稱之爲樣本（ Sample ），然後利用對這份樣本調查的結果，做爲母體的估計。正因爲統計方法是以一小部份來推測全體，所以所獲的結果無法百分之百的與事實相符。因此我們要盡量設法取到一個很好的樣本，而使其精確度愈高愈好，也就是說，抽出的樣本要很足以代表母體，便可以從少量的樣本中，對事實做很精確的估計。如以 1972 年尼克森與麥高文競選美國總統爲例。蓋洛普、哈里斯、揚啓洛維玆三家民意調查社在選舉前一星期所做調查的統計分析，尼克森分別可獲得約 62 ％，61 ％，及 60％ 的選票，而麥高文分別可獲得約爲 38％，39％，40％的選票。正式選擧的結果：尼克森獲得約 61 ％ 的選票，而麥高文獲得約 39 ％ 的選票，實際與預測的數字僅有 1 ％ 之差，但被調查的選民並沒有超過三千人，統計的技巧就有如此的神奇！

上面提過，往往因爲金錢，時間……等因素的限制，所以我們僅從母體中抽取一些樣本出來，得到樣本的方法，稱之爲抽樣（ sampling ），然後基於這個樣本來對母體作推測，因此抽樣是否適切、得當，對於統計分析的結果是否合理，實具有關鍵性的影響。統計理論，帮助我們如何去得到一個具有代表性的樣本，說得詳細一點，就是要收集那些資料？如何去收集？要收集多少？這些問題就是所謂的抽樣調查設計（ Sample Survey Design ）。研究抽樣理論的目的在於改進與發展抽樣方法及推算方法，使抽樣推算結果，能在最低費用下，獲得最精確的結論。一般常用的抽樣方法有下列幾種：

1. 簡單隨機抽樣（ Smiple random

Sampling ）：這是一種最基本的抽樣方法我們在數目爲N的母體中，選取一個數目爲n的樣本（或稱樣本大小（Sample size）爲n），而且必須每一個大小爲n的樣本被選中的機會均等。這種抽樣方法稱爲簡單隨機抽樣，在這裡首先要考慮的是怎樣的選取才稱得上"隨機"？爲了避免試驗者主觀的偏好，或受到某些個人習慣的影響，而產生不隨機抽樣，因此利用電子計算機依據機率理論，隨機打出一群數字，使其中0～9每一個數字出現的機率均爲1/10的"亂數表"（tables of random number），作爲隨機抽樣的依據。例如：某公司的會計小姐欲計算$N=28000$張帳單的帳款總數，利用簡單隨機抽樣取出$n=100$的樣本，那麼她可以先將這些帳單加以編號（或直接以帳單上的號碼爲準）利用亂數表得到100個號碼，然後再按這100個號碼，選出對應的100張帳單，計算出平均數後乘以28000，便可以得出一個估計值，伴隨著一個可能誤差。至於樣本的大小，所必須依我們所允許誤差的大小來決定。當要求誤差愈小，則樣本的個數就要相對的增加。

2. 分層隨機抽樣（Stratified Random Sampling）：這是把母體分成幾個不互相重覆的階層，然後再對每一階層作簡單隨機抽樣來得到樣本的抽樣方法。舉個例來說：電視公司要調查某節目的收視率，便可以依住宅爲區域來分層；試驗新藥品的效率，便可以按年齡分層。當我們從事分層抽樣時必須注意到各層之間的層次分明，能夠很清楚的判斷出某一元素屬於那一個階層，避免用小孩、老人；新、舊，……等模糊不清的字眼來分層！應給出一個像年齡或數量化的明確觀念來做分層的標準。同時，各層之間的相關性愈小愈好，使具有相同性質的元素屬於相同的階層。在相同的成本之下，分層隨機抽樣常比簡單隨機抽樣得到更精確的估計，其主因有三：⑴從各層中取出的資料（data）較從整個母體取出的資料性質相近。⑵由於管理上的方便，調查費用較低。⑶從各階層取出的資料，不會有不必要的資料出現。基於以最低的成本得到最精確結果的原則，在層次容易區分的情況下，即可採用分層隨機抽樣的方法，來從事抽樣調查。

3. 比率推定法（ratio estimation）：有時候進行某一現象的試驗，手續相當繁雜，要花費很多時間與人力。那麼我們設法找到一個容易試驗而且關係相近的因素作爲輔助變數（Subsidiary variable），先對這個輔助變數進行試驗後，利用這兩變數之間的關係來得到對原來現象的估計值。例如：我們想知道某一箱橘子含糖量的高低，如果隨機選出幾個橘子，從橘子汁中去分析含糖量，手續上就顯得很繁雜。只要我們確知橘子的含糖量與重量之間的比率關係，就可以利用對重量的測量來估計含糖量。但是在利用比率推定法時，必需要兩變數之間具有某種程度以上的相關性，通常要在兩變數間的相關係數（cofficient of correlation）大於½時，方能使用比率推定法。在兩個相關係數過小或甚至無關的變數之間，使用比率推定法，得到的結果就很不合理，令人難以承認。

4. 群體抽樣（Cluster Sampling）：上述簡單隨機抽樣及分層隨機抽樣，必須要有一份列有整個母體的表可供利用時方能進行。如果我們欲從事某市人民的平均收入調

查時，很難得到一份全市人口的整理表可供抽樣之用，我們便可以改用鄰或里為抽樣單位（Sampling Unit），全市所有鄰里的整理表，總比人口整理表容易得到。或者雖然人口整理表可供使用，但為抽樣經濟起見，以採用大單位的鄰或里做為抽樣單位比較適當，雖然小單位抽樣的精密度經常比大單位抽樣推算精密度為高，但是調查小單位時常因所選樣本較為分散或相距甚遠，調查員所必須花費的時間與旅費，要比對幾個鄰里從事調查為多。因此我們可以先將母體分成若干個小群體（Cluster）作為抽樣單位，以簡單隨機抽樣取出幾個群體，再對每一個群體進行普查。在使用群體抽樣時，分群的原則要盡量使得群體與群體間的結構相似。而前面分層隨機抽樣所要求的是每層元素之間性質相近，層與層之間層次分明，不致混淆。這是二種抽樣方法最大不同之處。現在用例子來說這個分群的原則：假如利用國民小學的校區來作為都市中社區抽樣的分群，再從中抽取2或3個群體來作整群體調查，雖然樣本相當大，但是這樣的結果顯然不足以代表整個母體。因為相同校區的住戶，性質幾乎大致相同，而校區與校區間的差異往往相當大。另外，一個試驗者想推算某工廠出品燈泡不良品的比率，在一定經費的限制下，選擇分成較多個小群體，再從中抽取20～30個群體的抽樣方法就比分成較少個大群體，再從中取出2～3個群體的抽樣方法來得好些。

5.系統抽樣（Systematic Sampling）：如果我們想計算一下某一天進入台北車站旅客的平均年齡，由於在這天內進入台北車站的人數無法事先知道，所以我們可以先就前 k 個人中，隨機選取一人，假設選中者為第 i 人，那麼此後即以 k 個人為一系統，按此規律從每個系統中取第 i 個人為樣本，直到所需的樣本個數出現為止，記錄下他們的年齡，來估計該天進入車站旅客的平均年齡。即使在母體個數 N 已知，而利用簡單隨機抽樣不易處理或花費過高的情況下，亦可使用系統抽樣。此時對於每一系統數目 k 的決定一般使 $k \leqslant \frac{N}{n}$，因此取 $k = [\frac{N}{n}]$（$[x]$ 為小於或等於 x 之最大整數）。由於系統抽樣容易形成，比較少有觀察者主觀的錯誤，並且在每單位成本上可以得到較多的消息（imformnation），所以常被用來代替簡單隨機抽樣。

6.兩段群體抽樣（tow-stage cluster Sampling）：此種抽樣方法實為群體抽樣的擴張，仍然先將母體分成若干小群體，再隨機抽取其中的幾個小群體，再對這些小群體作簡單隨機抽樣來取得樣本。在選擇兩段群體抽樣的樣本，就是在選擇適當的分群方法，我們希望(1)每一群體中的元素在地理上很接近。(2)群體的大小（Cluster Size）容易控制。選擇適當的分群方法，不外是從分成少數個具有許多元素的大群體，或者是分成多數個具有少量元素的小群體中作一抉擇。例如我們要做一份大學生對於某一問題的看法的意見調查表，如果同一大學學生的意見大致相同，而在大學與大學之間，學生的意見却有很大的差異時，我們就必須分成許多個含少數元素的小群體，並且在每個群體中皆含有不同學校的同學，在這樣的分群之下做兩段群體抽樣所得的樣本才能代表全體大學生的意見。反之，如果在同一個大

學中，同學的意見並不一致，同時每個大學也都有這種現象時，我們就可以用學校來分群，得到的群體之間性質相近，從中選取2、3個群體作兩段群體抽樣調查，便可以得到一份完美的意見調查表了。

總結上述，統計抽樣，只須花費少量的成本，即可從少數樣本中，得到十分可靠的資料。也就是只要我們能適當應用抽樣原理，那麼從一組較小的樣本所獲得的結果，差不多就會同全面普查的效果一樣好。因此，統計方法在今日廣泛的被應用在面對不確定的情況下，來作出最佳決策，譬如：醫生如何試驗新藥品的效用；品管員檢驗商品的品質；只要調查幾百個投票者就可以預測選舉的結果；計算國民所得；決定經濟政策等問題，均可利用統計方法來作預估，下決策。但是這些預估是否做得正確，有價值,就必須要看其抽樣是否適切，得當。雖然正確的統計，的確有令人難以想像的準確，可是一個取樣不當的統計，却足以出很大的錯誤，鬧出許多笑話，我們看看1936年美國總統大選時Literary Digest 從事預測工作，Literary Digest根據電話簿和各種雜誌的訂戶名單，寄出一千萬張模擬選票，共收回約二百三十萬張，基於這個樣本預測藍登將獲得絕對的勝利，事實上選舉的結果，另一位候選人羅斯福不僅當選，而且獲得全部投票的百分之六十，這次預測錯誤的主因，是就1936年而言，有電話和訂雜誌的人，不足代表全部選民，因爲這些人大半是收入較高的中上階層，他們大都投藍登的票，而支持羅斯福的，大多數來自低收入階層，因此由於取樣不當，造成了歷史上有名的預測錯誤，同時也使得這個曾經連續四次正確預測到美國總統大選結果的雜誌社在一年之內關門大吉。因此必須在謹愼的選擇抽樣方法之下，才能使得我們的估計達到既經濟又準確的程度。

參考資料：

(1)Elementary Survey Sampling By Mendenhall ; Scheaffer

(2)抽樣理論及其應用　魏應澤　著

(3)統計能爲你做些什麼　科技發展小組

(4)統計的魔術　夏沛然　譯

附：亂數表

10480	15011	01536	02011	81647	91646	69179	14194	62590	36207	20969
22368	46573	25595	85393	30995	89198	27982	53402	93965	34095	52666
24130	48360	22527	97265	76393	64809	15179	24830	49340	32081	30680
42167	93093	06243	61680	07856	16376	39440	53537	71341	57004	00849
37570	39975	81837	16656	06121	91782	60468	81305	49684	60672	14110
77921	06907	11008	42751	27756	53498	18602	70659	90655	15053	21916
99562	72905	56420	69994	98872	31016	71194	18738	44013	48840	63213
96301	91977	05463	07972	18876	20922	94595	56869	69014	60045	18425
89579	14342	63661	10281	17453	18103	57740	84378	25331	12566	58678
85475	36857	53342	53988	53060	59533	38867	62300	08158	17983	16439
28918	69578	88231	33276	70997	79936	56865	05859	90106	31595	01547
63553	40961	48235	03427	49626	69445	18663	72695	52180	20847	12234
09429	93969	52636	92737	88974	33488	36320	17617	30015	08272	84115
10365	61129	87529	85689	48237	52267	67689	93394	01511	26358	85104
07119	97336	71048	08178	77233	13916	47564	81056	97735	85977	29372
51085	12765	51821	51259	77452	16308	60756	92144	49442	53900	70960
02368	21382	52404	60268	89368	19885	55322	44819	01188	65255	64835
01011	54092	33362	94904	31273	04146	18594	29852	71585	85030	51132
52162	53916	46369	58586	23216	14513	83149	98736	23495	64350	94738
07056	97628	33787	09998	42698	06691	76988	13602	51851	46104	88916
48663	91245	85828	14346	09172	30168	90229	04734	59193	22178	30421
54164	58492	22421	74103	47070	25306	76468	26384	58151	06646	21524
32639	32363	05597	24200	13363	38005	94342	28728	35806	06912	17012
29334	27001	87637	87308	58731	00256	45834	15398	46557	41135	10367
02488	33062	28834	07351	19731	92420	60952	61280	50001	67658	32586

A Note on Integral Transform

李慶俊

Frequently in mathmatical analysis and physical application we encounter pair of functions related by an expression of the following form :

$$g(\alpha) = \int_a^b f(t)\,k(\alpha, t)\,dt$$

The function $g(\alpha)$ is called the integral transform of $f(t)$ by the kernel $k(\alpha, t)$.

Integral transforms are employed every extensively in both pure and applied mathmatics. They are especially useful in sobring certain boundary value problems and certain types of integral equations. Some of the more commonly used transforms are below. :

Exponential Fourier transform : $g(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t}\,dt$

Two modification of this form, developed in the Fourier cosine and Fourier sine transforms :

$$g_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t\,dt$$

$$g_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin t\,dt$$

Laplace transform : $g(\alpha) = \int_0^{\infty} f(t)\,e^{\alpha t}\,dt$

Hankel transform (Fourier-Bessel) $g(\alpha) = \int_0^{\infty} f(t)\,t\,\mathcal{J}_n(\alpha t)\,dt$

Mellin transform $g(\alpha) = \int_0^{\infty} f(t)\, t^{\alpha-1}\, dt$

Note : (1) Since $e^{-i\alpha t} = \cos \alpha t - i \sin \alpha t$ the sine and cosine transfrom are merely special cases of the exponential Fourier transform in which the function f vanishes on the negative real axis.

(2) The Laplace transform is also related to the exponential Fourier transform. If we consider a complex value α say $\alpha = u + iv$ where u and v are real, we can write.

$$\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-\alpha t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-itv}\, e^{-tu}\, f(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-itv}\, \varphi_u(t)\, dt$$

where $\varphi_u(t) = e^{-tu} f(t)$ Therefore the Laplace transform can also be regarded as a special case of the exponential Fourier transform.

(3) The Hankel transform, a Fourier tran-form for a Bessel function expansion, respsesents a limiting case of a Fourier-Bessel series. $\left(\mathcal{J}_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{m+n}}{m!\, \Gamma(m+n+1)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\,(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} \right)$

(4) All of these integral transforms are linear; i.e.

$$\int_a^b [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)]\, K(\alpha, t)\, dt$$

$$= \int_a^b c_1 f_1(t) k(\alpha, t)\, dt + \int_a^b c_2 f_2(t) k(\alpha, t)\, dt$$

$$= c_1 \int_a^b f_1(t) K(\alpha, t)\, dt + c_2 \int_a^b f_2(t) K(\alpha, t)\, dt$$

if c_1 and c_2 are constant.

Representing our linear transform by the operator $\mathcal{L}$ we obtain $g(\alpha) = \mathcal{L} f(t)$. We expect an inverse operator $\mathcal{L}^{-1}$ exist such that $f(t) = \mathcal{L}^{-1} g(\alpha)$. In general the detemination of the inverse transfrom is the main problem in using integral transform. Expection is not proof, and here proof of existence is complicated become we are actually in an inffinitedemensional Hilbert space. We shall prove existence in the Fourier and Laplace transforms. For detials of the inverse Hankel and inverse Mellin transforms the reader is referred to the reference at the end.

Fourier transform solution: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, e^{ixt}\, dt$. Let us consider a Fredholm equation of the first kind with a kernel of the general type $k(x-t)$:

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)\,\varphi(t)\,dt$ in which $\varphi(t)$ is our unknown function,

Assuming that the needed transforms exists we apply the Fourier convolution theorem to obtain

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\,\Phi(t)\,e^{-ixt}\,dt$$

The function $k(t)$ and $\Phi(t)$ are the Fourier transforms of $k(x)$ and $\varphi(x)$ respectively. Inverting the equation, we have

$$k(t)\,\Phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{ixt}\,dt = \frac{F(t)}{\sqrt{2\pi}}$$

Then $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{F(t)}{K(t)}$ and again inverting, we have

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t)}{K(t)}\, e^{-ixt}\, dt$$

Laplace transform solution: $f(x) = \int_{0}^{\infty} \varphi(t)\,e^{xt}\,dt$. Given the above assumption regarding $\varphi(x)$, we have the invese formula:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx} f(s)\,ds$$

in which the integral is taken over any straight line parallel to the imaginary axis and lying inside the strip ($\alpha < \sigma < \beta$) and the integral has to be understood in the sense of the principle value.

The product $e^{-ax}\,\varphi(x)$ satisfies the above mentioned conditions for

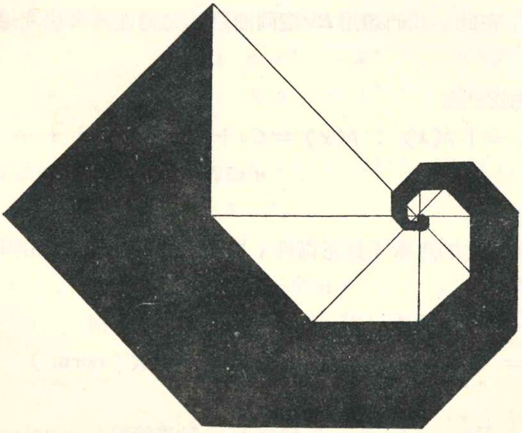
$\varphi(x)$, and in particular integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma x} \varphi(x)\, dx$ is absolutely convergent on ($\alpha < \sigma < \beta$) so that Fourieis formula can be applied to $e^{-a x} \varphi(x)$: $e^{-a x}\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x i}\, da \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma - ai)t} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x i} f(\sigma - ai)\, da$ On introducing the new variable of integration $s = \sigma - ai$ instead of a_0 we in fact get $\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{sx} f(s)\, ds$.

Taken literally, this inverse transform is not unique i.e., two function $F_1(t)$ and $F_2(t)$ may have the same transform $f(s)$. However, in this case $F_1(t) = F_2(t) = N(t)$ where $N(t)$ is a null function mean that $\int_0^{t_0} N(t)\, dt = 0$ for all positive t_0, This result is known as Lerch's theorem.

REFERENCES

V. L. Smirnov : A Course of Higher Mathmatics Volume Ⅳ Integral equation and partial differential equation.

I. N. Sanddoon : The use of integral transform .



一個有關
函數逼進的問題

彭文理

在高微課程裏，函數序列一章，我們都知道均勻收斂（uniform convergent）這個條件所扮演的角色，許許多多的重要定理常靠這個條件完成，而R^n空間的完備性（Completeness）亦爲吾等所熟悉。在此，我們欲以這些觀念來討論--以代數多項式逼近一所給序連續函數的問題：

> $f \in c[0,1]$，$\{p_n\}$爲一在$[0,1]$上均勻收斂於
> f的代數多項序列，若f不爲代數多項式，則p_n的
> 次數無限（非圍界）

以上敍述出自Marsden: Elementary Classical Analysis，它並提示引用Lagrange內插公式來解決此問題，在此，我們想用R^p空間簡單的完備性質來研究這個問題：

首先我們設

$$H_n = \{ p(x) : p(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n, \quad n \in N,\ C_0, C_1, \cdots, C_n \in R \}$$

於是若我們證得了H_n在適當的意識下具完備性，則我們就解決了上面的問題。

《定　義》若$p(x)$爲一代數多項式，$p(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k x^k$，則

$$M(p) = \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| \text{ 稱爲 } p(x) \text{ 的範數（norm）}$$

$$L(p) = \sum_{k=0}^{n} |C_k| \text{ 稱爲 } p(x) \text{ 的擬範數（quasinorm）}$$

我們很快的看出：此時$M(p)$之值和所考慮的區間有關，但$L(p)$則否； 在給定之區間上，它們是具有如下之關係：

【定理1】若$[a, b]$ 爲給定之區間，$n \geqslant 0$，則存在兩正數A，B，使得

$$M(p) \leqslant AL(p)$$

$$L(p) \leqslant BM(p) \quad \text{對所有 } p \in H_n \text{ 皆成立。}$$

證明：因任一n次之代數多項式在$[a, b]$上都是囿界的，所以我們只要取

$$A = \max\{\, |x^k| : k = 0, 1, 2, \cdots, n,\ x \in [a, b] \}$$

則 $$|p(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |C_k|\,|x^k| \leqslant AL(p)$$

所以我們便得到 $M(p) \leqslant AL(p)$

反之：吾人在$[a, b]$上取$n+1$個點x，y，…，t；$x<y<\cdots<t$，則吾人得下列聯立方程組

$$C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n = p(x)$$
$$C_0 + C_1y + C_2y^2 + \cdots + C_ny^n = p(y)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_0 + C_1t + C_2t^2 + \cdots + C_nt^n = p(t)$$

若x，y，…，t及$p(x)$，$p(y)$，…，$p(t)$爲已知，則我們可求出C_k，$k=0, 1, 2, \cdots, n$。

令 $$D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 1 & y & y^2 & \cdots & y^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & t & t^2 & \cdots & t^n \end{vmatrix}$$ 爲Vandermonde 行列式

由於x, y, …, t 爲互異值，所以$D \neq 0$。由Cramer 規則知

$$C_k = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{k-1}, & p(x), & x^{k+1} & \cdots & x^n \\ 1 & y & y^2 & \cdots & y^{k-1}, & p(y), & y^{k+1} & \cdots & y^n \\ \cdots & & & & & & & & \cdots \\ 1 & t & t^2 & \cdots & t^{k-1}, & p(t), & t^{k+1} & \cdots & t^n \end{vmatrix}$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

$$\Rightarrow \quad C_k = l_x^{(k)}p(x) + l_y^{(k)}p(y) + \cdots + l_t^{(k)}p(t)$$

其中$l_x^{(k)}$, $l_y^{(k)}$, …, $l_t^{(k)}$, 完全由$x, y, \cdots, t$ 及k決定而與多項式p無關

$$\Rightarrow \quad |C_k| \leqslant \{\, |l_x^{(k)}| + |l_y^{(k)}| + \cdots + |l_t^{(k)}| \,\}\, M(p)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} |C_k| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \{\, |l_x^{(k)}| + |l_y^{(k)}| + \cdots + |l_t^{(k)}| \,\}\, M(p)$$

取 $$B = \sum_{k=0}^{n} \{\, |l_x^{(k)}| + |l_y^{(k)}| + \cdots + |l_t^{(k)}| \,\}$$

則　　$L(p) \leqslant B\,M(p)$

[係理 I] 若 S 爲 H_n 之任意部分集，則

$$\sup\{M(p):\ p\in S\}<\infty \iff \sup\{L(p):\ p\in S\}<\infty$$

[係理 II] 若 $\{p_m(x)\}$ 爲 H_n 內之多項序列，$p(x)\in H_n$，則 $\{p_m(x)\}$ 在〔a，b〕區間上均匀收斂於 $p(x)$ $\Rightarrow \lim_{m\to\infty} L(p_m - p) = 0$

證明：$\{p_m(x)\}$ 在〔a，b〕上均匀收斂於 $p(x)$

$$\iff \lim_{m\to\infty} M(p_m - p) = 0$$

$$\iff \lim_{m\to\infty} L(p_m - p) = 0$$

由以上係理，我們知道：

(a) H_n 之一子集在一囿界區間上是均匀囿界，則於其他任意之有限區間上亦如此。

(b) H_n 內之一序列於一有限區間內均匀收斂於 $p(x)\in H_n$，則於其他任意有限區間內亦然。

[注　意] (a)(b)中 n 之固定是非常重要的，若非如此，則多項式序列 $\{p_m(x)=x^m\}$ 在區間〔0，½〕上均匀收斂到 0，但在區間〔0，1〕上則否，同時此多項式序列在〔0，1〕上是均匀囿界，但在〔0，2〕上則否。

回憶笛卡兒 n 維 R^n 空間之完備性之另一等價條件：

【BOLGANO-WEIERSTRASS 定理】

若 $\{x_m=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\}_{m=1}^{\infty}$ 爲 R^n 上之一囿界序列，則必存在一收斂之子序列 $\{x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$。

[係　理] 設 $\{p_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ 爲 H_n 內之一多項式序列，$K>0$，且設於〔a，b〕區間內：

$$M(p_m) = \max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|p_m(x)|\}\leqslant K$$

則存在一子序列 $\{p_{m_k}(x)\}$ 收斂於 $p(x)$，$p(x)\in H_n$

證明：設 $p_m(x) = C_0^{(m)} + C_1^{(m)}x + \cdots + C_n^{(m)}x^n$，$m=1,2,\cdots$

設　$x_m = (C_0^{(m)}, C_1^{(m)}, \cdots, C_n^{(m)})$

由 $M(p_m)\leqslant K$ 得

$$\{|x_m| : m=1,2,\cdots\}\leqslant AK$$

$\therefore$ $\{x_m : m=1, 2, \cdots\}$ 爲 R^{n+1} 中之一囿界序列

$\therefore$ 存在 $\{x_{m_k} : k=1, 2, \cdots\}$ 之子序列收斂於

$$y = (C_0, C_1, \cdots, C_n)$$

於是由係理Ⅱ知 $\{p_{m_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 均勻收斂於

$$p(x) = C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n$$

我們便由此知：

若 $\{p_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ 爲 H_n 中之多項式序列在 $[a, b]$ 上均勻收斂於 f，則 $f \in H_n$。於是我們便證得了若

$$f \in C[a, b],\ f \notin H_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

且 $\{p_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ 爲均勻於 f 之多項序列，則

$$\{p_m\}_{m=1}^{\infty} \nsubseteq H_n; \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

同時，H_n 在 $p(x) \in H_n$，$\|p\| = M(p) = \sup_{a \le x \le b} \{|p(x)|\}$ 的定義下，形成完備的綫性賦範空間（complete normed linear space），是一個巴拿赫空間（Banach Space）。

將上面問題推廣到三角多項式的序列逼近，我們得到一個平行的結果；即當 $f \in C_{2\pi}$，若 f 不爲三角多項式，則當 $\{T_n\}$ 爲三角多項序列均勻收斂於 f，T_n 之次數必非囿界，其中 $T_n(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$。

這個推廣的證明亦完全平行於上面問題的證明，即 H_n^T 的假設，$L(T_n)$，$M(T_n)$ 的定義及其假設是相似的。

參考資料

(1) J. E. Marsden, Elementary Classical Analysis.

(2) I. P. Natanson, Constructive Function Theory, Vol. I.

給… 系中在學的學弟們一封信.

沈昭亮

各位學弟們你們好：我是61級的系友，我現在就讀於賓州大學數研所（University of pennsyloania），此校以研究非交換性泛函分析（Noncommutative functional Analysis）的研究著名，有遠自丹麥及近及U of Calif. Berkeley 的人在此研究（這些人都是PH.D.）；其中尤其以C* -algebra，W*-algebra 及其在理論物理上的運用，還有Group Representation 的研究；此處世界級的人物有 E. Calobi（微分幾何及P.D.E.），R.V. Kadison，Fell，E. Effros，Pukansky，S. Sakai；其中Kadison 及Sakai 幾乎操縱這20年來C*-alg.及W*-alg. 的發展，Sakai 現在在研究Derivation（即Frechet：differential在C*-alg.上的推廣，結果很漂亮）。

近年來數學的研究幾乎門門不分家，像一般人認為比較簡單的代數的研究，已到不再簡單的地步（不相信可問陳冒海及呂溪木兩位先生），其中有幾門，如Alg. Num. Theory 及Class field Theory，infinite differential Group Representation 的研究已引入高度分析化的技術，而分析上的研究亦使用代數為工具使問題簡化，不相信你們可回憶或證明：Any maximal ideal on $C[a, b]$ is

$$\{f\in[a,b]:\ f(x_0)=0\}\quad \text{where } x_0\in[a,b]$$

即為分析⊕代數產生的例子，其他的工具像Alg. Topo. 中的Homology Theory，Differential Manifold上的知識更是逃不了的。所以我建議對數學本身具濃厚興趣，而想以後繼續研究它的學弟們在校時把下列的幾項學好，若系中沒有開的話，亦可自己與同學研究，這對你們以後很有好處：

（i） Modern algebra 不能忽略 finite Group Representation Theory 及 Ring and Ideal.

（ii） Banach Space 的基本理論，Real Analysis 及 Complex Analysis 尤其重要，因為它們是重要的工具。

（iii） 基本的Alg. Topo. 像Massey 的書及Dugundji 的後半。

（iv） 微分幾何，如Spivak：Differential Geometry Vol. I。

此外要注意解題能力的培養。

在此，我一直懷念著那段在數學系中的日子，老系館天花板是我常看的地方，老圖書館（在和平東路的時代）是我常翻參考資料的地方。唯一遺憾的是系裡一直無法培養起Seminar 的風氣，當年我，于靖（Yale），段台生（Columbia），賴世

倫（UCLA），裘尚正（Ohio State U.）陳柏會經Seminar過，但我們畢業後就沒聽過有Seminar的產生（可能現在有了），因爲人不能獨學，必須有衆，彼此研究，那怕是解習題也好，同好們聚在一起，每個人講講自己的心得，像我們以前就常在一起研究S. Lang 的Alg.及 Dugundji的Topo.中的定理，習題。剛開始可能會無聊，過一兩個月後就覺得興趣盎然而生，書不必讀多，但要讀好書，雖然它們可能很難，但當你讀完時會發覺收益匪淺，下面是我偏見中的好書及此地教授們認爲的好書，提供你們參攷。

Ⅰ. 分　　析：

ⓐ Mathematical Analysis： Rudin：Principle of Math. Ana.
Loomis：Advanced Calculus.
Widder：Advanced Calculus.（此書提供你解題技巧）

ⓑ Complex Analysis：
Ahlfors：Complex Analysis（郭老師常用的書），Cartan ：Theory of Analytic fn.5 此兩書都不好讀，但很有趣，尤其是Cartan 的書。

ⓒ Real Analysis：
① Royden：Real Analysis（入門書） ② Rudin：Real & Complex Analysis（此書大概是僅次於Hewilt的難書） ③ Diendonne Foundation of Mod. Ana.（此書習題具挑戰性）

Ⅱ. 代　　數：

① Herstein：Topics in Alg.（邱老師常用）很易學，有用。
② Van der Waerden Vol. I. ③ S. Lang Part I. Ⅱ. of Algebra.

Ⅲ. Topology：

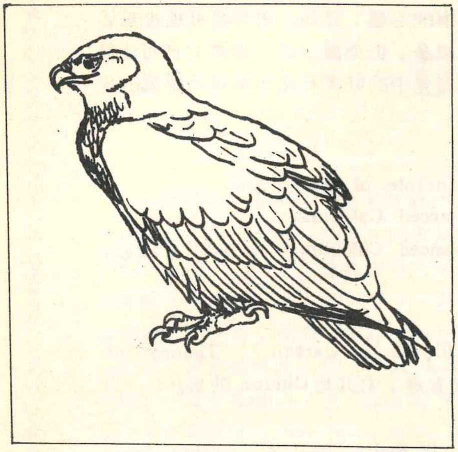
① Kelley：General Topology（生動有趣，但老了些）。
② Massey：Alg. Topo. An Introduction ③ N. Bourbaki 的 Part Ⅰ.

Ⅳ. 微分幾何：

① O'neil：Diff. Geo.
② Spivak：Calculus on Manifold，讀完可讀此人的Diff. Geometry（台大翻印）

希望你們能爲師大數學系爭口氣，爲數學界有所貢獻。祝你們好，並向系中的師長問好。

沈 昭 亮　敬上
十月三日於美國 philadelphia
Math. Depart. U. of P.
David-Ritten house Laboratory 4C19 研究室



數學家中的王子

編輯小組

Carl Friedrich Gauss（1777～1855）是德國布倫玆維克市（Brunswick）的一位泥水匠的兒子，他似乎終身被註定要從事勞力的工作。但當他在接受初等教育之時，由於他的聰穎，遂受到校監 Karl Wilhelm 公爵的注意，而送高斯進入中學並在一七九五年進入格廷更大學（Göttingen），並給予經濟上的援助。在十八歲時，他發明求最小平方的方法。十九歲時證明了正十七邊形可以作圖，這些成功使他覺得應該由語言學方面轉到數學方面。在一七九八年，高斯轉入Helmstädt大學，在此受到以後成爲他的老師兼朋友 Johann Friedrich Pfaff 所注意。在完成博士學位之後，高斯回到布倫玆維克，在此他寫了一些著名的論文，這些著作在一八〇七年爲他獲得格廷更天文學教授職位和天文台的指導員，除訪遊柏林，出席一次科學會議外，他的餘年均停留在格廷更，他不喜歡教書，但無論如何，他欣賞群居的生活，他結婚過兩次，並建立了一個家庭。

博士論文是高斯的第一個主要著作，在此篇論文中，他證明了代數基本定理。一八〇一年，他發表了Disquisitiones Arithmeticae。在微分幾何方面的數學著作－Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas（1827）。他對代數、複數函數、勢論尚有其他許多貢獻。在未發表的論文中，他在兩個主要領域－橢圓函數和非歐幾何－記錄他的改革工作。

在物理方面，他具有同樣廣濶的興趣，且貢獻他大部分力量在這上面。一八〇一年，Giuseppe Piazzi（1746—1826）發現在火星和木星軌道間的小行星時，高斯便開始去測定它的行徑，這是他在天文工作方面的開始，這事深深引起他的專注且獻身於此差不多有十二年之久。Theoria Motus Corporum Coelestium 大體運行論（一八〇九）是他在這方面偉大出版刊物之一。對於理論上或實驗上的磁學，高斯也獲得很大的榮譽。Maxwel 在他的Electricity and Magnetism 中說，高斯在磁學的研究，重建了整個科學儀器的使用、觀察的方法、結

果的預測。高斯的地球磁學論文，是物理研究的模型，而且提供了測量地球磁性領域的最好方法，他在天文學和磁學的研究爲數學與物理學的聯結，帶來了新而且燦爛的時期。

高斯對於他的許多創見，大都半途而廢，並不理會把它們發表。結果，他的全部精神前驅，在他死後被發表前，未爲外人知道。終其身影響所及，使得其他數學家惴惴不安，深恐他們所研究的東西，早已被高斯著了先鞭。

高斯效法栗鼠，埋藏他的寶物，正可以一部分說明他的大成熱情。「不成熟的東西，寧缺毋濫」，這是高斯的座右銘。他的意思是：不願意將明知是死路一條的東西，與數學混在一起；或浪費精力，去從事沒有希望的研究。當法國學士院懸賞，徵求費瑪（Fermat）提出的著名問題，卽費瑪最後定理，成立或不成立的證明時，高斯以不露鋒芒的態度，拒絕參加競賽，足以顯示出其平常對於數學努力的範圍。他寫道：「我自白，我對這個作爲孤立命題的費瑪最後定理，毫不感覺興趣。因爲這種既不能證明其是，又不能證明其非的命題，我很容易寫出許多條來」。這個回答若出自他人，毫無疑問，會被解作無聊的吹牛。但在高斯，却是眞確的事實。這就是他使人稱奇，同僚失望處。

一般人相信，高斯因恐和正統思想離譜太遠，曾將他若干觀念予以保留。例如自歐幾里得以來，一般人都以爲空間係由直線擴張而成，高斯自會想到，有什麼先天理由？空間是由直線擴張而成。及空間是不是可以彎曲？卽一度空間的線長可能是曲線，二度空間的面積可能是曲面，三度空間的體積可能是曲體。這些觀念，在心中雖不難於想像；但它的結果，實在無法表現。故高斯不得不抑制他的考慮，甚或懷疑他的觀念是否穩健。總之，高斯不但是抽象的擁護者，而且係嚴格的實行家。

（本文譯自 KLINE：Mathematical Thoughit from Ancient to Mordern Times 及數學漫談）

尤拉簡史

Leonhard Euler（1707～83）出生於瑞士巴賽爾（Basel）附近，父親是當地的傳教士，他要尤拉研究神學（theology）。在十五歲的時候，尤拉進入巴賽爾的一間大學且完成研究神學的工作。在巴賽爾，尤拉從John Bernoulli學到數學，因而決定更進一步的研究這門學科，且在十八歲時開始發表論文。一七三三年，尤拉獲得一份在俄羅斯聖·彼得堡學院（St. Peterburg Academy）的職務，最初只擔任Daniel Bernoulli的助理，但很快的繼承他而成爲教授。雖然尤拉在專制政府的統治下，經過了一段痛苦的時期（1733～41），令人驚奇的卻做了很多研究，由聖·彼得堡學院所發表的論文中可顯示出，他也從事於物理問題上的探討。由於腓特烈大王（Frederick th Greak）的召見，一七四一年到了柏林，在那裡停留到一七六六年，這段時期，擔任了Anhalt- Dessau這地方公主（Prussia國王的姪女）的教師，課程包括數學、天文學、物理學、哲學和宗教，後來這些科目都被發行，像寫給德國公主的情書（Letters to a German Princess）一樣爲人們所樂於閱讀。在腓特烈大王的要求下，尤拉從事國家保險業、運河和自來水的設計問題。二十五歲停留在柏林的期間，他送了數百份的論文到聖·彼得堡學院並且給予這學院在事務上的些建議。

一七六六年，儘管他深怕那已衰弱的視力，受到嚴寒氣候的影響，（他在一七三五年失去一眼），但在俄國女皇加德琳二世（Catherine the Great）的要求下，仍然回到了俄羅斯。在回到俄羅斯不久之後，他的視力受到影響而瞎了，使得他一生的最後十七年完全生活在黑暗中。雖然如此，但其成就仍不遜於以前。尤拉有著驚人的記憶，默記了三角、分析的公式和前一百個質數的前六次冪的值，他的記憶是如此的不尋常，以致於對大多數數學家來講，他們猶感到繁雜的數字計算，他却能夠心算，而絲毫不覺困難。

尤拉的數學創作之多，令人難以置信，其主要的數學領域包括微積分、微分方程、曲線和曲面的微分幾何、數論、級數及變分學。並且把這些數學應用到整個物理界上，而創出分析力學和剛體力學的學科。計算行星的軌道及拋射體的路徑在阻抗介質中受天體干擾的影響。在音響方面，他研究聲音的傳播及樂音協和與否的情形。他的三本有關光學儀器的書，對

於望遠鏡及顯微鏡的設計有不少貢獻。他是第一個以分析方法去處理光的振盪，並導出運動的方程式，用以計算彈性與以太（ ether ）密度的關連，並且得到許多關於光的折射和色散的結論。在光學上，他是十八世紀裏唯一贊成光波說法而反對光粒子說法的科學家。並且將自己所創理想液體運動的基本微分方程式應用到人體血液的流動。在熱學方面，他和Daniel Bernoulli 認為熱是一種分子的振盪，他的著作Essay on Fire（1738 ）曾得過獎。在化學、地理學、製圖學方面，也有著濃厚興趣，曾為俄羅斯製了一幅地圖。這些應用可視為他對數學的憑據，但毫無疑問的，他對理論和應用兩方面都很喜歡。

尤拉寫的教科書關於力學、代數、數學分析、幾何分析、微分幾何和變分學，在一百年以後，甚至更久，亦將是標準的作品，所有尤拉的書都包含著高度的創見，例如，在力學他以勝於幾何方法的分析方法為基本；以特殊方法去處理變分學。除了教科書之外，他所發表的研究論文約在每年八百頁左右，這些論文的數量，可由得獎的事實看出來，獎金幾乎變成他固定的額外收入，而且，有幾本書和四百多份研究論文尚是在他完全瞎了之後所寫出來的。

尤拉不像生在其前的Descarts 或Newton或其後的Cauchy 。他並沒有開展出新的數學支派，但沒有一個人的作品如他那樣的豐富或是那樣精明的處理數學，沒有人能收集且利用代數、幾何和分析的資源去導出許多令人讚賞的結論。尤拉在方法學上就如同一位專門技師似的具有偉大的創造力。吾人可以發現他的名字在數學所有的支派上有尤拉公式、尤拉多項式、尤拉常數、尤拉積分和尤拉線等。

吾人也許會猜想他如繼續有如此龐大的創作，唯有犧牲所有其他方面的興趣，但尤拉雖身為十三個孩子的父親，亦時常注意到家庭的福祉，教導孩子和孫子們，且為他們設計科學遊戲，並利用晚上的時間為他們講聖經。他也喜歡發表自己在哲學上的看法，但這正顯示了他唯一的弱點，為此他常遭Voltaire 的責罵，有一天，他被強迫供認：從未研究過任何一本哲學書，且承認：一個人能了解哲學而不去研究它是錯誤的。但尤拉對哲學爭論的精神並不因此而氣餒，並且繼續哲學上爭論，也樂於接受Voltaire 的嚴厲批評。

（本文譯自 Kline : Mathematical Thought from Ancient to Modern Times .）

六十六學年修訂課程表

科目	規定學分	第一學年		第二學年		第三學年		第四學年		備考
		上	下	上	下	上	下	上	下	
初等微積分	10	5	5							
線型代數	4	2	2							
普通物理	8	4	4							含實驗
高等微積分	10			5	5					
代數㈠	6			3	3					
微分方程	4				4					
代數㈡	6					3	3			
複變數函數導論	4					4				
拓璞學導論	4						4			
機率與統計	6					3	3			
數學教育研究	4					2	2			
微分幾何	6							3	3	
實變數函數導論	3							3		
機率論	3								3	
合計	78									

附錄：（科目名稱右旁的數字爲學分數）

甲、整數論⑷，射影幾何⑷，二上開設，二科必選一科。

乙、線型規劃⑶，數值分析⑶，必選一科。

丙、級數論⑶，非歐幾何⑶，泛函導論⑶，必選一科。

【註】本課程表呈報教育部核定中，自下學年度（70級）起施行。

編後語

本期「師大數學」的出版已經是第十一期了，回顧過去十期的系刋，在歷屆學長們的苦心籌劃下，一期比一期進步，一期比一期充實，而有了今日的成果。因此，在開始著手編輯本期系刋時，首先浮現在腦海中的意念便是如何確實負起這承先啓後的使命，來維護這塊學長們爲我們開闢的園地，使之從這一個新的開始，邁向另一個更新的階段，並且更加發揚光大。

由於一、二年級同學的踴躍投稿，帶給了我無比的信心，更覺得可喜的是由此顯示出系裏研究風氣的興盛，同時也顯出這幾年來學會文教股所致力研究風氣的提高，已逐漸有了成效，然而風氣之形成，決非端賴這少數同學的努力，就能達成，縱然各項學術活動在開始實行時，難免遭遇到困難，而無法有立竿見影之效，但仍希望由這些同學繼續努力，全力來推動，使這顆埋下的種子，不致枯萎，有朝一日，能得到雨露的滋潤，生根發芽，進而有豐碩的華實。

這一期系刋的寫作方式，盡量避免用標明「定義」「定理」這種方式來敘述，而流於教科書般的呆板與乏味。我們力求以申論，說明的方法來引出所要介紹之觀念或性質，以提高閱讀的興趣。至於系刋的內容，除了在分析，代數………等各方面之專題討論外，對於發展經過與應用方面也大略的提到，爲了更切合同學們之實際需要，特請李嘉淦教授爲我們談談大家所必經的一環　　「試教」；藉此，引起大家對「數學教育」的重視，使得往後有關「數學教育」方面的討論，能常常在我們的系刋中出現，同時，遠在美國的郭王月娥及沈昭亮兩位系友，雖然身在海外，而心繫母系，我們僅在此由衷的感謝他們對系刋的關懷，以及對同學的勉勵。

我只希望本期系刋的內容，是同學們所需要的，也是同學們所想要的，願它能帶給大家一點東西，不致淪爲書架上的裝飾品。由於個人能力所限，如不能令大家滿意，而有不理想或疏漏謬誤之處，概由我個人負完全責任，尚祈　各位讀者不吝指正，是幸！最後，預祝第十二期的系刋能更圓滿、更成功！

主編　李孟峰　謹誌

肩負起

神聖使命

六十五學年度數學學會組織概況

常務理事：賴武袁（三甲）
副常務理事：李玉芳（夜五）
常務監事：楊和松（三丙）
總務股長：李金財（三甲）
文教股長：蕭和達（三丙）
康樂股長：王啓中（二乙）
體育股長：柯坤山（二甲）
衞生股長：許淑慧（二甲）
交通股長：林和成（二甲）

系刊主編：李孟峰
編輯：陳創義
游寶達
許淑慧
顏麗玲

理事：翟愛一（四甲） 張文德（四丙） 駱炳宏（三甲）
張天民（三乙） 林嘉宏（三丙） 簡進財（二甲）
楊紹民（二乙） 李 麟（夜四） 蔡青柳（夜三）

監事：張健華（四丙） 葛麗珠（夜五）

師大數學　第十一期

發行人：常法徽

出版者：國立台灣師範大學數學學會

學會理事長：賴　武　衷

主　　編：李　孟　峰

編　　輯：陳　創　義　　游　寶　達
許　淑　慧　　顏　麗　玲

排印者：協進圖書有限公司

地　址：台北市羅斯福路三段316巷9弄4號

電　話：393-8837

出版日期：中華民國六十六年六月十日

師大訓課刊登第136號