師大數學系刊

創刊號

M

DEPARTMENT

OF

發刊詞

假如說：「系刊是一個系靈魂所寄，精神所在的刊物。」誠然不為過。從系刊內立言的良窳，可以窺測一個系水準的高低；從著論的優劣可以審知一個系研究風氣的興衰。因此系刊的編輯乃是一種嚴肅而慎重的工作，這就是數年來系刊遲遲未能發行的緣故。

但是系刊的功用不容忽視，而因果循環乃自然界千載不易的道理。研究風氣不夠，水準不佳，固不能著言立論；反之，沒有發表園地，缺乏創作譯述的指導與鼓勵，風氣不易激揚，水準亦不易提高，循循相因，乃無法跳出守舊的窠臼。

「好壞總得有個開頭」，因此我們不惴翦陋，貢獻全力，促使這本刊物出版。我們在師長約稿的信中，曾說過這樣一句話：「任雖重，道雖遠，而責任則不可推卸。」，這句話最能代表我們的心情。這本刊物總算出版了，我們希望這是一個好的開頭；希望這本刊物能在平穩、慎重的工作下，期期有進展，我們也希望本系同學能在這本刊物中尋得寄託，寫出夠水準的文章，發表實在精闢的見解。最後，讓我們為系刊的誕生乾杯！

數學學會常務理事　陳勝雄謹誌

目　錄

從歐幾里德的第五公設談起

康 洪 元

歐幾里德所著 Elements 一書，其述寫方法（設理化方法）在數學思想及組織上，可以說是一個重要的里程碑，其影響及於科學之研究，是難以想像的。很可惜，如此偉大而流通至廣（發行之多，僅次於聖經）的巨著，開始問世日期，並不可考。由於翻譯與改版， Elements 的原始面目， 也無法得悉。根據 Heath 的譯本， Elements 的第一冊（共十三冊）有二十三個定義，五個公設（Postulates）五個共同概念（Commonnotions）今列舉若干如下，以見一斑。

定 義

(1)點為無部份之物（A point is that which has no part）

(2)線有長而無寬（A line is length without breath）

(3)線之端為點（The extremities of a line are ponits）

(5)面為僅具長寬之物（A surface is that which has only length and breath）

(13)事物之極謂之界（A boundary is that which is an extremity of anything）

(14)圖形為由界所圍成者(A figure is that which is contained by any boundary or bounduries)

公 設（Postulates）

1 通過兩點可作一直線（A straight line can be drawn from any ponit to any ponit）

2 一有限直線可以連續無限延長（A finite straight line can be produced continuously in a straight line）

3 以任一點為中心，任意長為半徑可作一圓 （A circle may be described with any center and distance）

4 凡直角皆相等（All right angles are equal to one another）

5 若一直線截二直線，其在同側兩內角之和小於二直角，則將二直線無限延長時，必在該側相交（If a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side together less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which the angles are together less than two right angles）

共同概念（Common notions）

1 等於同物之物皆相等（Things which are equal to the same thing are also equal to one another）

2 等量加等量，其和相等（If equals be added to equals, the wholes are equal）

3 等量減等量，其差相等（If equals be subtracted from equals, the remainders are equal）

4 合同之物，彼此相等（Things which coincide with one another are equal to one another）

5　全量大於分量 (The whole is greater than the part)

現撇開「定義」與「共同概念」不論，而專考諸公設。

第一第三兩公設爲直線圓作圖可能公設。

第一二兩公設表示過二點的直線與延長部份爲同一直線。

第四第五兩公設與第一二三諸公設，顯然大不相同。

第五公設亦稱平行公設，"Elements" 一書中，直至第二十九個命題，始用及此公設，數學家們於是開始懷疑，此一公設，是否需要？換言之，是否可以作爲定理，予以證明，爲尋求證明，此公設之形式，曾有多種改換，蘇格蘭數學家 John playfair (1748—1819) 曾將其改變爲「過直線外一點，有唯一之直線與已知直線平行(Through a given point can be drawn only one line parallel to a given line)，但證明並未完成。於是數學家們想用間接證法以解決此一問題，此法之基石，實根據古典邏輯中之兩定律，矛盾律 (law of contradiction) $(P\wedge P')'$ 及排中律 (law of excluded middle $P\vee P'$)。矛盾律斷言一命題不能旣爲眞又爲僞。排中律斷言，一命題爲眞或爲僞。

匈牙利數學家 Johann Bolyai (1802—1860) 承其父之衣鉢，對平行公設，曾詳加研究，彼曾宣稱：「我已從無有創造出一新奇之宇宙 (out of nothing I have created a strange new universe)，彼之主要旨趣在於彼之所謂「絕對科學空間 (The absolute science of space)，彼之研究中，無涉於平行公設的理論與歐氏幾何之理論一完全相和諧，而成爲一派非歐幾何，所謂非歐幾何，實即不承認平行公設之幾何。Bolyai 雖首創非歐幾何，但並未將其成果，作有系統之介紹。俄人 Lobachevsky 於1840年，曾以德文著述一書，名爲 "Geometriche Unter such ungen zur Theorie der Parallelinien"彼假定「過已知直線外一點，可作多條直線與已知直線不相交，「用此以代替平行公設，由此假定，可證明三角形三內角之和小於180°，此種幾何，亦稱雙曲線幾何學，適用於太空之研究。

繼 Lobachevsky 之後，德人 Riemann 於 1854 年，發表另一非歐幾何，此種幾何，不承認平行線之存在。其理論對於近代「抽象空間」概念之發展，有莫大之影響，且適用於相對論，其簡單結論之一，爲三角形三內角之和大於 180°，此種幾何，又稱爲橢圓幾何學，而歐氏幾何，則稱爲拋物線幾何學。

就吾人通常之直觀，歐氏幾何，最爲實用，今日中學課程中之幾何，其內容多係根據 Hilbert 修訂歐氏 Elements 而成。

數學之哲學中，有所謂直觀主義，直觀主義者以爲數學之建造，應基於無限自然數之數列，以有限次數之創造方法，基於此種觀念，則數學之原始基礎，實自直觀以聯絡吾人之意識，由此，以使吾人確認一事物，而後再確認一事物，如此以往而無端，直觀主義者不接受「不存在之假設」以得矛盾。前述之所謂「排中律」即不爲直觀主義者所接受！就下之實例考之，設吾人定義X爲一數$(-1)^K$，此處K爲一數，此數爲 π 之展式中，小數位爲１２３４５６７８９之前之數字位數，若無此種K存在，則定義 $X=0$，就命題 "$X=0$ 而言，直觀主義者不接受此命題爲眞或爲僞。蓋「K不存在」之證明，不能以有限次步驟以建立也。

接受排中律的邏輯，是爲二値邏輯 (two-valued logic)，不接受排中律的邏輯，是爲多値邏輯 (many-valued logic)，以常理推斷，排中律似應爲「人人承認的眞理」然而，直觀主義者竟不接受，豈非天下「奇聞」！凡識之者曰：非也。奇聞有甚於此者：若干人士，將「公理」(postulate or axiom) 解釋爲人人承認，處理萬事萬物的基本道理，有些「政治人物」不明「無定義名詞」而大言不慚，高談數學改革之不當，以爲 ∪, ∩ 爲數學中不必要的記號，以爲 $A\times B\neq B\times A$ 是無稽之談，有強權而無「公理」，莫此爲甚，値此數學教育改革之際，師大數學系同學，宜努力充實學問，爲眞理而奮鬪也。

一圓有二心

劉 季 植

前 言

數學的知識，到今天還沒有之懷疑它的絕對性。事實上，各種學科討論到高深的境地，無不假用數學作探討以及利用數學方式表現其事理。但是學習數學無從倖成，必須經過經年的磨煉，揣摩，才能獲得些許數學的修養。

數學的工作，具體說來是從假設的條件推論到必然的結論。雖然這句話不能完全的描摹數學的內容，也可算爲一句很中肯的話。推理當然要求合乎邏輯，數學中所謂合邏輯，除無定義名詞，公設以及由此推論而得的結果稱爲定理等作爲推理的唯一根據外，不得應用未經證明的「理」，亦不得認爲「當然」的結果。「當然」在數學中的含意是旣經證明或確定可以證明。否則在推理中稍有不愼，引入誤途，全功盡棄，甚至導致一與已經證明之定理或定義中軒然矛盾之現象，大惑而不解。

數學可以由任何人創造，這是屬於自由的一部份，由不同的模造(model) 發展爲不同的數學，例如可以認爲二平行線無交點，也可以認爲有交點，（有限空間，無限空間的區別），又例 $ab\neq ba$, $a\cdot b=0$ 而竟 $a\neq 0$, $b\neq 0$ 等在某一系制中爲合理，而在另一系制中屬於不合理，討論某一系制中的數學必須用同一系制中的定義，公設及定理，則無自由之可能，必須循規蹈矩，愼微嚴思，庶幾臻於完善，此其間，有三點特需注意：

A．數學中討論之事物，其存在問題不能任意決定，應述其存在之理由，旣經證明存在之事物若係獨一的，亦應有其根據，若係多個的同樣應述其可能性。

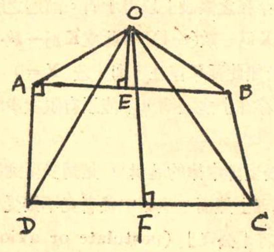
B．推理中隨時運用定義，公設及定理時，當縝密思慮是否適宜。

C．尤於幾何作圖時，幾何事物雖可證明存在，其位置如何，應考慮可能之位置。

以上三端對於處理數學問題並非充分的而爲必要的。充分的要求尙包括偶爾的靈觸以及有條理的探索，鍥而不捨的精神等。捨此不圖，則導致舛誤以及怪誕而不解其根由，其例甚多，玆擧數則介紹如下：

I 「直角等於鈍角」

設有四邊形ABCD，∠A爲直角，∠B爲鈍角，邊AB＝邊CD，E及F爲邊AB及CD之中點過E作AB垂線，過F作CD垂線。設此二垂直平分線交於O，聯OA，OB，OC，及OD。



圖一

則 OA＝OB, OC＝OD，

又已知 AD＝BC

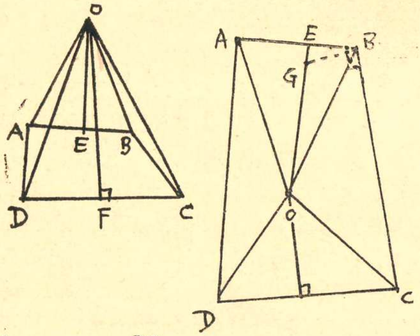
故 △OAD≅△OBC，

又 ∠OAD＝∠OBC，

但 ∠OAE＝∠OBC，

等量減等量，∠OAD－∠OAE＝∠OBC－∠OBA，則直角∠DAE＝鈍角∠EBC。

分析 此一證明，單從文字之敍述，似乎無疵可指，但結果與角之定義一直角不等於鈍角相悖，究竟關鍵何在？當然錯誤在圖形，O點確屬存在，因∠D≠直角（否則∠B不爲鈍角），即AB∦DC，垂直於此二不平行之直線之垂直線(在平面上）必相交，故必有且僅有一交點，此O點位置，須視AD關

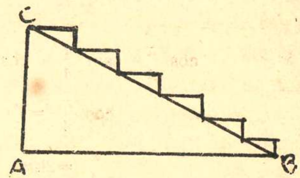


圖二

於ＡＢ之相對長度而定，Ｏ點應在四邊形ＡＢＣＤ之內域，或在ＡＢ之上側，若Ｏ點在ＡＢ上側，必使ＯＤ及ＯＣ在ＢＣ之異側始爲Ｏ點正確之區域，又若Ｏ點在四邊形內域（Ｏ在ＡＢ上亦不成立），設過Ｂ作垂直線交ＡＢ之中垂線於Ｇ，則Ｏ點應在Ｇ點以下。如作Ｏ點於ＥＧ間或在Ｇ點，仍屬導至舛誤圖形，以舛誤之圖形作爲論斷，其結論不合，自屬意料中事。

Ⅱ 「直角三角形兩股之長等於斜邊」

取一任意直角三角形 ＡＢＣ ，在斜邊ＢＣ上取點分爲ｎ等分，過每點引兩股之平行線得一齒形之折線，其中平行於ＡＢ之折線和爲ＡＢ，又平行於ＣＡ之折線和爲ＡＣ，故此折線之和爲ＡＢ＋ＣＡ。今使ｎ無限增加，例如令ｎ爲 2,4, 8, 16, 32,……，則每一折角兩邊之和以Sn表示之，Sn趨於O爲極限，亦卽



圖三

$$\lim_{n\to\infty} S_n = AB+AC\text{，而}\lim_{n\to\infty} S_n = BC\text{，}$$

$$\therefore\quad AB+AC=BC$$

分析　此一證明顯然在極限之意義上發生錯覺，因由定義 $\lim_{x\to a} f(x)=A$，須對應於每一 ε 有一 δ 存在，使 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 而 $0<|x-a|<\delta$ ，此一定義對於本例而言，⑴ $f(x)$ 須因 x 而變，⑵ $f(x)-A$ 雖爲微小之量但不爲O，而現在應用 $f(x)$ 爲 S_n，S_n不爲變數，始終爲$AB+AC$，又應用 $|f(x)-A|$ 爲 $|S_n-BC|$，此時 $|S_n-BC|=AB+AC-BC\nless\varepsilon$，總之， $\lim_{n\to\infty} S_n=BC$ 之主張在應用極限時發生舛誤故導致怪誕。

Ⅲ 「三分任意角」

幾何作圖問題中，二分任意角爲可能，因之 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{16}$，$\frac{1}{64}$，……$\frac{1}{2^{2n}}$ 均屬可能，利用

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots\cdots\cdots$$

由無窮等比級數甚易證明此等式之成立：$\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{4}{4}}=\dfrac{1}{3}$，因之三分任意角爲可能。

分析：此一問題前年臺北某報載有此一偉大發明，我們的感想是：

⑴在 Euclid 幾何中卽使允許用無限次作圖，已不能算發明。

⑵用尺邊 (Unscaled rule)及圓規，用分析法早經證明爲不可能，方程式論中常有此一不可能性之證明。

⑶歐氏幾何中作圖祇許用有限次之規定，其善惡是另一件事，既討論其中問題，必遵循其規矩是必然

的。

Ⅲ 「$\frac{\pi}{4}=0$」

試觀下述之敍述：

因 $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$ 及 $\tan\frac{\pi}{4}=1$

故 $1+\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{4}$

卽 $1+\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=\tan\frac{\pi}{4}$

利用 $\tan\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}/\cos\frac{\pi}{4}$，消去 $\tan\frac{\pi}{4}$，

$$\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}$$

集項，

$$\cos\frac{\pi}{4}\left(\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}$$

則 $\cos\frac{\pi}{4}=1$，

$$\frac{\pi}{4}=2k\pi，$$

$k=0$， $\therefore\ \frac{\pi}{4}=0$，

讀者自易察出錯誤在「除以○」

Ⅴ 「銳角之餘弦大於1」

試觀敍述：

設 α 爲銳角，則 $\cos\alpha=\cos\alpha$，

取對數， $\log\cos\alpha=\log\cos\alpha$，

左側取二倍，右側不變，有

$$2\log\cos\alpha>\log\cos\alpha，$$

卽 $\log\cos^2\alpha>\log\cos\alpha$，

約去 $\log\cos\alpha$，得 $\cos\alpha>1$，

註：讀者已否覺察錯誤所在？

Ⅵ 「任意二等數之和爲0」

試觀敍述：設 $a\neq0$ 書

$$x=a，$$

則 $-4ax=-4a^2$

移項 $-4ax+4a^2=0.$

加減 x^2，配方， $(x-2a)^2=x^2$， $x-2a=x.$

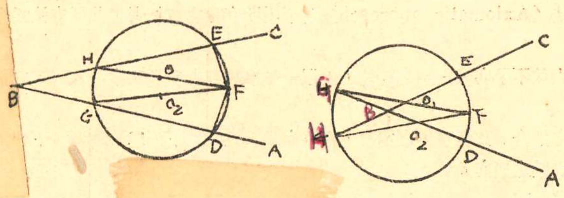
而 $x=a$， $a-2a=a$，

$-a=a$， $\therefore\ 0=a+a.$

註：錯誤何在，注意 $A^2=B^2 \Rightarrow A=B$ 或 $A=-B$ 此二結果可能同時成立，可能不同時成立。

Ⅶ 「每一圓有二圓心」

作一任意角ABC，在AB及BC二邊上各取一點D及E，過D及E各作二邊之垂線，因此二邊不平行，必有一交點F．過D．E．F作圓，（E．F．D不在一直線上，故可作）B點或在圓DEF之內或在此圓之外，均設此圓交AB及BC或其延線於G及H聯HF及GF，則得二直角三角形 GDF 及 HEF各內接於此圓，而D為直角，弧GHEF為半圓周，同理E為直角，弧HGDF亦為半圓周，因此圓心各在GF及HF上，但HF，GF為二異直線，故得二圓心 O_1 及 O_2.



圖四

分析　讀者自行判別其錯誤。

後　　語

以上所舉之例，若未經揭其謎底，且未經稍作深入之解析誠然可導致迷惑不解之地步，特書意見如下：

1.數學問題中一時迷茫現象，細察其故則可，若懷疑其公設系制之相合特性 Consistency（四種特性相合性，完整性，獨立性，明確性中相合性最為重要）誠屬不必。

2.論證至一矛盾，可能命題之條件不合，可能援用定理舛誤，可能作圖有誤。

3.幾何問題中，討論一事物之存在當嫌不足，進而應考慮此事物正確位置之範圍，一般而言，根據某條件作一直線作一圓等已非任意性質，此圖形必須符合已予條件，否則發生舛誤。

4.欲求一數學證明之完整正確，應注意每一步驟之安全性，安全性僅可由細思明辨而得，稍有存疑，立予澄清，方可臻於至善之境。

5.數學教學中，書本列材僅及舖敍，教以如何思考，則甚難涉及，但以教學而論，基本方法之運用及思考能力之培養重於教材，此亦今日倡導新數學之旨趣所在，有心人當已思慮及此，至於推行可有效果，愚意若能在平時教學中，有意無意之間，有形無形之中，推介此類迷惑問題，不但學生最感興趣，且能豐獲細思明辨之訓練目的。

向量空間(Vector spaces)淺介

王 詩 頌

本篇之目的在介紹一種公理方法（Axiomatic approach）用以說明向量之運算者，此種方法爲今日大多數數學家所採用。

在用公理方法討論向量時，吾人並不予向量一詞之定義，僅以一羣事物具有某種基本性質時，即稱此種事物之本身爲向量。

所謂向量空間者，乃一羣事物之集合，此種事物之本身，稱爲向量，且合於下列二公理者（下列諸文字之上方有箭頭者表向量，否則表實數之無向量）。

（A）加法公理，對於任二向量$\vec{u}$，$\vec{v}$言，吾人定義其和仍表一向量，以$\vec{u}+\vec{v}$表之，稱爲和向量

（B）乘法公理，對於任一向量$\vec{u}$及任一實數c言，吾人定義其積仍表一向量，以$c\vec{u}$表之，稱爲積向量上列（A），（B）二公理所定義之和向量，與積向量且具有下列諸性質：

(1) $$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$$

(2) $$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

(3)對於任一向量$\vec{v}$言恆有一唯一之向量$\vec{O}$存在，稱爲零向量，可使

$$\vec{o}+\vec{v}=\vec{v}$$

(4)對於任一向量$\vec{v}$言，恆有一唯一之向量（$-\vec{v}$）存在，可使

$$\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{o}$$

(5) $$c(\vec{u}+\vec{v})=c\vec{u}+c\vec{v}$$

(6) $$(c+d)\vec{u}=c\vec{u}+d\vec{u}$$

(7) $$(cd)\vec{u}=c(d\vec{u})$$

(8) $$o\vec{u}=\vec{o}$$

(9) $$1\vec{u}=\vec{u}$$

(10) $$(-1)\vec{u}=-\vec{u}$$

關於任二向量之差$\vec{u}-\vec{v}$吾人定義爲$\vec{u}+(-\vec{v})$

至於k個向量之和$\vec{v}_1+\vec{v}_2+\cdots\cdots+\vec{v}_k$，由性質，(2)吾人書寫時當不可必加括弧，其意義自明，又由性質(1)，此種個向量之和與次序無關，

設一向量可用下列形式之和

$$c^1\vec{v}_1+c^2\vec{v}_2+\cdots\cdots+c^k\vec{v}_k=0$$

表示者，則稱該向量為k 個向量 $\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$，……$\vec{v}_k$ 之一線性結合，式中 c^1, c^2,……,c^k 表 k個結合常數，吾人應注意者，諸 c 右上方之數字表上標，並非指數。

關於k 個向量 $\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$，……，$\vec{v}_k$ 言，設有不皆為零之k個常數 c^1, c^2,……c^k 存者，可使下列等式成立者：

$$c^1\vec{v}_1 + c^2\vec{v}_2 + \cdots\cdots + c^k\vec{v}_k = 0$$

則稱此k個向量成平直相關，反之，欲該等式成立時，必須 $c^1=0$, $c^2=0$,……$c^k=0$ 者，則稱此k個向量為平直無關。

設在一向量空間中，有一組 n 個向量 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$,………, $\vec{e}_n$，合於下列二條件：

(i)該組向量為平直無關者；

(ii)該向量空間中任一向量，恆可用該組向量之一線性結合表示者，則稱此 n 個向量構成該向量空間之一基本系 (Basis)。

設一向量空間中有一基本系，該基本系恰由 n 個向量所構成者，此處 n 表正整數，則稱該向量空間為 n 度空間，或 n 度有限空間。

至於無限多度向量空間，本節不予討論，通常吾人稱一向量空間為有限度者，意即指該向量空間中至少有一基本系係由有限個向量所構成者，於此，發生一問題，即同一向量空間之基本系可否多於一？設如可能，則此某基本系中所含之向量是否均相同？顯然，該二問題之答案均為 "Yes" 蓋在任何n度向量空間中，恆有無限多方法選取 n 個向量 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$,………, $\vec{e}_n$ 作一基本系，惟不論如何選取，任一基本系中所含之向量必為n個，換言之，如一向量空間既為n度又為m度時，則必m=n，否則為不可能。

實際上，吾人討論一基本系之向量時，均視該組向量為一次序性之集合，例如，設 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$,……, $\vec{e}_n$ 為一基本系，若取不同之次序時，則形成不同之基本系，按此慣例，吾人稱 $\vec{e}_k$ 為該基本系中第k 個基本向量（或基本元素）。

由基本系之性質 (ii)，在一 n 度向量空間之任一向量 $\vec{v}$ 恆可用基本系中 n 個向量之線性結合表之，令為。

$$\vec{v} = v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + \cdots\cdots + v^n\vec{e}_n$$

吾人應注意者，關於同一向量 $\vec{v}$ 言，此種表示法，祗有一種。蓋如有他種形式時，令為

$$\vec{v} = c^1\vec{e}_1 + c^2\vec{e}_2 + \cdots\cdots + c^n\vec{e}_n$$

由二式相減得

$$(v^1-c^1)\vec{e}_1 + (v^2-c^2)\vec{e}_2 + \cdots\cdots + (v^n-c^n)\vec{e}_n = 0$$

按基本系之性質(i)及平直無關之定義吾人知此時必爲$v^k-c^k=0(k=1,2,\cdots\cdots n)$，於是數列$(v^1, v^2,\cdots\cdots v^n)$及$(c^1, c^2,\cdots\cdots c^n)$全同。

關於基本系$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，………，$\vec{e}_n$言，吾人稱$\vec{e}_k$之係數v^k爲向量$\vec{v}_1$之第k個分量(Conponent)，且即以數列$(v^1, v^2,\cdots\cdots v^n)$表向量$\vec{v}$

$$\vec{v}=(v^1,v^2,\cdots\cdots v^n)$$

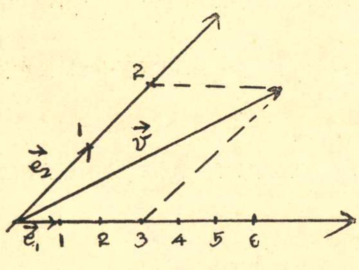
有時亦以「坐標」一詞代替分量，此時之數列，亦稱坐標數列或n重坐標數組(Coordinate n-tuple)，因此，在同一向量空間中，每一基本系確定一坐標系(Coordinate system)。

關於同一基本系言，若以數列$(v^1,v^2,\cdots\cdots v^n)$代表向量$\vec{v}$，以數列$(u^1,u^2\cdots\cdots u^n)$代表向量$\vec{u}$時，則$\vec{u}+\vec{v}$之和向量，可以數列$(u^1+v^1, u^2+v^2,\cdots\cdots,u^n+v^n)$表之，又如c爲任意常數時，則$c\vec{v}$之積向量，可以數列$(cv^1,cv^2,\cdots\cdots,cv^n)$表之。因此，若以坐標數列爲基礎時，則討論n度向量空間與討論n度笛卡爾空間之情形相同。

吾人所定義之度向量空間，一般言之，不作任何推廣。此種空間之某種特殊情形，可視爲n度笛卡爾空間，惟通常無一定之方法可使向量空間與笛卡爾空間全同，蓋一n度向量空間可用無限多不同之方法表示n度笛卡爾空間，如該向量空間有無限多基本系然。

爲說明向量空間之實際概念起見，茲舉數例於後：

例一　設$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$爲同一平面上不平行之任意二向量(即該二向量之一，不爲他一向量與一無向量之積)，即$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$表平直無關之二向量，且該平面上任一向量恆可用該二向量之線性結合表之。因此，$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$構成一基本系。



例如左圖中之向量$\vec{v}$可用$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$線性結合表之

$$:\ \vec{v}=3\vec{e}_1+2\vec{e}_2$$

關於基本系$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$言，向量$\vec{v}$之坐標數列爲(3，2)，$\vec{e}_1$爲第一基本向量，$\vec{e}_1$爲第二基本向量。

例二　在普通空間中，令$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$爲不共面且皆不爲零之三向量。就普通空間中所有之向量言，$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$三向量形成該向量空間之一基本系，如欲該基本系變爲笛卡爾直坐標系時，必須$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$三向量兩兩垂直且均爲單位長度，。

吾人應注意者，按向量空間之定義，並未提及角度之大小及線段之長短等度量概念，因此，吾人討論向量空間時，並不涉及「垂直向量」或「單位向量」等術語。

例三　設R^n表n度笛卡爾空間，則R^n爲一n度向量空間，欲證R^n爲一 n 度向量空間，吾人祗須證明下列 n 個向量：

$$\overrightarrow{\underset{1}{e}}=(1,0,\cdots\cdots,0),$$

$$\overrightarrow{\underset{2}{e}}=(0,1,\cdots\cdots,0),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overrightarrow{\underset{n}{e}}=(0,0,\cdots\cdots,1),$$

構成R^n中一基本系卽足，該基本系稱爲R^n中之自然基本系(Notural basis)。

例四　在R^n中，除自然基本系外，尙有無限多其他基本系，例如在R^4中，除自然基本系　(1,0,0,0)　(0,1,0,0)，　(0,0,1,0)，　(0,0,0,1)
外，下列四向量

$$\overrightarrow{\underset{1}{e}}=(1,-1,0,0),$$

$$\overrightarrow{\underset{2}{e}}=(1,1,0,0),$$

$$\overrightarrow{\underset{3}{e}}=(0,0,2,0),$$

$$\overrightarrow{\underset{4}{e}}=(0,0,0,1),$$

亦構成一基本系，玆證其合於基本系之二條件

(i)該四向量係平直無關者，蓋由方程式

$$c^1\overrightarrow{\underset{1}{e}}+c^2\overrightarrow{\underset{2}{e}}+c^3\overrightarrow{\underset{3}{e}}+c^4\overrightarrow{\underset{4}{e}}=0$$

比較其分量得

$$(c^1+c^2,\ -c^1+c^2,\ 2c^3,\ c^4)=(0,0,0,0)$$

於是，$c^1+c^2=0, -c^1+c^2=0,\ 2c^3=0,\ c^4=0$ 聯立解之得 $c^1=0,\ c^2=0,\ c^3=0, c^4=0$。故該四向量爲平直無關。

(ii)任一向量恆可用該四向量之一線性結合表示，設(x^1,x^2,x^3,x^4)表R^4中任一向量，則該向量可書爲下列形式：

$$v^1\overrightarrow{\underset{1}{e}}+v^2\overrightarrow{\underset{2}{e}}+v^3\overrightarrow{\underset{3}{e}}+v^4\overrightarrow{\underset{4}{e}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

或

$$v^1(1,-1,0,0)+v^2(1,1,0,0)+v^3(0,0,2,0)+v^4(0,0,0,1)=(x^1,x^2,x^3,x^4)$$

卽

$$(v^1+v^2,-v^1+v^2,2v^3,v^4)=(x^1,x^2,x^3,x^4)$$

於是 $v^1+v^2=x^1,\ -v^1+v^2=x^2,\ 2v^3=x^3,\ v^4=x^4$ 聯立解之得

$$v^1=\frac{1}{2}(x^1-x^2),\quad v^2=\frac{1}{2}(x^1+x^2),\quad v^3=\frac{1}{2}x^3,\quad v^4=x^4$$

故向量(x^1,x^2,x^3,x^4)可書爲$\overrightarrow{\underset{1}{e}}$，$\overrightarrow{\underset{2}{e}}$，$\overrightarrow{\underset{3}{e}}$，$\overrightarrow{\underset{4}{e}}$之一線性結合，如形式(A)

從歐基里德的第五公設談
羅巴啓夫斯基幾何學

陳 邦 彥

自從俄人羅巴啓夫斯基（N.I. Lobacevskiĭ 以下簡稱羅氏）指出非歐幾何的存在可能性後，幾何間的許多重大關係，大大地躍進了一步。幾何學的研究方法及其應用之範圍，亦進入了新的里程。今日數學家們已不再僅僅研究歐氏空間的性質與圖形而已，而把研究的範圍，擴大至羅氏空間、射影空間、黎曼空間及拓樸空間，甚至其他更廣泛之空間中。這些空間的數量，似乎是那麼地豐富，同時，它們每一種空間，皆形成它本身獨特一支的幾何學。我想這也就是今日幾何學能如此飛黃騰達的主因。

也許同學們會問：「這些數學的抽象化是如何地？在何時產生？它們的眞正價值何在？同時它們的定義是如何？」這些問題的答案，也就是今天要特別選擇這個題目來與諸位談一談的原因。當然，我本人深知，在數學上，根本還是在開始學習的階段。因此，對本文並不敢抱多大的期望。而僅是希望同學，能從其中，多認識點歐氏幾何學時代演進至羅氏幾何學時代之歷史過程，並多少瞭解羅氏幾何學上之基本性質而已。

一、歐基里德的第五公設

在歐基里德的「數學單元」一書中，歐氏曾引入了幾個幾何公設。其第五公設是這樣敍述的：「通過一直線外一點，作與此線平行之直線，不多於一」。當然，所謂二直線平行，乃表示着此二直線位於同一平面且不相交，事實上我們僅須使用劃垂直線的方法，就很容易的證明，通過此直線外任一點，必能作一平行直線。因此從歐幾里德的第五公設及上面的敍述中知，平行於一直線之直線必存在，且僅有一條。

在歐氏公設中，此第五公設，佔有特殊之地位，同時此公設之本身，亦存在着某些困擾。譬如，我們所謂之直線，乃是能向二端無限伸延之無限長度之線。因此，我們要確知二直線平行，則需把此二直線無限延伸，方能確知是否平行。事實上，欲行此事困難重重。

在歐氏「幾何單元」一書中。我們知道，第五公設僅從第廿九命題起方開始應用。這也就是說其前面廿八個命題，均不需應用此公設。因此，此平行公設，即演變成許多數學家的討論與研究對象。他們都希望利用其他公設及命題來證明此平行公設，而無需視它爲一公設。

這個工作的從事者，當時包括希臘的 Proclus（公元五世紀），波斯的 Nasir ed Din et Tusi（十三世紀），英國的 Wallis (1616—1703)，意大利的 Saccheri (1667—1733)，德國的 Lambert (1728—1777)，法國的 Legendre (1752—1833) 及其他大數學家。在歐氏的「幾何單元」一書出現的二千年內，他們幾乎用盡了方法與心思去證明此平行公設，而結果却一無所成。

其中特別値得一提的是：Saccheri及Lambert 二氏對此平行公設的研究，作得特別深入。Saccheri 氏是嘗試用矛盾證法去證明它的第一人。起初，他本人以爲已經用此法證得此公設，但事實上，他的證法却犯了錯誤。Lambert 氏對此公設之證明比 Saccheri 作得更深入。他曾用同法去證明，但是一直不能獲得任何邏輯上的矛盾現象。因此他並不以爲自己證明了第五公設。到了十九世紀初葉，Legendre 氏又再一次爲證明此公設而步入了 Saccheri 氏的錯誤路徑。因此到了十九世紀初葉，這個第五公設的證明問題，如同在歐氏時代一般，還是一個不能解決的懸案。這麼多的人的努力，却無法獲得任何的結論。這個問題，費盡了二千年來許多天才的心血與靈感，埋沒了多少才子的青春與生命，到了十九世紀，此問題的理論，更形成了當代數學家們的中心問題，它如花引蝶似地，吸引了許多大數學家們的興趣。其中包括 Gauss, Lagrange, d'Alembert, Legendre, Wachter, Schweitzart, Taurinus, Farkas, B'olyai

，等人。但是此公設的證明，却仍是一無所獲。因此當時的數學家們開始對於此問題產生疑問。「到底是現代的數學家還沒有能力解決此問題呢？還是此問題的本身並不存在？」。高斯，這位當代最著名的德國數學家，從1792年起，開始研究這個問題。而最後，他仍免不了放棄解決此問題的惡運。

及至1829年問題終被俄國 Kazan 大學的年青數學教授 Lobacĕvskiĭ 氏解決了。羅氏對此問題的答案我們可以歸納為下列三句話：

1　平行公設是不可能用歐氏的其他公設與命題來證明的。（這些命題當然不可以包括已使用第五公設的命題。）

2　假若我們利用與平行公設相反之公設來代替平行公設，則我們同樣可以發展與歐氏幾何學不同的幾何學來。

3　一種合乎邏輯可被接受的幾何學，其結論的眞實性及其於實空間的應用，可藉實驗導出。

我們在這裏可以看出，羅氏的答案，事實上與其他數學家們起初對原問題的答案並不同，但是羅氏的答案，却大大地將幾何學推進了一步，它把數學家的思想領域，領入了另一新紀元，它不僅使十九世紀中葉後的幾何學為之改觀，同時亦為廿世紀初葉相對論之創立，建立了良好的基礎。

羅氏不但是指出非歐幾何學的存在的第一個人，並且也是對非歐幾何學作深入研究的第一人。他於1885年把他研究所得到的新幾何學稱為「泛幾何學」（Pangeometry）。後人為紀念羅氏對此問題的重大貢獻，就把這些新幾何學稱作羅氏幾何學（Lobacĕvskiĭ）。羅氏，他不僅發展了這些新的幾何學，同時他亦致力於把這門幾何學眞實化。我們在談完了這些歷史過程後，現在讓我們開始介紹羅氏幾何學中的幾何基本性質。

二、羅氏幾何學

a.　平行角（Angle of parallelism）

羅氏在他新創的幾何學裡，他把歐氏的第五公設，改換成下面的一個相反的公設：

「**在一平面上，過一直線外一點，至少可以劃二條不同的直線與原直線皆不相交**」。

他從此公設開始推演，獲得了一連串的新結論。這些新的結論與歐氏幾何學，也就是羅氏所謂的「習慣幾何學」大異其趣。

當然，他亦獲得了許多與習慣幾何學相似的重要結論。這些結論，包括有非歐三角學，面積及體積之運算等。由於在非歐幾何學中，劃圖的工作是相當的困難，因此，在本文中，我不打算把它們談得太詳細，對此有興趣的讀者們，可以參考本文後面所列之文獻。

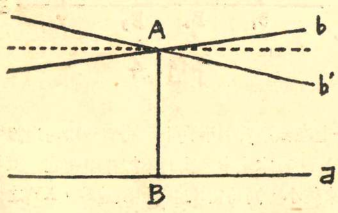


Fig. 1

圖1

現在，讓我們從平行線的理論談起。設在一平面上，有一條直線a與線外一點A，吾人可劃由A至a之垂直線AB，由基本假設知，通過A點，至少存在二相異直線與a均不相交，因此在此二直線間之任一直線，與a亦不相交。(圖1)在圖1中，事實上，直線b與b′若把它們向二端延伸至一足够長度，則與a相交。因此與羅氏的假設矛盾。但是，事實上，這並不值得諸位驚奇，因為羅氏的理論，在一般的歐氏平面中是無法繪劃的。因此本文中的一些圖形是不能眞正地在歐氏平面中表示出來。它們在這裡，只不過是扮演著輔助諸位瞭解的角色而已。因為在歐氏平面中，我們僅能劃古典的直線。

我們現在還是回到我們的假設。a為一直線，A為線外一點。通過A點，我們劃不與a相交的半直線x，並且將它繞A點旋轉。使得AB與x間之夾角ϕ減小，並且與a保持不相交。因此半直線x必到達某一極限位置，使得ϕ為最小值。此極限半直線c與a亦必不相交。因為c若與a相交於點X（圖2）則我們卽在X之右側取一點X′，則此卽得一與a相交於X′之半直線。這與c之假設矛盾。

因此c不與a相交，同時c爲過A點與a不相交的半直線的極限。由對稱關係，我們在AB之另一側同樣地，可以劃一半直線c′與 a 不相交，同時c′亦爲所有具相似性質之半直線之極限。若c與c′互爲對方之延伸線，則我們即得一單直線c+c′。此直線將爲過A點且平行於a之唯一直線。因此c與c′之任一者之極小旋轉，皆必與a相交，因此由基本公設知c與c′二者皆不能爲對方之延伸線。

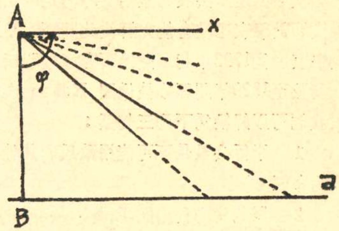


Fig. 2

圖 2

因此我們業已證得，羅氏幾何學之**第一個定理：**

「**在一直線a外一點A，必能劃出二半直線c與c′，它們與a皆不相交。且在他們之夾角內之任一半直線（指與a相近之夾角）必與a相交。**」若半直線c與c′業已劃出。（圖3），則我們即可獲得二不與a相交之直線，他們具有下列性質：

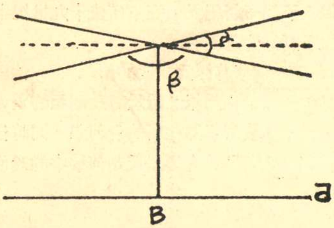


Fig. 3

圖 3

通過A點，在α角內之直線必不與a相交，同時在β角內之直線，必與a相交。

羅氏稱這些直線，c與c′爲平行於a；c平行a於右側，c′平行a於左側。且β角之一半，稱爲平行角(Angle of parallelism）。由於β角小於二直角，因此平行角小於一直角。

b. 平行直線之收斂性與等距曲線

現在，讓我們來研究一下，當X在c上移動時，X至a之距離的變動情形。（圖4）在歐氏平面中我們知道平行線間之距離一定不變。但是在羅氏幾何中，當X在c上向右側移動時，X至直線a之距離，却漸漸減小。爲證此，首先讓我們作A_1至a之垂線A_1B_1，再作從B_1作至c之垂線B_1A_2（因爲α爲銳角，因此A_2在A_1之右側）。最後再作由A_2至a之垂線A_2B_2。我們欲證A_2B_2短於A_1B_1。

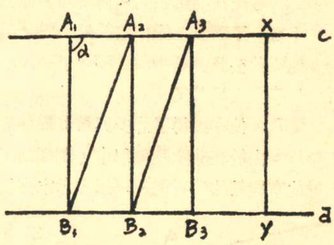


Fig. 4

圖 4

事實上，由一點至一直線所作之垂直線，必短於傾斜線的定理。由於它的證明，不與歐氏第五公設相關。因此它在羅氏幾何學中亦能成立。

因此，我們知道B_1A_2短於A_1B_1同理A_2B_2短於B_1A_2，因而知A_2B_2短於A_1B_1。

當我們要求B_2A_3爲B_2至c之垂線，則使用同樣的說法，我們知道A_3B_3亦短於A_2B_2，因此連續作同樣的工作。我們即得一連串越來越短的垂線。也就是說，A_1，A_2，……至a之距離一直在減小着。事實上，我們一樣可以證明，當X''，X'在c之上，且X''位於X'之右側時，$X''Y''$必短於$X'Y'$。在本文中，我們不打算證明它。但是我還是要提醒諸位一句。當X在c上向右移動，XY之值，不僅越來越小，同時當X趨於無限遠時，XY之値亦趨近於零。也就是說；平行線a與c漸漸地收斂在一起。同樣地，我們亦能證明，在另一方向，它們之間的距離却越來越遠以致趨於無限。

在歐氏幾何中，一條平行於另一直線的直線它們的距離是永遠保持常數的。但是，在羅氏幾何學中，在通常的情況下，如此的直線並不存在。因爲一直線經常是對一定直線之一邊或二邊之距離，發散至無限。因此這些對一定線而言，與它能保持距離常數之線，事實上不爲直線，而是曲線。這種曲線，我們即稱它爲等距曲線（equidistant curve)。

c. 平行角的大小問題

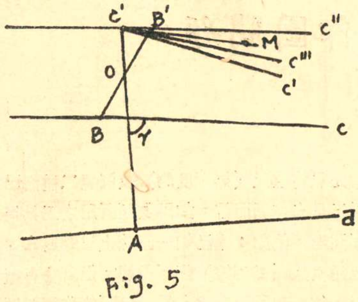


圖5

我們知道，所謂平行角，就是平行於直線a之直線c與垂直線CA之夾角 γ（圖5）現在，我們希望證明，當c越遠離 a 時，平行角γ越小。在證明它以前，我們先來證明另一性質：**「若二直線b與b′；皆與一傾斜線BB′夾一定角，$\alpha=\alpha'$ 則它們有一公垂線」**。（圖6）

過BB′ 之中點 O，劃一垂直於b之垂線CC′，在三角形OBC與OB′C′中，邊OB與OB′相等，且以O作共頂點之對應兩角相等。同時，由假設知，α與α' 相等，因此由α' 與 α'' 相等知，α與α''亦相等，故三角形 OBC 與 OB′C′全等，但是我們知道CC′垂直於b，故角OCB爲直角，因此角OC′B′亦爲直角，也就是說CC′ 爲 b 與 b′ 之公垂線。這就證明了b與b′之公垂線之存在性。

現在我們回來證明，平行角的遞減性。就是要證明圖5中當C′較C遠離b時，其過C′點之平行線 c′與 C′A 之夾角必小於過C點之平行線c與CA之夾角。

我們劃過C′點之一直線 c″ ，它與C′A之夾角等於c之平行角。則直線c 與 c′ 與 CC′形成一相等角，因此於上述之性質知，它們必有一公垂線BB′。因此我們能過 B′點，劃一平行於 c 之平行線 c‴，它與垂直線夾一銳角。因爲，一平行線與一垂直線必交於銳角，因此我們可在 c″ 與 c‴ 中，選擇任一點M，並劃直線C′M，它位於 c″與 c‴之間並與a不相交。但是它與AC′之夾角小於與 c″之夾角，也就是小於γ，因此平行線 c′夾於更小之銳角，因此c′與C′A 之夾角必小於 c 之平行角，這也就是說當 c′越遠離a時，其平行角越小。

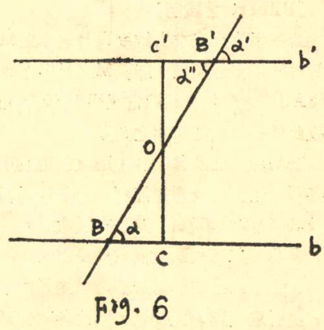


圖6

事實上，我們還可以證明，當c與a之距離趨於無限遠時，其平行角趨近於零。

最後，我在此聲明一句，羅氏幾何學與歐氏幾何學之間的差異，當我們研究的領域越小時，差異亦越小。也就是說，當我們研究的領域越小時，二者之性質越相近。同時，研究羅氏幾何學的最佳途徑，還是徹底瞭解歐氏幾何學。

參 考 文 獻

1. A.D. Aleksandrov Abstract spaces A.M.S.
2. J.L. Coolidge A. History of Geometrical methods 1940
3. H.G. Forder The Foundation of Euclidean Geometry
4. Klein Nichten-Euclidische Geometrie
5. I.S. Newman The world of Mathematics Vol. I. part II
6. D.E. Smith History of Mathematics Chapter V

用固定圓及直尺之作圖問題

邱 日 盛

一、緒言 在初等幾何學中，解作圖問題所用之工具，通常是限定直尺（無刻度的）及圓規二種而已。所謂可能作圖或不可能作圖問題是指能否有限次的運用此二種工具來作圖而言。如再限制所用之工具為一直尺時，可能作圖問題之範圍，吾人知，將僅限於一次之射影問題。例如：「已知一直線上三點為A、B、P，求作P關於A、B二點之調和共軛點。」此類問題，單用直尺（畫直線）即可得解。但若含有距離、角、平行線等問題就無法僅用直尺解之，譬如：「僅用直尺，將一線段平分之」為一不可能作圖問題，因無法單畫直線來解此問題，此問題於1912年， D. Hilbert 已證明其為一不可能作圖問題。

〔Hilbert 之證明〕

若僅用直尺能求出線段AB之中點M（線段AB在平面α上）。則將其所畫直線射影於另一平面β上，所得結果亦必如是。即設M之射影之像為 M′，則M′必為 AB 之像A′B′之中點，然適當選平面β時，可使M′非為A′B′之中點，故此為一不可能作圖之問題。

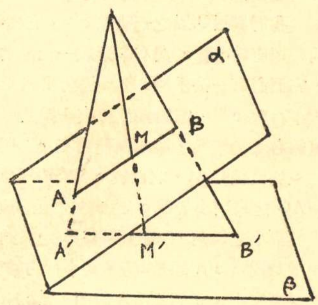


圖 1

若給與一圓及其中心，則雖僅用直尺一種工具，我們仍能解出各種「用直尺及圓規能解」之作圖問題，吾人知所謂：「用直尺及圓規能解之問題」乃是有限次的。

①作過二已知點之直線（用直尺）。

②作一以已知點為圓心，已知長為半徑之圓（用圓規）。而能畫出所求之圖形之問題，因此各類作圖問題歸納起來乃為下列三種作圖之組合，即：

Ⓐ求直線與直線之交點。

Ⓑ求圓與直線之交點。

Ⓒ求圓與圓之交點。

故，吾人若能以「一已知之圓及其中心及直尺」解ⒶⒷⒸ三種問題，吾人即可解初等幾何學中，可能作圖之問題。但求出一圓之中心O及其上一點時，吾人即可認為已解出此圓，以補不用圓規之作圖，以下對此問題加以研討！

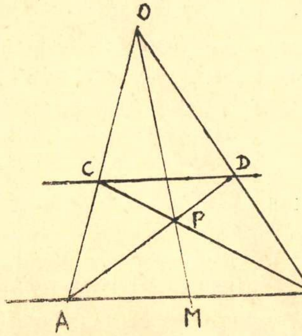


圖 2

二、有關定理 吾人欲討論之問題為：

〔定理一〕 若已知一完全畫出之圓及其中心，則初等幾何學中用直尺及圓規能作之作圖問題， 皆能僅用直尺作圖之。

為方便計，此後我們稱此已知圓為「固定圓」。

於緒言中，曾言及吾人欲證明此問題，僅證明ⒷⒸ兩問題能用直尺求出即可。為證明ⒷⒸ二問題能用直尺求得，吾人需應用下列補助定理。

〔補助定理１〕 若二直線平行，則僅用直尺可將在其中一直線上之任意線段平分。

〔證明〕設 ℓ_1，ℓ_2，為二平行線而AB為 ℓ_1 上之一線段。在此二平行線所在之平面上，取不在此二平行線上之一點O

令OA，OB交ℓ_2於C，D（如圖2）設AD，BC之交點為P，OP交AB於M，則M為AB之中點。

因CD∥AB

$$\therefore\ \frac{OC}{CA}=\frac{OD}{DB}$$

$$\therefore\ \frac{OC}{CA}\cdot\frac{BD}{DO}=1$$

由 Ceva 定理知$\dfrac{OC}{CA}\cdot\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{BD}{DO}=1$

$\dfrac{AM}{MB}=1\quad\therefore AM=MB\quad$ Q.E.D.

〔補助定理2〕 若已知線段AB及其中點M則僅用直尺可作過點C而平行於AB之直線。

〔證明〕 在直線AC上取A、C以外之一點O，令BC，OM之交點為P，再令AP，OB之交點為D，則CD∥AB（見圖2）。

〔定理二〕 用固定圓O及直尺可平分任意線段AB。

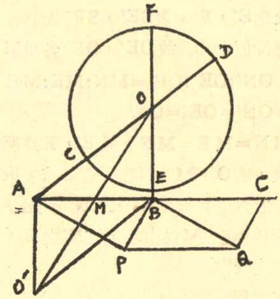


圖 3

〔證明〕 聯結OA及OB交固定圓於C、D及E、F。則CD，EF均為固定圓之直線，因O為其中點，故過A，B，各可作直線AO′∥EF，BO′∥CD。（由補助定理2）設AO′，BO′之交點為O則OAO′B為一平行四邊形。OO′交AB於M，則M為AB之中點。

系1：用固定圓O及直尺，可作過C而平行於AB之直線。

〔證明〕 由定理二及補助定理2可得其證。

系2：用固定圓O及直尺，可延長線段AB至C使AB＝BC。

〔證明〕 由定理二系1可知，過直線AB外一點P可作AB之平行線PQ，過B能作AP之平行線BQ交PQ於Q，因ABQP為平行四邊形故AB＝PQ，再作平行四邊形BPQC則可得BC＝AB之C點。

〔定理3〕 用固定圓O及直尺，可作自一點M至直線g之垂線。

〔證明〕 過固定圓O上一點Q作直線g之平行弦PQ，過P作直徑PR則QR⊥PQ，故QR⊥

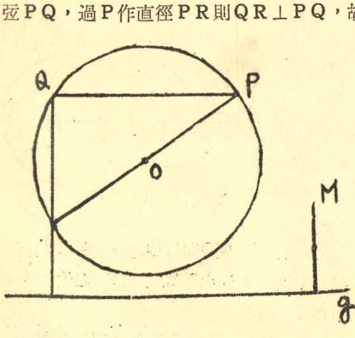


圖 4

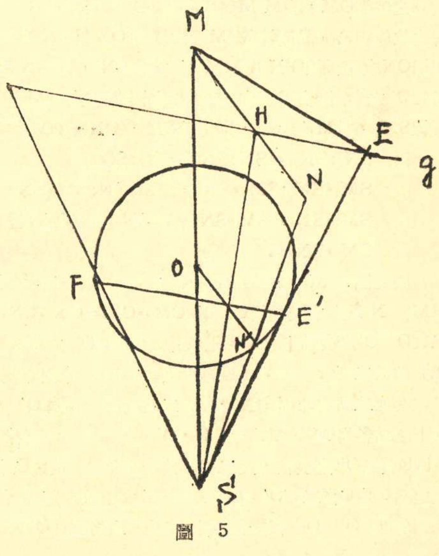


圖 5

直線 g ，再過M引 Q R 之平行線，則爲所求之垂線。

系：用固定圓O及直尺，可作關於直線 g 之M之對稱點。

〔定理四〕 用固定圓O 及直尺可求以M爲中心，而過N之圓及直線 g 之交點。（卽問題（B）爲可解）。

〔證明〕 首先證明N不在直線OM上之情形。

作固定圓之半徑 ON' 平行於MN（卽所設想之圓之半徑）設直線 NN' 與聯心線OM之交點爲 S ，而MN或其延長線與所與直線 g 之交點爲H。又設 S H與ON'之交點爲H'，而過H'引直線 g 之平行線於固定圓之交點E'，F'。設SE'，SF'與直線 g 之交點各爲E，F。則E F爲所求之交點。何故？因S爲二圓O，M之位似中心，故OE'，OF'各爲ME，MF之平行線，由是

$$ON':OE':OF'=MN:ME:MF$$

而 $ON'=OE'=OF'$

故MN＝ME＝MF。故E，F爲所求之點（見圖5）

其次，若O，M，N在一直線時，取關於過M之一直線（非OM）之N之對稱點N'，則N'不在直線OM上。用此N'，可求得直線g與以M爲中心，過N'之圓（卽$MN'=MN$爲半徑之圓M）之交點。

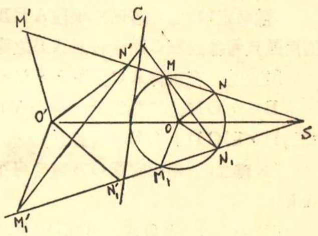


圖 6

故本定理成立。此問題中，若給與N而給與半徑長MN時，可由平行四邊形之作圖得N點。由是，問題B中之「直線 g 與所設想之任意圓之交點」皆可求得。

〔定理五〕 用固定圓O及直尺，可求任二圓之根軸（或等冪軸）。

〔證明〕 首先考慮二圓中之一爲固定圓之情形。

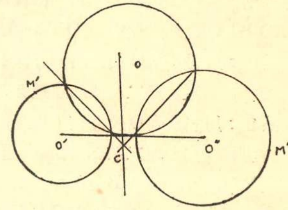


圖 7

設非固定圓之圓之中心爲 O'，而其上一點爲 M'（因不用圓規，故固定圓以外之圓不能畫出）引與半徑$O'M'$ 平行的固定圓之半徑OM，設$M'M$與聯心線OO' 之交點爲 S ，則 S 爲二圓之位似中心。設直線 $M'M$ 與固定圓O之另一交點爲 N'，過O'引ON之平行線$O'N'$與MM' 之交點爲N'，則$O'N'=O'M'$而爲圓O' 之半徑。過S再作一直線與固定圓相交於M_1，N_1，過O' 作 OM_1，ON_1 之平行線$O'M_1'$，$O'N_1'$交直線SM_1，於M_1'，N_1'，則由於$OM_1=ON_1=OM$故$O'M_1'=O'N_1'=O'M'$ 卽M_1'，N_1'爲圓O' 上之點。

因 $SN_1:SN_1'=SN:SN'(=SO:SO')$

故 $SM_1\cdot SN_1:SM_1\cdot SN_1'=SM\cdot SN:SM\cdot SN'$

又 $SM_1\cdot SN_1=SM\cdot SN$爲S關於固定圓O之圓冪。

故 $SM_1\cdot SN_1'=SM\cdot SN'$

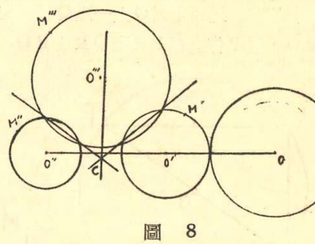


圖 8

因此四點 M_1，N_1'，M、N' 在同一圓周上。故設二直線 MM_1，$N'N_1'$ 之交點爲C，則 $CM_1\cdot CM=CN'\cdot CN_1'$ 故 C爲二圓O，O'之根軸上之點。過C引聯心線OO' 之垂線（由定理3）卽爲二圓之根軸。（根軸垂直聯心線）（見圖6）。

其次二圓均非固定圓時，該二圓之中心各爲 O'，O'' 而其圓上之點各爲 M'，M''，若 O，O'，O'' 不在一直線上時，以上述方法作固定圓O與圓O' 之根軸，再作固定圓O與圓O''之根軸，此二根軸之交點爲C，則此C點爲三圓O，O'，O''之根心，故爲二圓O'，O''之根軸上之點。由C作二圓O'，O''之聯心線之垂線，卽爲所求之根軸（見圖7）。

若O、O'，O'' 在一直線上，O''' 取爲直線$O'O''$ 外之一點。設想以O''' 爲圓心，過任一點M''' 之圓

O''' 。以上述方法作圓 O' 與圓 O''' 之根軸。再作圓 O'' 與圓 O''' 之根軸，設此二根軸之交點為C，過C 作 $O'O''$ 之垂線，即為所求之根軸（見圖8）。

因二圓交點必在二圓之根軸上，故問題C：「求二圓交點」問題，成為其中一圓與二圓之根軸交點問題，即成為一圓與一直線之交點（問題B）。故問題C亦能成立。

三、結論 綜觀上述，我們知道，平面上用直尺及圓規能解之作圖題，皆能用一固定圓及其中心，單用畫直線用之直尺即可解之。

但若不給與固定圓之圓心，則單用直尺我們無法求出其圓心。故上述作圖皆為不可能。〔參照(Cauer, Math. Annalen 73 (1912)〕。

如果我們捨直尺不用，單用圓規，則用直尺及圓規能解之問題均可解之。Adler 利用反轉法（inversion）證明過此問題。

近來尚有人在希臘三大不能作圖問題上浪費精力與時間，於緒言上曾提及，所謂不能作圖之不能是指工具之限制而言。而此問題之所謂不能亦已證出，由此我們不該在此方面再浪費時間，餘下時間研究用簡單工具能作圖之範圍較有發展。

共線圖表之原理

數三 賴建業

譯自：佐佐木重夫著——解析幾何學

第 17 節

於物理學、工程學、醫學等技術方面，經常會出現諸如此類之問題——假設由三個變數組成之關係式 $F(u,v,w)=0$ 成立，給與其中變數一已知數值時，求，能滿足比式之另一變數之數值。將此種求值之問題改變成為從圖形上讀取數值之工作，即為計算圖表之意義。1884年，法國的得卡內（d'Ocagne），利用對偶之原理發明之共線圖表可謂是計算圖表學上之革新。得氏由此被稱為計算圖表學之父，以下將其原理加以說明：

今考慮以u為變數之三個函數 $\lambda(u)$，$\mu(n)$，$\nu(u)$，及對應於a，b，c之一次方程式

(1) $\lambda(u)a+\mu(u)b+\nu(u)c=0$

對應於u之每一值，比方程式所表示者乃齊次坐標為 $(\lambda(u)\ \mu(u),\nu(u))$ 之點，故 u 之值在某一區間內變動時，此點移動，即可繪成一曲線。吾人將 u 之變或加以適當之區分，取其分點為 u_0，u_1，$u_2 \cdots u_L$，曲線上此等u所對應之點上亦標上 u_0，u_1，$\cdots u_L$，則得一標有尺度之曲線，此尺度稱之為曲線函數尺。該曲線稱之為支持線。曲線函數尺上之點之非齊次座標即為

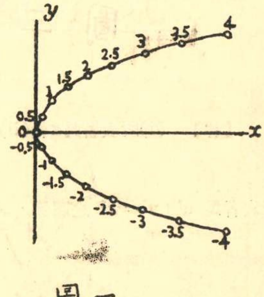
$$x=\frac{\lambda(u)}{\nu(u)} \qquad y=\frac{\mu(u)}{\nu(u)}$$

【例】 $u^2a+2ub+c=0$

所表示之曲線函數尺為

$$x=u^2 \qquad y=2u$$

故知其為拋物線（見圖1）



圖一

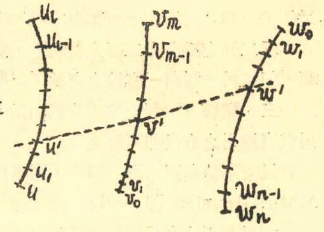
若給與三曲線函數尺(1)及

(2) $\lambda_2(v)a+\mu_2(v)b+\nu(v)c=0$

(3) $\lambda_3(w)a+\mu_3(w)b+\nu_3(w)c=0$

其變為 u，v，w，各為u'，v'，w' 時之三點在一直線之條件為

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u') & \mu_1(u') & \nu_1(u') \\ \lambda_2(v') & \mu_2(v') & \nu_2(v') \\ \lambda_3(w') & \mu_3(w') & \nu_3(w') \end{vmatrix} = 0$$



圖二

故若欲將給與之函數 F (u,v,w) 製成計算圖表時，則藉選取適當之數 $\lambda_1,(u)$，$\mu_1(u)$，……$\nu_3(w)$而使

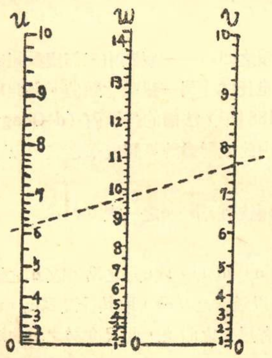
$$F(u,v,w) = \begin{vmatrix} \lambda_1(u) & \mu_1(u) & \nu_1(u) \\ \lambda_2(v) & \mu_2(v) & \nu_2(v) \\ \lambda_3(w) & \mu_3(w) & \nu_3(w) \end{vmatrix}$$

時，可先作(1)(2)(3)之三曲線函數尺。故若欲求出變數u，v為u′v′之值時使F(u′，v′，w′)=0之w值，僅需將直尺置於函數尺(1)(2)上標有u′v′ 之尺度之處，則直尺所劃直線與函數尺(3)所交之點之尺度w′即為所求之w值

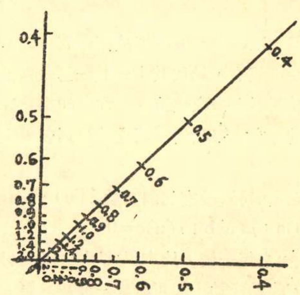
依上述之法所作之圖表稱為共線圖表。原理雖僅為如此而已，然實際問題上，非作一易於讀取之圖表不可，為此，所用之線座標需較前述更為一般化（前述者為特例），因其涉及技術上之問題，本文省略。

第 3 圖所表示者為關係式 $u^2+v^2=w^2$ 之共線圖表。

【例】試作 (i) $a+u^2c=0$ (ii) $b+v^2c=0$ (iii) $a+b+w^2c=0$ 所表示之曲線函數尺。並證明用此三曲線函數尺作成之共線圖表為表 $u^2+v^2=w^2$ 之函數關係之共線圖表。



圖三


圖四

【解】 (i)所表者為x軸(ii)為y軸，(iii)為直線 x＝y上之函數尺。且

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & u^2 \\ 0 & 1 & v^2 \\ 1 & 1 & w^2 \end{vmatrix} = 0$$

所表者為 $u^2+v^2=w^2$ 之關係， 故知此三函數尺構成一表 $u^2+v^2=w^2$ 關係之共線圖表，其圖形見圖 4 。

反轉(inversion)平面的討論兼論空間的封閉性

數三：葉　東　進

一、前　　言

或許同學對於反轉（inversion）有些陌生，但對於理想點(ideal point)或無窮遠點(infinite point)總不會太生疏吧；在射影幾何，解折幾何及高等幾何，大家都跟它（或它們）見過面。似乎它包含些神秘與抽象。現在就讓我用反轉來揭開它的迷底與面目。那麼何謂反轉呢？在介紹它的定義之前，我們應曉得因爲理想點旣不能在平面上或空間裏描出它的形狀或位置來，因此欲認識它必得假藉某種關係(Relation)或某種變換（transformation），而現今所提及的反轉卽是描述理想點的性質所需變換之一。在討論正題之前，我們不得不複習下幾個定義及其衍發的觀念：

Ⅰ. 歐氏平面（Euclidean plane）：卽是吾人通常所稱之平面或歐氏幾何討論之所在平面。（在歐氏幾何中，我們説兩條永不相交之直線謂之平行線，而不説兩條相交于無窮遠點之直線謂之平行線，是因爲在歐氏平面上無所謂無窮遠點。）

Ⅱ. 複數平面（Complex plane）卽一平面，此平面有在無窮遠之唯一點，此點之近傍（neighborhood）是爲以 O（O 是坐標平面之原點）爲圓心之圓之外部（exterior）。

Ⅲ. 射影平面（projective plane）：卽除(o,o,o)外之所有 (x_1,x_2,x_3) 所成之集合，其組成之元素具有如下之性質：若存有a，b兩實數，且 $ab\neq 0$，使得$ax_i=by_i$，$i=1,2,3$，則謂$(x_1,x_2,x_3)=(y_1,y_2,y_3)$。（若 $x_3\neq 0$，則點 (x_1,x_2,x_3) 可視爲歐氏平面上具橫坐標爲 x_1/x_3，縱坐標爲 x_2/x_3 之點，若 $x_3=0$ 則稱此點爲無窮遠點或理想點在歐氏平面上如導入無窮遠點，且令每一方向決定唯一之無窮遠點，則平面卽爲射影平面。）

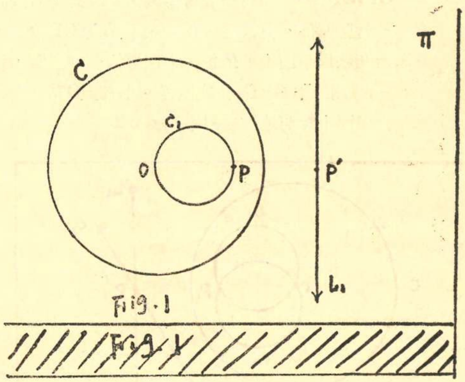


Fig.1

從上述三定義中，我們得知下列結果：

A. 在歐氏平面上無理想點存在。

B. 如在歐氏平面上導入「唯一」之理想點，則平面爲複數平面。

C. 若在歐氏平面上所導入之理想點非唯一，而是依某種法則或爲某種方便（討論或衍發上的方便）而導入無限個理想點，如依每一方向導入一理想點，則平面爲射影平面。

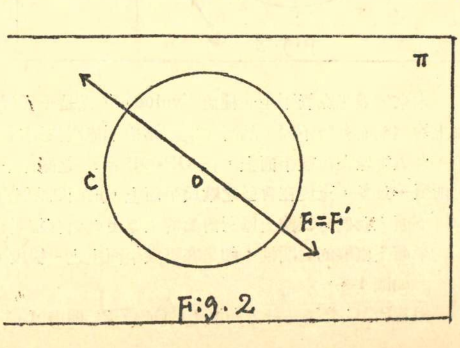


Fig.2

其次介紹反轉，反轉有數種，其最常見者爲：一點關於一圓之反轉（inversion of a point with respect to a circle）：卽設以

O為圓心，r＞o 為半徑之圓C在平面π上，若P點在π上，且在π上有一點P'。P，P' 二者有 $OP\cdot OP'=r^2$ 之關係（此處 OP，OP' 分別表P至O及P'至O之距離），則P、P'互稱為反轉點。若視 $OP\cdot OP'=r^2$ 為一種變換，則在平面π上，圖形 F經此變換後所得新圖形F'稱為圖形F之反轉圖形；或圖形F稱為圖形F'之反轉圖形，稱平面π為反轉面。如圖 1 ，一經點O之圓，其反轉圖形為一不經O點之「直線」，或如圖 2 ，一經 O點之直線，其反轉圖形即為其本身。

二、討　　論

在上述的反轉定義裏，我們只談到平面π，而未論及平面π的種類。事實上，在反轉的定義中，我們得知除O點外（Fig.1），圓 C_1 之每一點在平面π（不論其為何種平面）上皆有唯一之對應點，例如在坐標平面上，如令 $O=(0,0)$ ，$P=(x,y)$ 則 $P'=\left(\frac{r^2x}{x^2+y^2},\frac{r^2y}{x^2+y^2}\right)$，祇要$x^2+y^2\neq 0$，即$(x,y)\neq(0,0)$，顯然P與$P'$間是種一一對應的關係。所以問題所發生的便在當 $P=0$ 時。

討論： 1.當平面π為歐氏平面時。顯然在 $OP\cdot OP'=r^2$ 之關係下如令P沿C_1而漸進於0時、P點之對應點P'則沿直線L漸進於此直線之無限遠點，但直線L既在平面π上，則無所謂之無限遠點，即 $P=0$ 時在π上並無對應點存在。故知 $OP\cdot OP'=r^2$ 在歐氏平面上無法為一一對應關係（因我們無法定義O點之對應點究應為何點），換言之，在歐氏平面上，我們無法使 $OP\cdot OP'=r^2$ 為一一對應關係。

2.若在歐氏平面上，吾人導入「唯一」之理想點，且在$OP\cdot OP'=r^2$下，令此理想點對應O點，則$OP\cdot OP'=r^2$ 即為一一對應關係。故得：若固定圓C於此含理想點之平面上，則 $OP\cdot OP'=r^2$為一對應關係。換言之，在複數平面上 $OP\cdot OP'=r^2$ 即為一一對應關係。

3.若在歐氏平面上，依每一方向導入一理想點，則得：若圓C固定於此平面上，則O點在$OP\cdot OP'=r^2$ 關係下為一對多之關係。事實上O點為所有平面上無窮遠點之對應點。圖 3

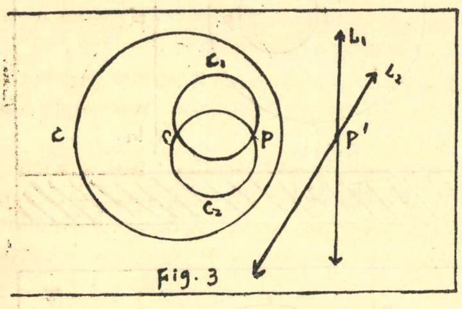


Fig. 3

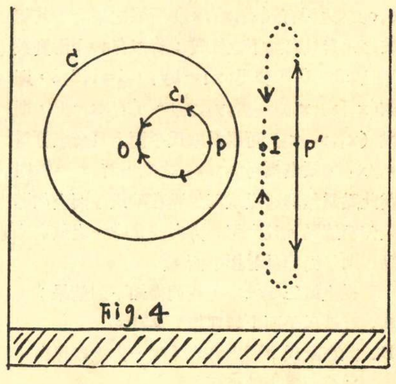


Fig. 4

本來，理想點既不是一種值（value），僅是一種觀念（concept），故其定義可依使用上之方便或討論上的完整而有所不同，然所定之定義絕不能跟依此定義所導出之衍算有所衝突或矛盾。故從上述的討論中，吾人得知在複數平面上，在 $OP\cdot OP'=r^2$ 之關係下，P=O點之對應點須為一對一；若在射影平面上，則須一對多，至於在普通之歐氏平面上，則因O點無對應點，故無法定義。

下面，我們再根據上述所討論的來導出幾個有趣（也是抽象）的「現象」：

a. 平面上直線的封閉性：即是在複數平面上之一線段，如兩端予以無限連續延長，則形成一封閉的曲線。如圖 4 。

因若P沿C_1作逆時針方向漸進於O時，P' 則沿 L_1 往上漸進於 L_1 之無窮遠點 I_1 ，至若 P 沿 C_1 作

順時針方向漸進於O時，P' 則沿 L_1 往下漸進於 L_1 之無窮遠點 I_2 。因O點在複數面上與此複數面之理想點爲一一對應，故 $I_1=I_2$ 。實際上，在複數面上之理想點 I 本爲唯一（吾人定義者）。 $I_1=I_2=I$ 卽表一線段若上下兩端（或左右伸延）無限延長，必交於同一之理想點；卽表一封閉曲線。

2 平行線束（pencil of parallel lines）交于同一理想點：卽兩不相交之線段，若予以無限連續延長，則交于此複數平面之理想點。其道理與 a. 之所論相同，觀圖5亦可知。

（丹 C_1 與丹 C_2 相切於O點，其反轉圖形分別爲兩不相交之相線 L_1，L_2）

3 相交于兩點性：卽在複數平面上，已知兩相交于 P' 之線段，若予以無限連續延長，則必再交于平面之理想點。觀圖6， C_1 之反轉圖形爲 L_1 ， C_2 之反轉圖形爲 L_2，C_1，C_2 相交于P，O 兩點，則 L_1，L_2 相交于 P'，I 兩點（I爲O之對應點）。

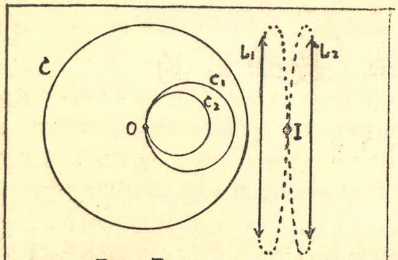


Fig. 5

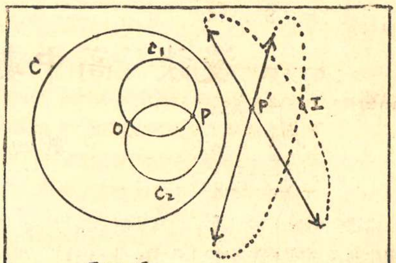


Fig. 6

4 平面的封閉性：卽在複數平面上取一有限部分平面而予以無限連續延伸，則平面爲一封閉曲面。此蓋因複數平面上之每一直線皆爲封閉曲線且皆經平面之理想點之故。此層性質吾人若以 stereographic projection 說明則更爲淸顯。複數平面其實是拓樸相等於 （topologically equivalent to）一球。

上述所論皆屬平面上之性質，若加以擴展而論及空間，則吾人似乎可坐在椅上，祗要將一張紙，一支筆放在桌上，憑着一副思考的頭腦，一隻會繪圖的手，便可略知宇宙空間的形式了（如果我們認爲宇宙是個數理的宇宙的話）。下面讓我們略略地討論宇宙（數理的宇宙）的封閉性：

「假若」宇宙空間是由所有（無限）「複數平面」組成（此地吾人祖空間爲平面所成，卽如同直線爲點所成），則因複數平面爲一封閉面，顯然，宇宙空間便爲封閉。這從上述所論的反轉亦可導出（如圖7）：將複數平面π轉一角度得一新複平面π_1固定O點（卽O仍在π_1上），則

①若定義空間有唯一之無限遠點，當然空間爲封閉。

②若定義每一複數平面對應一無限遠點，則圖中O點對應于所有複數平面之理想點，空間亦爲封閉。

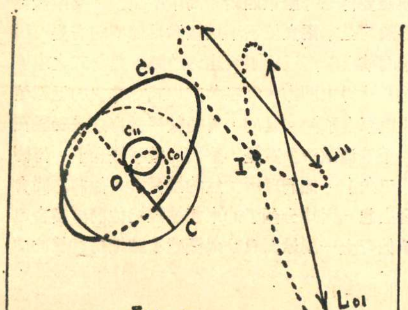


Fig. 7

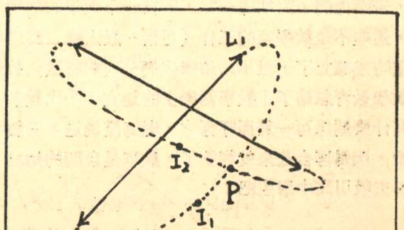


Fig. 8

綜上所論，我們可發現一有趣的現象即在複數平面上，兩直線無論如何必相交，且相交于兩點（討論3，4得），就是在射影平面上兩直線也不止交于一點（如圖8），而更有趣的，則是在剛才所論的空間裏在①之情形下，兩條歪斜線（不相交之空間二線段）若予以無限連續延長也會相交于一點呢（同學們可自證之）。

(3) 附　　記

我們已脫離了歐氏平面所構成的「有限」空間而來到這複數平面或射影平面所構成的空間裏：我們見到的已與我們先前所見的大有不同，但這也使得我們耳目爲之一新、使我們似乎發現數學的無窮與有趣。如果我們願意用一張紙，一支筆來配合我們的頭腦，又何會慨嘆：「唉！這些偉大而又神秘的定理已爲先賢所發現完了，其餘又有什麽呢?!」

漫談「高中數學」教學目的

數四　王惠中

常聽到中學生抱怨說：「爲什麽要讀這些數學？」自以爲對數學有興趣的同學，常常祇是對做「難題」發生興趣而已；許多在中學時數學「很棒「?!」」的同學，一上了文法學院，他們從前拿手的聯立方程式解法都「忘」了，更想不起「西摩松」線是什麽？大部分的人們中學畢業了，數學就「忘」光了，說實在的他們未曾認識過「數學是什麽？」但他們常下意識地討厭她。把一個天使描成巫婆，那位畫家該受咒詛。今日自由中國數學被打入「冷宮」，中學教員要負大部分的責任，也許不該怪他們不負責，因爲他們自己也不能坦然的說出他「爲何要教數學」，瞎子領瞎子兩人都要掉進坑裏。在這數學界的黑暗時代，「新教材」的出現似乎是一道曙光，巴不得她不僅帶來了希望，也實際的帶來「生命」，讓「數學」自由的活在每一個國民的思想裏。……

到底高中學生爲何需要學數學，我想就現行部定的「高中數學教學目的」討論一下：

壹、「介紹形數之基本觀念，使學生充分了解其關係，明瞭代數、幾何、三角等科呼應一貫之原理，而確立普通數學教育之基礎。」

數學教育的原始目的當然是「數學知識」的傳授，問題是要傳些什麽東西給「高中學生」，高中教育——我覺得是目前教育中最重要的一個階段，對高中學生形數的基本觀念似乎不足以滿足他們的需要。因爲抽象數學中似乎已從形數之中抽離出來了，不該再讓孩子們戴上深度近視眼鏡迷惑於圖形與數式之中了，告訴他們，該站遠一點，欣賞一下數學的結構，也該讓他們曉得求開方，解三角方程式計算根的近似値，這些不是數學家的工作（可惜一般人總以爲這些就稱爲「數學」了）。是的，普通數學教育之基礎該在這時候確立了，但不該讓學生們分別的認識代數幾何三角。「普通數學」該是「整體的數學概念」，傳統數學教育忽略了「數學基礎」的建立，「代數」「幾何」「三角」，他們理所當然的接受了，他們之間會有什麽關係可一貫而呼應之，老師沒說過，一般學生也不會去想，因爲分開了的東西總難把他們再湊合起來，因爲再合起來就糊塗了。數學是自明的知識，爲何要讓他帶上一副鐵面具？揭開吧！讓她用自然的面目去吸引高中學生吧！

貳、「練習說理推證之方法使學生切實熟習數學方式之性質。」

「邏輯」(Logic)是數學的工具，多少該讓學生們曉得一點這方面的知識，然而我發覺一般中學老師

缺乏這方面的訓練，因此常以鑽牛角尖爲合邏輯，常犯以偏概全的毛病，常以爲 $\sin x = a$ 。這式子 $|a|>1$ 就無解，（其實書上只是說若 x 爲實數則 $|a| \leq 1$ ，那麼若 $a>1$ 呢？該告訴學生一不知道一如果 x 之定義域超過實數範圍的話）。我不是說每個地方都要嚴格的討論，而是說起碼的邏輯修養該要有。才不至於教到「若且唯若的定理自己也迷糊了。於是告訴同學「哦！你們要注意，這個定理有「肉切肥肉」，下次考你們，少一塊肉都不行，知道嗎？」其實，我懷疑他自己是否知道了，這簡單的邏輯觀念何須如此幽默」來强調，反而易引起學生的誤會。」

叁、「供給研究各學科所必要之數學基本知識以充實其經驗自然及社會現象之能力。」

有些學生認爲他們以後又不專門學數學或者他根本不打算升學還要讀這些討厭的東西幹啥？殊不知數學並不像歐洲一般古典派的中學所學的希臘文或拉丁文的作用一樣，數學和一個人的社會地位無關，但和他的日常生活有關。一個中學生若想繼續升學，他的中學數學該是他未來做學問的工具，（即使想學文、法也要像胡適那樣有清楚的思維方可事半功倍。）因些教材的選擇必須顧慮這些，例如集合之基本概念，矩陣代數之妙用該早點讓他們知道。對於不升學的同學，這是他們學數學最後的機會，普通數學修養必須在這時候建立，這樣可以間接的影響他的生活習慣，潛意識地支配他的社會適應，許多不必要的麻煩會省去，教師有責任在平時對這方面多做啓示、這是艱難的工作却是最有意義的。

肆、「繼續訓練學生對於生活需要之計算及作圖等技能俾使更臻純熟正確。」

高中數學的任務前述者已經够多了——我想——這些計算與作圖技能在初中數學可傳基本的知識，到高中該交給物理、化學或美術、工藝等教師，繼續分別作進一步的訓練。

伍、「培養分析能力、歸納方納、函數概念及其探討精神。」

這些是屬於教材內容方面的事，上面第壹段提了一下，和下面第陸段亦有關連，兹不贅述。

陸、「明瞭數學之功用，並欣賞其立法之粗、組織之嚴，應用之博，以啓發向上探討之興趣。」

一個做學問的人，若不懂得「欣賞」，那就太可憐了我覺得他是一個學問的奴隸，一個中學教員也不該使學生成爲一個學奴——讓他們背了一大包袱，都不是自己的東西——數學是大自然所有的也要還給大自然，讓同學們看到原來這是一個和諧，可愛，美麗，嚴肅的世界，「……爲什麼我從前不知道？哦！行星運動軌跡是橢圓的——不是圓的——橢圓其中一個焦點變到說不出的遠時，就是抛物線，有時候慧星的軌道是抛物線，那他是從那裏來的，要往那裏去？哦！還有雙曲線軌道，更不可思議了……柏拉圖說政治家要學幾何是什麼道理？拿破崙那老粗居然是數學大高手，地球上經緯度怎麼畫出來的？好妙！圓的面積怎麼可能求得出來？電腦更不可思議，爲什麼數學是科學之母，數學本身是否科學……」讓孩子們去幻想吧！但教師有責任引導他們的思路，他必須做一個好的導遊者，而不可牽着學生的鼻子走，否則會激起人類共有的「反叛性」，但要適可而止，期望過高會灰心的。若教師沒有先愛數學，那麼教學是一種重擔，若他不愛他的學生那麼教書對他該是一種刑罰。「數學是一種藝術——我覺得——，教學也是一種藝術。如果教師能愛自己也愛學生那麼他可以開始教書了，如果他願意教書的話。當然他若想教數學，必先知道數學是些什麼！

「無窮大理論的根本困難在於：不論是直率地否認還是明白地承認無窮大的存在均將導致出許多不可能的事。」 亞里斯多德

無窮大的問題

數二：莊 聰 智

譯自：Meschkowski 著：Evolution of Mathematical Thought

原為德文，後譯為英文

希臘的哲學家與數學家對於無窮大的問題早已涉及；尤其是希臘埃里亞（Elea）學派的哲學家——季諾（Zeno of Elea，公元前460年左右）以他尖刻的論調給予此問題之定義已成爲正統：

If there are many, they must be just so many as they are, neither more nor fewer. But if they are just so many as they are, they must be finite (in number).

If there are many, the existents are infinite (in number): for there are always other (existents) between existents, and again others between these. And thus the existents are infinite (in number). （註一）

阿溪里斯（註二）與玳瑁的故事至今仍爲世人所熟悉。在一次賽跑中，阿溪里斯讓玳瑁的起點在前面，因爲他能比他的對手（玳瑁）跑快十倍；雖然如此，可是他決不會趕上玳瑁：因爲當阿氏跑過了起點的差距（就說是十公尺吧），玳瑁向前了一公尺；當阿氏又跑完了這一公尺的差距，他還是落後$\frac{1}{10}$公尺。如此繼續下去——這位快速的勇士跑過了$\frac{1}{10}$公尺的差距，但這小動物還是領先$\frac{1}{100}$公尺——直到無窮。故阿溪里斯決不會趕上他的對手。在這故事中，季諾的論證可以現代語文摘要如下：像自起點到相會點的距離的一個有限區間竟能包含無窮多個部分是不可想像的。

季諾以另外一個方式建立運動並非可能的論調——正在飛的箭矢並不在飛：

正在運動的東西既不在它所處的地方上移動，也不在它所不在的位置上移動。

現在，埃里亞學派的立論常以一些近代數學的成就來處理。有這麼一首幽默的詩：

所有的數學思潮，對他而言
都充滿着曖昧與神秘。
、、、
哦，季諾，季諾，你這個老傻瓜
難道你不認得 Kowalewski？（註三）

誠然，一位大一學生能在"kowalewski" 或在某些其他的分析教科書中讀到：級數$10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots$爲收斂，其極限和爲$11\frac{1}{9}$；而且，如果根據由二個方程式解二個未知數的簡單方法來解決季諾的運動問題，吾人亦能得到相同的數目（$11\frac{1}{9}$）。

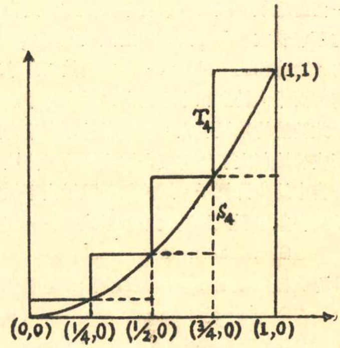
另外一類無窮小的問題，早在希臘人的數學書中有關於面積和體積的那一部分裏遇到。舉個例來說：吾人將以現代的術語介紹阿基米得〔287(？)—212 B C〕計算抛物線下面積的過程。

考慮被抛物線 $y=x^2$ 與兩線段〔(0,0)，(1,0)〕，〔(1,0)，(1,1)〕所圍成的圖形（見圖）。若把常用的以多邊形求面積的觀念擴張到這類圖形，則必定有一正實數 r 對應於此圖形；且 r 大於「內接」多邊形的面積而小於「外接」多邊形的面積。於圖中吾人畫出了「四階樓梯的兩多邊形」（內接與外接）。

顯然地，

外接多邊形的面積爲

$$T_4=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{4}\right)^2$$



內接多邊形的面積爲

$$S_4=\frac{1}{4}\cdot 0^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

對於一「n階樓梯多邊形」（每一階皆相等），吾人對應地得出

$$Tn=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \qquad (1)$$

$$與 Sn=\frac{1}{n}\cdot 0^2+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \qquad (2)$$

則 $Tn-Sn=\frac{1}{n}$

因此，當吾人選取足够大的正整數 n，則「外接與內接樓梯多邊形」面積之差可變成任意小。又

$$\left.\begin{aligned}Tn&=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)\\ Sn&=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots\cdots+(n-1)^2]\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

然由數學歸法吾人可證得，對於每一個正整數 n

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \text{ 恆成立。}$$

以之代入(3)式得

$$Tn=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n}+\frac{1}{2n^2}\right)$$

$$Sn=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n}-\frac{1}{6n^2}\right)$$

因 $6n<6n^2$，則對於所有的正整數 n，Sn 小於$\frac{1}{3}$，Tn 大於$\frac{1}{3}$；而對於所有的 n 值，唯一位於Tn 與Sn 之間的數僅爲$\frac{1}{3}$。因此僅有$\frac{1}{3}$這個數能對應於吾人之圖形。

數學家之所以一再地著手於作一正方形使其面積與一圓形面積相等的問題，一部分的理由乃是基於上述的問題能求得有理數$\frac{1}{3}$的事實。阿基米得運用類似的無窮小的方法成功地解決其他的面積問題；且在他數百年後，Leibniz（1646—1716）與 Newton（1642—1707）在微分學與積分學中發明了針對此類無窮小問題作一有系統討論的合適方法。因此一個喜愛高談闊論的人，他或許會發表一篇以「數學家克服了無窮大的勝利」爲主題的演講，也或許會把埃里亞學派的異議當作是奸詐的詭辯。

然而，數學史中再三地顯示出輕率地跨入新的無窮小問題是一種危險的嘗試；當他一遇到了矛盾現象，那麼他至少獲得了這樣的認識：以前爲吾人所熟悉的計算法則不能立刻地應用在旣新且正在開拓的園地上。

Galileo（伽利略）在他的「對談」一書中，建立了自然數與其平方數的對應關係：

$$\begin{array}{cccccccc}1&2&3&4&5&\cdot&\cdot&\cdot\\ \updownarrow&\updownarrow&\updownarrow&\updownarrow&\updownarrow&&\updownarrow&\\ 1&4&9&16&25&\cdot&\cdot&\cdot\end{array}$$

在上列中的一個自然數 n（經過雙箭頭）對應於下列中的數n^2；反之，下列中的一個平方數乃屬於上列中的一個對應數。然而，所有平方數亦皆為自然數，因此第二列中之每一數亦皆包含在第一列中；即使此逆敍述不能成立。且此兩列中之數彼此間能以一雙箭頭使之互相聯結，乃因他們彼此間之聯結為可逆的且唯一的。雖然如此，但是第一列中之數較諸第二列者為多。Galileo 作如下之結論：吾人僅可謂及此二量為無窮，而「大於」和「小於」之觀念却不能應用到無窮之集合。

此結論的確很引人，但讀者將可在集合論的書中讀到 Cantor 的非凡成就：他不顧 Galileo 所下的結論而成功地創立了無窮集合的比較的可能性。在此，吾人僅提出Bolzano的「Paradoxes of the Infinite」一書中的少許例子。這些例題顯示出不加考慮地把算術的轉移法則運用到結構謹嚴的無窮級數時就導致出矛盾現象。吾人且寫出下列形式的一個無窮級數

$$S=a-a+a-a+\cdots\cdots \quad (4)$$

為計算此級數之和 S，吾人如作如此地處理：

$$S=(a-a)+(a-a)+\cdots\cdots=0+0+\cdots\cdots$$

則可得 S = 0 。另一方面，吾人若寫作：

$$S=a-(a-a)-(a-a)-\cdots\cdots=a-0=a \quad (4a)$$

由(4a)可得另一結論$S=a-S$，即$S=\frac{a}{2}$

故吾人即有三種互相矛盾之不同結果。

但級數(4)實毫無意義。為明瞭此點，吾人首先注意到沒有一個人能一直加至無窮。

像 $S=b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots$或 $S=\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ 的一個公式，所表者乃數列$S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$ 或數列

b_1,

b_1+b_2,

$b_1+b_2+b_3$,

• • •

• • •

為收歛且以 S 為其極限。然而，數列

a, a−a, a−a+a, a−a+a−a, • • •

或a, 0, a, 0, • • •

並不收歛。故式(5)毫無意義。

的確，在此吾人用到了在 Bolzano 那一時代所還不會採用的現代分析的術語。雖然如此，但是他的矛盾論顯示給十九世紀的數學家們：將求有限和的算術定律直接引用至結構嚴密的無窮級數是不可以的。

（註一）譯者以為將此段譯成中文，不易保持原意。

（註二）阿溪里斯：(Achilles)為荷馬所作描寫特洛伊戰爭的敍述詩中的英雄。

（註三）Kowalewski, Sonya Vasilievna 亦作 Kovalevskaja, Sofija：生於一八五〇年卒於一八九一年，師事 Weierstrass，為德國 Göttingen 大學獲得博士學位之第一位女數學家，終其身皆擔任由 Mittag-Leffler 經營之 Stockholm 大學教授。

參 考 書 目

(1) O.J. Becker, Grundlagen der Mathematik*, Freiburg-Munich, 1954. See also H. Scholz, Concise History of Logic, New York, 1961.

(2) O. Toeplitz, The Calculus, a Genetic Approach, University of Chicago, 1963.

(3) B.Bolzano, Paradoxes of the Infinite, Yale University, 1950.

(4) Aristotle, physics, Book Ⅲ, University of Nebraska, 1961.

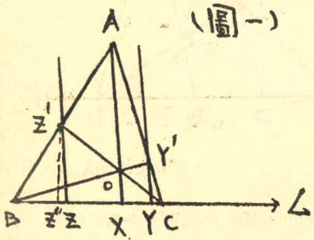
(5) Boyer, The History of the Calculus, New York, 1949.

同一直線上點與點之間的關係

數二：林 崇 男

①在直線L上，有四點其順序爲B、X、Y、C（如圖一），在L上有存在唯一點Z，能使得$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YX}\cdot\frac{XZ}{ZB}=1$

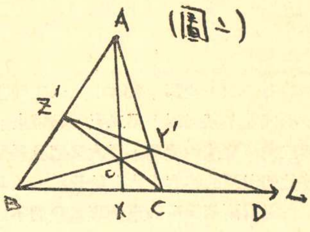
我們可以看到，在敍述裡它沒有告訴我們點的坐標，也沒有告知點與點之間的長度，所以吾人不能由這兩個途徑去求解答。但是，當我們知其一時，就可迎刃而解。



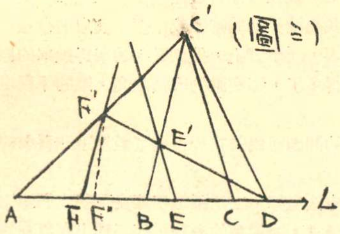
因此，首先讓我們在直線L外，任取一點A。然後，連直線AB、AC。作 $(X.Y.C)\ \frac{\text{ideal point}}{\wedge}\ (A.Y'.C)$ 然而Y'在直線AC上，並且$\frac{CY}{YX}=\frac{CY'}{Y'A}$。再連直線 BY'，而 $BY'\cdot A\times=O$

連直線CO，而$CO\cdot AB=Z'$ 由 Ceva 氏定理，得$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY'}{Y'A}\cdot\frac{AZ'}{Z'B}=1$作$(A.Z'.B)\ \frac{\text{ideal point}}{\wedge}\ (X.Z.B)$，我們得到點Z在直線L上，且$\frac{AZ'}{Z'B}=\frac{XZ}{ZB}$，因此$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YX}\cdot\frac{XZ}{ZB}=1$。假若在L上的點Z''不同於點Z而能使$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YX}\cdot\frac{XZ''}{Z''B}=1$ 那麼$\frac{XZ''}{Z''B}=\frac{XZ}{ZB}$。但是，由 Ceva 氏定理知，當點A固定後，點Z'亦唯一存在，因此$\frac{XZ''}{Z''B}=\frac{XZ}{ZB}$ 即$(X.Z''.B)\ \frac{\text{ideal point}}{\wedge}\ (A.Z'.B)\ \frac{\text{ideal point}}{\wedge}\ (X.Z.B)$，即 $(X.Z''.B)\ \frac{\quad}{\wedge}\ (X.Z.B)$，因此我們可以知道點Z和點Z''必須重合。上面的敍述得到證明。

對於上面的圖一，如果直線Y'Y和Z'Z，兩者各以點Y'和Z' 爲中心，而同時以等速向右轉動，那麼點Y 和 Z 在線L上亦同時向右方向等速移動，且當直線Y'Y和ZZ' 重合時（如圖二），我們可得直線Z'Y'，然而 $Z'Y'\cdot L=D$，即點Y和Z重合成點D，我們亦可視$XY=-XZ$，而得$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CD}{DB}=-1$ 由 Ceva氏定理和Menelaus 氏定理，吾人可證知$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CD}{DB}=-1$



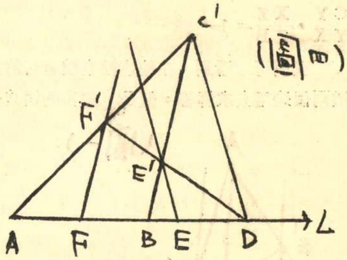
若直線 Y'Y和Z'Z向左轉動，點Z和Y將在L上的無窮遠處消失，而成爲直線Z'Y'上的ideal point，因爲射影直線正如封閉的，就像是有無窮大半徑的一個圓。因此，我們看成點Y（或Z）就是點D，可得到結論$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CD}{DB}=-1$，那麼，點B、X、C、D形成 Harmonic set H(BC,XD)，直線L上的D點，我們稱它爲對於L上的三異點B、X、C是調和的。同樣的，我們可任取三點，得到調和共軛點。



②在直線L上，有五點其順序爲A、B、E、C、D（如圖三），在其上有存在唯一點F，能使得 $\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}$

$=-1$，我們首先在直線L外任取點C′，然後連直線C′A和C B。作(B.E.C) $\overset{\text{ideal point}}{\underset{\wedge}{\overline{\qquad\qquad}}}$ (B.E′.C′) 然而 $\frac{BE}{EC}=\frac{BE'}{E'C'}$ 再連接E′D，而E′D·AC′=F′ 由 Menelaus氏定理，得 $\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE'}{E'C'}\cdot\frac{C'F'}{F'A}=-1$ 作(C′.F′.A) $\overset{\text{ideal point}}{\underset{\wedge}{\overline{\qquad\qquad}}}$ (B.F.A) ，我們可以得到點F在直線L上，且 $\frac{C'F'}{F'A}=\frac{BF}{FA}$ 因此 $\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=-1$

假若點 F″ 不同於F，而能使 $\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF''}{F''A}=-1$，必得 $\frac{CF''}{F''A}=\frac{CF}{FA}$，但是由Menelaus氏定理可知道，當C′固定時，點F′亦唯一存在，因此點F″和 F 必須重合，故上面敍述得到證明。



若以點E′爲中心，順時針方向旋轉直線 F′D，然而 F′ 在AC′上向C′點方向移近，D在L上向 C 點移近。然而直線 FF′ 同時也向直線BC′平行移近，最後使點D和C重合（如圖四）但是 $\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{ED}\cdot\frac{DF}{FA}=-1$ 不成立。必須 $\frac{BE}{ED}\cdot\frac{DA}{AF}\cdot\frac{FB}{BD}=-1$ 。因此對於一直線 L 上的四點 A、B、E、D亦能存在唯一點F，使得 $\frac{BE}{ED}\cdot\frac{DA}{AF}\cdot\frac{FB}{BD}=-1$ 。由 Menelaus 氏定理可證得上述說明。

上面的敍述，是 Ceva 氏定理和 Menalaus 氏定理的圖形，其線交點表投影在同一直線上時點間的關係。

*錯誤之處，望能多多指正。

談當前數學教育的問題

數四　呂政岡

有一次，我那「家教」的學生問我一個 x，y 之高次多項式的因式分解，當時就把我難倒了，因爲此多項式並不甚規則，第二天，她帶來了她們老師的解答，並且頗驕傲似的。又有一次，另一位學生問我一個三角恆等式的證明，這次又把我難倒了，因爲該題是多麼奇怪，想盡方法也沒證明出來，第二天，他就將他們老師的答案「背」給我看，並似甚爲欽佩其老師。

從這兩個簡單的事例裏，我們不難看出，學生對於能解繁瑣計算問題的老師，都非常的欽佩，覺得這種老師才是最了不起的，而反而對於注重推理原則的老師不予看重。並且當你對這種學生加以試驗，假使有某一道問題是他所不會解的，那麼他的理由必是：「這問題是我從沒見過的嘛」或「要是我以前做過，我一定會做」，他們從不會對一道數學問題，憑看數學的學理原則，（事實上，他們又何曾學得數學的原理原則）加以思維，加以推演，而只是在背誦問題，看誰問題背得多了，那麼誰的成績就高，誰的「程度」就是好的。

顯然，上一代，甚而可說我們這一代，數學教學中，最基本的問題可說是在於歪曲了數學這門科學的本質。

學校裏，甚至「懂」數學的數學老師多主張用背誦及强迫的方法教學，在這種教學態度下學生們知道他們的工作是去學會一些行動方式；爲了應付老師及考試命題的要求。對這型的教學，在心理上有着强烈

的反應，（但却頗爲迎合一般人、學校，老師……）第一：在我們不明瞭一些東西之前，要强記這些東西是非常困難的，比方說背一頁電話簿上的人名，地址，號碼，這要比記一首同樣長度的詩歌來得困難，其次，很少人會對於從事複雜而莫明其所以然的事爲樂的，不管是成人或是小孩，學習時必須有興趣才能得到較好的效果。

可是我們現在的學校老師多不注重這些事實，我記得在高中時，老師教給我們的，並不是眞理的推演、他只是在課前背些問題（我們相信他是背的），然後默在黑板上，而我們依樣畫葫蘆的背了下來，因爲我們考試的範圍就在這些問題裏。

這些數學老師似乎不知道，數學是一門理想的推理的科學，不知道數學是唯一的一門完全用理由爲依據的學科，要知道適合邏輯推理的眞正數學，若有兩個人對於同一個問題給出不同的答案了，則其中一個一是有着錯誤。

學校，老師，學生在在都存有「背」的意念，其結果是造成學生的沒思維，完全離開數學之道而學數學，最後越出越遠終至迷途而不知返，多麼不幸！

同時，我們現行的初中數學教材，也有商榷的必要，我看過一本「教育部審定」的初中代數教本，在第一章緒論裏到有這樣驚人的一個表：

$$\text{數}\begin{cases}\text{實數}\begin{cases}\text{有理數}\begin{cases}\text{分數}\\\text{整數}\begin{cases}\text{正整數}\\\text{中性數}\ (0)\\\text{負整數}\end{cases}\end{cases}\\\text{無理數}\end{cases}\\\text{虛數}\end{cases}$$

不知道編者在這裏所指的數是什麼？按「理」應是我們的複數但後面所列二項目却又奇怪，難道我們的數就只有實數與虛數？那$a+bi$，（a,b 爲實數，$ab\neq0$）應屬於實數？虛數？還有後面有理數，整數之分法也有問題，沒想一個教本的編者，竟沒考慮及此，而審定機構也沒察覺。

如此教材在坊間比比皆是，加上一些半生不熟的參考書，題解，這可把學生搞迷糊了，他們不知道何所適從，甚至他們對於兩本書出入之處也分不出誰是誰非。

結果，總算高中的教材改了，但不知初中，小學教本何時加以改進？

對於高中的新教材，總比舊教材要嚴密而有系統，比較注重推理而比較簡單。但問題也發生了，我教的學生他們頗爲不滿幾何的簡單，及無聊（他們稱爲無聊），原來他們長期不經數學訓練，一下子要在嚴密的方法下學習推理，要他們注意每種到能發生的情形，在他們迷亂的心靈裏被以爲是無聊，再以初三時間，爲了準備高中入學考試，他們鑽盡了所有幾何難題，（甚或舊時高中幾何也拿來看），現在突然給他們以此種教材，他們自然感到簡單，但這簡單也並不簡單，有時我要他們做一點基本問題，他們又不知從何下手了。

從這裏，我們發覺，縱然高中數學改了，也是不能十分切合實際，要知道初高中間的數學，因這麼一改而更形脫離所以我有深切的感想，爲什麼，我們不像美國一樣，從小學一直到高中，將所有數學加以整理改進？使成一完整系統，上下銜接？這！我認爲是當前我們數學教育最重要的一點。

還有中學師資的改進，觀念的正確，也是重要問題，聽說有人對高中新教材，還是「新教材舊教法」如果眞是如此，那麼我們的努力，將是大打了折扣。

在觀念的正確上，老師似乎應該明瞭，教師的工作，不僅僅傳授給學生他們期望些什麼，而是幫助學生了解什麼是對的，尤其重要的是爲什麼對！這在數學教學上，該是最重要要的了。

從數學的觀念剖析
物體動的連續性

——本文的構作 (Construct) 是採用公設法 (axiomatic method)——

數三：鍾　國　和

一、討論界域 (Universe of discourse)

討論界域的限定 (define)：

(i) 在下列討論內，所涉及的時間是一般觀念上的時間，所涉及的空間是人類生存的空間（二度或三度）。

(ii) 為方便，現將欲討論到的動的範圍限定在：

a. 如果一個物體在運動過程中未曾「間歇」亦未曾有兩個「點位」重合，則取任一段來討論。

b. 如果一個物體在運動過程中曾「間歇」，則取沒有間歇以及沒有重合「點位」發生的部份來討論。

上述所限定的討論界域，並不會影響問題的討論，因爲所被討論的重點，不是在動的全部過程，而是在動的「瞬間」與「瞬間」的連續性質。

二、公設 (Axiom)

在進入正式討論前，必須先承認下列諸無定義名詞 (Undefined term) 及諸公設。

1 無定義名詞：a.點位，b.瞬間。（註一）

2 公設：

a. **空間是點位的集合** (Set)，**此集合用 "S" 表示。**

b. **時間是瞬間的集合** (Set)，**此集合用 "T" 表示。**

c. **空間與時間皆具有緊密性** (dense property)

d. **一個正在動的物體，在一個瞬間不能同在兩個點位**（**註二**）。

上四公設，a，b，d皆簡易而明白。c 中的緊密性也許會有人感到困惑，現略作詮釋。

空間是點位的集合，時間是瞬間的集合，所以空間或時間的緊密性，就是集合的緊密性。卽：對於空間內或時間內任不相同的兩個點位或任不相同的兩瞬間，無論它們有多接近，至少必有一個另外的點位或另外的瞬間，使得此點位或此瞬間在那任不相同的兩個點位或任不相同的兩瞬間之間（註三）。從這個緊密性可知，無論如何靠近的兩個點位或兩瞬間，必存有無限的其他點位或無限的其他瞬間於其間。所以，對每一個點位或瞬間，沒有所謂「鄰點位」或「鄰瞬間」的存在。

三、幾個定義 (Definition)

定義 1：

如 t_1，t_2 表物體動的時間內的兩個瞬，則以

$|t_1-t_2|=|t_2-t_1|$ 表此兩瞬間的距離 (distance)

（此與物理學的定義相同）（註四）。

定義2：

如 x_1，x_2 表物體動的空間內的兩個點位，則以

$d(x_1,x_2)=d(x_2,x_1)$ 表此兩點位的距離。此距離不是兩點位間的直線距離，而是兩點位所截動的路徑（path）的長。

定義3：

如一個物體是從 t_1 瞬間動到 t_2 瞬間，則此兩瞬間的「秩序」（order）定為：

$t_1<t_2$

此瞬間的「秩序」具有「遷移律」（transitive law）的性質（註五）。

四、動的性質淺析

由公設 d 推知，一個正在動的物體，在每一瞬間只能在一個點位。從這個性質，再參見討論界域的限定，可得：一個動的物體在任兩不同的瞬間皆佔有不同的點位。今設若一個正在動的物體，在所取的任兩瞬間，無論是如何地接近，它的動皆不是從此點位（第一個瞬間所據的點位）跳至彼點位（第二個瞬間所據的點位），而是必須從「此點位」涉過其他的無限個點位方能達到「彼點位」；因而瞬間無論是如何地靠近，必有無限個其他瞬間存於其間（公設 c），而此無限個瞬間必使此物體據有其他的互不相同的無限個點位（由討論界域的限定與公設 d 而得）。

五、數學的連續觀念

定義於領域（Region）G內的一個函數（function），$w=g(z)$，如果在G內的一點 t 是連續(continuous)，則其需滿足下列的三種形態（type）中之一個。

形態1：

$\lim_{z\to t} g(z)$ 的極限值存在，並且其值為 $g(t)$；即，對於任選的數 $\varepsilon>0$，無論有多小，吾人可得一正數，$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得

$|g(z)-g(t)|<\varepsilon$，只要 $|z-t|<\delta$

形態2：

函數值 $g(z)$ 與函數值 $g(t)$ 的差為任意的小量，當 z 充分地接近 t 時。

形態3：

假如對於 G 內任意被選取的系列（sequence）

z_1，z_2，z_3，……，z_n，……（$z_i\varepsilon G, i=1,2,3,\cdots\cdots$）

有 $\left\{z_n\right\}_0^\infty$ 收斂於 t，即 $z_n\to t$ 的情形，則使被對應的系列

$g(z_1)$, $g(z_2)$, $g(z_3)$,…… $g(z_n)$,……（$z_i\varepsilon G$, $i=1,2,3,\cdots\cdots$）

有 $\left\{g(z_n)\right\}_0^\infty$ 收斂於 $g(t)$，即 $g(z_n)\to g(t)$，$n=1,2,3,\cdots\cdots$（註六）。

由上節動的性質淺析與這節數學的連續觀念，可知，欲用數學的連續觀念來說清動的連續性，必沿：1、必須先肯定物體動裏頭的瞬間與點位是一個函數的對應關係；2、所被肯定出的函數，必具有上述三種形態中之一種的性質。現在就沿這個途徑來討論。

六、在討論界域內的瞬間與點位間的關係是一種函數關係

一個正在動的物體，在其動的每一瞬間具有不能同在兩個點位的性質（公設 d）；此即言，每一瞬間只能與一個點位對應（correspondence），不能與不同的兩個點位對應。所以，如果在討論界域內被討論的動的時間的集合為H，$H\subset T$，則吾人有：

寫像（mapping）

$H \xrightarrow{\quad\quad\quad} S$ 的性質。（S爲空間的集合。）

更確切地說，如果這時作爲動的樣式（form）以符號 f 表之，則可得如下的性質：

$f: H \longrightarrow S$

此種性質即爲函數的性質。

七、動的連續性的建立

依上節的敍述，如果把討論界域內的動的瞬間與點位的函數關係用：

$f: H \longrightarrow S$ 表之，則有：

在 z_1 瞬間所據的點位爲 $f(z_1)$，在 z_2 瞬間所據的點位爲 $f(z_2)$ 。其中的 z_1 及 z_2 皆屬於 H。

利用上邊的關係，現在來定義點位的秩序（order)。

定義 4：

如一個物體是從 t_1 瞬間動到 t_2 瞬間（其瞬間的秩序爲 $t_1 < t_2$），則其對應點位 $f(t_1)$ 與 $f(t_2)$ 之秩序爲，$f(t_1) < f(t_2)$。此定義亦具有遷移律的性質。（註八）

從這個定義可得一個推論（Corollarg)：

推　論：

如一「秩序瞬間」（ordered instance）爲：

$z_1 < z_2 < z_3 < \cdots\cdots < z_n$，則其對應諸點位亦爲一「秩序點位」（order point place），即：

$f(z_1) < f(z_2) < f(z_3) < \cdots\cdots < f(z_4)$

看完了這個定義及推論，現在來證明動的連續性。

從第六節的末式，$f: H \longrightarrow S$，如於 H 內任取的兩瞬間 z_1 與 t 之間，可任選取無數的秩序瞬間，（註七），$z_i < z_{i+1}, i=1,2,3,4,\cdots\cdots z_i \varepsilon H$，使得

z_1，z_2，z_3，……，z_n，……構成一個系列（Sequence），並使此系列收斂於 t，即 $z_n \longrightarrow t$，$n=1,2,3,\cdots\cdots$

現在，如能說明上述系列的對應系列

$f(z_1)$，$f(z_2)$，$f(z_3)$，……，$f(z_n)$……收斂於 $f(t)$，則即可得 f 在 t 瞬間是連續。現證明之。

因 $z_1 < z_2 < z_3 < \cdots\cdots < z_n < \cdots\cdots$

由定義 4 的推論可速得：

$f(z_1) < f(z_2) < f(z_3) < \cdots\cdots < f(z_n) < \cdots\cdots$

對任一正整數N，由此系列的秩序性質與距離，知有：

$d(f(z_n), f(t)) < d(f(z_N), f(t))$，當 $n > N$ 時，

此即言，$\left\{ f(z_n) \right\}_0^{\infty}$ 收斂於 $f(t)$，滿足第五節的形態 3。（註九）

所以由上之敍述，吾人得 $f(z)$ 在 t 瞬間連續。因 t 爲討論界域內H之任一瞬間，所以又可知 $f(z)$ 在H內連續，即含有 f「樣式」的動在討論界域內是連續的。

1967、6、1夜於系舘

作者附：文中所稱之物體的動，可視爲物理上質點的動。

附　註

註一：點位可視爲與平面幾何裏頭的點的定義相同(見舊教材)，瞬間可視爲沒有開始和結束的中間地帶。

註二：公設 a 及公設 b 爲數學上與物理上常用的公設。

公設 c 是從空間與時間的連續性質「變形」而來的，這個連續性質，有很多數學，物理及哲學家承認，譬如羅素（B. Russell）就是當中的一個。

公設 d 是取自古希臘埃利亞學派（Eleatics）的一位學者吉諾（Zeno）的一段話裏頭的前句話，他的全段話爲；飛的箭是在動嗎？一個物體在同一時間內，不能在兩個地方。所以箭在飛的歷程中，任一特別瞬間，總是在一個地點。在一個地點就是靜著。所以箭在飛的過程中、無論何時始終是靜止的。見 W. T. Stace 著的 A history of Greek philosophy. Ch, 4.

註三：這個集合的 dense 的性質是採自 Joseph Breuer 的 Introduction to the theory of sets 的 P.73。

註四：照物理的說法：如 $t_1<t_2<t_3$， 則 $|t_2-t_1|<|t_3-t_1|$。

註五：由瞬間所構成的時間集合具有 Well-ordered property

註六：譯自 KONRAD KNOPP 的 Theory of function Part 1. P23—24，中之 Type 2 及 Type 3 是由 Type 1 導出的。

註七：因爲每一瞬間系列皆可 Well-ordered，其法是以瞬間的 order 爲方法，所以這裏不說任選取的瞬間系列，而說任選取的無數的秩底瞬間。

註八：$f(t_1)<f(t_2)$ 的 order 關係，就是說物體的運動方向是以點位 $f(t_1)$ 到點位 $f(t_2)$ 的方向爲方向。

註九：①從定義 2 知，如 $f(z_1)<f(z_2)<f(z_3)$，則

$$d(f(z_1),f(z_2)<d(f(z_1),f(z_3)),d(f(z_1),f(z_2))<d(f(z_1),f(z_3))+d(f(z_2),f(z_3))$$ 並且

$$d(f(z_1),f(z_2)+d(f(z_2),f(z_3))=d(f(z_1),f(z_3))$$

上式從討論界域與註八及定義 2 極易推得。

②$(\{f(z_n)\mid z_n\varepsilon H\},d)$ 爲一 Metric space ，其中之 d 爲定義 2 中之 d

③收斂的理由請參見 RUDIN Principles of M.A. Ch 3. P.41

從這篇文裏，可導出三個有趣的問題：

問題 1 ：爲何一個動的物體在每一瞬間不能歇息（指有限的時間）在一個點位。

問題 2 ：在定義 4 中如有一個瞬間 t_i 使得 $t_1<t_i<t_2$ ，則有 $f(t_1)<f(t_i)<f(t_2)$ 的性質。

問題 3 ：z_1，z_2，z_3，……，z_n 爲 x_1 瞬間與 x_2 瞬間之間的諸瞬間，則 $f(z_1)$，$f(z_2)$，$f(z_3)$，…，$f(z_n)$爲點位 $f(x_1)$ 與 $f(x_2)$ 間之諸點位，即 $f(x_1)<f(z_1)$，$f(z_2)$，$f(z_3)$……$f(z_n)<f(x_2)$。（x_1 與 x_2 之 order 爲 $x_1<x_2$）。

有興趣思索的同學，在行思索之前、請詳記筆者所下的「討論界域」（Universe of discourse）及在「動的性質淺析」裏所說的動不是從此點位跡躍至彼點位，以及註八。如不詳記此，上之問題便成無解或無意義的問題。對問題 2 及 3 的思索，最好不要借助定義 4 。

後記：本篇成文倉促、失漏之處難免，望指正。

55 年 度 數 學 學 會 組 織

超幾何分配的應用實例

數三　賴建業

本篇材料取自：

William Feller: An introduction to Probability Theory and Its Applications P.41—44. 略加整理。

超幾何分配之問題可簡化成如下之形式：

「由含有 n_1 個紅球 n_2 個黑球之袋內，$(n_1+n_2=n)$，任意選取 r 個球，求其含有 k 個紅球之或然率 q_K」

由排列組合之關係，吾人知

$$(1)\quad q_K=\frac{\binom{n_1}{k}\binom{n-n_1}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

此處 $0\leq k\leq n_1$ 若 $n_1<r$；$0\leq k\leq r$ 若 $n_1>r$。

其證明，凡略懂組合者皆耳熟能詳，此處不擬贅述。今舉數例以明其內涵之豐富。

(1) 從漁獲量中估計漁產蘊含量之多寡

〔例〕若從湖中捕得1000條魚，打上紅點後放回湖中，稍後，再從湖中捕得1000條魚，其中 100 條已打過紅點，則湖中之魚估計約有若干？

此爲統計估量之典型問題，吾人假設兩次打撈係從湖中全部魚中所取之任意樣本。（此種假設旨在剔除兩次在同一地點打撈，或兩次打撈間隔時間過短之特殊情形）吾人亦假設魚之總數，在兩次打撈中均不變。設

n ＝湖中魚量（未知數）

n_1＝第一次捕獲之量，均打上紅點。（1000）

r ＝第二次捕獲之量，（1000）

k ＝第二次打撈含有紅點之魚（100）

$q_K(n)$＝第二次打撈，含有 k 條紅點之魚或然率。

顯然 $q_K(n)$ 可由公式(1)求得，但事實上 n_1，r，k 爲已知，n 却爲未知，無法從公式中獲得資料。吾人確知已打撈過 n_1+r-k 不同之魚，故知 $n\geq n_1+r-k$，在此例中 $n_1=r=1000$，$k=1000$，若假設此湖中僅有1900條魚，亦並非毫無道理，但由超幾何分配之公式可求得由1900條魚捕獲1000條魚，而其中含有100條紅點魚之或然率是微小到幾乎不可能的，因

$$q_{100}(1900)=\binom{1000}{100}\binom{900}{900}\binom{1900}{1000}^{-1}=\frac{(1000!)^2}{100!\,1900!}$$

利用 Stirling 之公式，求得此或然率約爲 10^{-430} 由常識判斷亦可知這種假設是完然不合理的，基於同樣的理由，n 也不可能爲一百萬條。這種想法使吾人設法尋求某一個特別的 n 值，對於此 n 值$q_K(n)$爲最大值，蓋因對此 n 值，題設之情形最有可能發生，爲求得此 n，考慮此比值

$$\frac{q_K(n)}{q_K(n-1)}=\frac{(n-n_1)\cdot(n-r)}{(n-n_1-r+k)n}$$

略加計算可知當 $nk<n_1r$ 時此比值大於 1，$nk>n_1r$ 此比值小於 1。此卽當 n 增大時數列 $q_K(n)$ 首先逐漸增加至某一値後再逐漸減少，當 $n=[n_1r/k]$ 時 q_n 爲最大，故 n 約等於 n_1r/k，由此得魚之數量大約爲 $n=10,000$ 條。

註：$[n_1r/k]$ 表示小於 n_1r/k 之最大整數。

(2) 品質管制

工業上之品質管制，需將產品加以檢驗。但欲將每一個產品加以檢查，勢將增加許多成本，而且由於人爲的或機械上的缺點，完全的檢查亦不能確定完全的產品，尤其是檢查如果具有破壞性的，全部檢查更不可能，因此需將產品將以抽樣檢查。此時不良品之件數相當於上例中打上紅點之魚，其數目 n_1 爲一未知數，由全部 n 個產品中選取 r 個，得知其不良品之數爲 k。由公式(1)，將 n_1 視爲未知數利用與上例相同之方法，考慮 $q_K(n_1)$ 與 $q_K(n_1-1)$ 之比値，卽考慮 n_1 爲何數時，題設之情形最有可能發生，則可求得其不良品之槪數。將不良品之槪數，與許可之不良品數量比較可知其工廠生產情形是否正常，藉以發現品質管制是否發生忽略，工人是否發生怠工，管理不良等情形。

〔例〕 假設產品爲 8 個，規定取樣 4 個。其不良品爲一未知數，若含不良品一個下則爲合格，求其及格之或然率。

設不良品之個數爲M，合格之或然率爲P，則

$$P=\frac{\binom{M}{0}\binom{8-0}{4}}{\binom{8}{4}}+\frac{\binom{M}{1}\binom{8-M}{3}}{\binom{8}{4}}$$

故可求得各及格之或然率如下：

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P	1	1	$\frac{55}{70}$	$\frac{35}{70}$	$\frac{17}{70}$	$\frac{5}{70}$	0	0	0

我對數學改革的認識與意見

數四　陳昭地

我們都知道數學教育本身的重要性；它除了可以使學生應用在一般生活上所遇到的度量衡問題外，在研究的過程中能够使人培養分析的能力，運用自己的頭腦去思考，把一些混亂的複合物歸化爲根本元素；可以由簡御繁，由已知推未知的能力，運用在日常處理複雜的社會現象；所以一般國家對於數學教育頗表重視，我國當不例外！

數學教育改革的原因

數學教育在我國，無論在教材或教法上早已爲衆所詬病，但言之者諄諄而聽之者藐藐；儘管課程標準再三地修改，教科書一本本的審定出版但是眞正原則卻看不出來，尤其近年來升學競爭劇烈，學校中的數學教育流於爲應付考試的準備，根本忽略了數學本身的意義；爲了應付考試，學生整日背些公式，甚至背題目諸如因式分解，黃金分割，排列組合……等，這實在一種大而不必的負擔；只是浪費學生的精力去做無意義的事，一般教師也只能依循舊軌，循着入學考題的趨向爲學生作注入式的教學；影響所及一般中學生所學者事後都忘光，以後若非讀本科的在社會上或升入學校根本也用不着這一套或用不着那麼多，似嫌是一種浪費；而即使就讀本科系的同學待待因爲教材之不能銜接往往需要重新學習一些必備的預備知識，那豈不是浪費時間與精力！

美國的數學教育由於受到教學研究的成果，機械工業的進展及自動計算機之廣泛應用而正沿着近世數學的方向作重大的改進；旣在一九五二年起美國開始作「數學新方案」的研究作爲改革數學教育的準備就目前美國的「S.M.S.G.」(School Mathematics Study Group) 新數學教材，不但在國內發生了實際效果而且影響所及全世界數學教育也都傾向於新的改革！

我國教育當局及數學教育家們眼看着過去許許多多的教材缺點又鑑於美國數學教育的改革成效，不忍目睹不合時代的教材繼續長久下去；數學教育本是數理科學教育與科學思想的培養有很大的關係；在兩者的策動之下，教育部高中科學教材研究編譯委員會數學小組參照美國新數學教材 S.M.S.G. 爲藍本集中精力研究，拋磚引玉參酌國情加以刪減或增加而編撰高中數學新教材自然組與社會組二種；以便適合現代高中學生的學習開闢了一條光明的大道！

新數學教材內容的眞諦

就新教材而言，並非把過去的教材完全推翻而是把過去所授的古典無用或其他毫無用處的部份除去而代之以有用的近代數學，把過去的教材利用新的講法俾使靑年學生易於接受，我們目前對於新教材的內容，並不能完全滿意！雖然它力求完整嚴密也並不是完全沒有漏洞，要在邏輯上，求得完整無缺的證明系統是無法爲學者所接受；不過新教材中對於一些繁難的三角恆等式，因式分解消去法刪減而代之以集合，函數，羣體，向量，矩陣等觀念；尤其利用集合爲基本講述課程頗感方便，高中學生易於接受！

實施數學新教材的影響

新教材的出現是時勢所趨的必然性；一些新體制的實施往往會受到許多困難的阻撓，就數學改革而言，當初有許多教育界人士（現在亦不乏其人）認爲此項改革沒有多大的意義，尤其非純數學系的數學老師

對於傳統教學頗具經驗感到難以從舊套中解脫出來。不過對於學生方面有些在初中數學不感興趣的學生在高一接受新教材以後講法與以前完全不同，突然感到很有興趣；有些本來不能發問的學生，現在也可以找出問題來發問或是對於他自己作業中的理由提出相反的意見，他們似乎從被束縛的領域內解放出來；程度較好的學生對於它更是有趣，我目睹一位學生與老師談論許多關於教材上的心得，足見他對於數學進入了第一道門；不像以往舊教材，程度好的學生整天作些機械式的難題背誦以及繁雜的計算工作，磨減了他對數學的興趣。

新教材與數學教師的關係

新教材實施的成果與教師有密切的關係！對於一般學生而言培養研究數學的興趣是很重要的一件事；但是入學考試對於新教材仍容易引入以往注入式的教學，强記一些定理，學生不知所以然地暗中摸索足以減低他對數學的學習興趣；有位高中一年級學生埋怨老師考平面幾何必要每步驟陳述理由，有些理由是一條很長的定理又沒有冠以定理的名稱，寫來時間頗感不够，題目又多，每次對於數學考試成績都不盡理想；凡此均足以降低學生學習的興趣，在一次參觀教學中一位高一老師在課堂上對於教材與作者大加批評，這不但會使學生無形中對於教材失去信仰，並會使學生無形中對它不感興趣了！當然一個教材的新實施一位教師必須花很多的時間作充分準備，雖然對於傳統教學容易教學，不過作爲一位老師應該充實自己，有機會再學一套新的東西是更好的一件事；一個教師，教育青年學生，對國家的任務是相當大的，負得這責任，才能對國家有所貢獻；應當多利用機會進修，俾能勝任；尤其以往機械的教學法使學生對數學有許多錯誤的看法，在數學新教材中，教師應負有幫助學生忘記以前教給他們不正確的數學觀念的任務；機械式的教學會使許多學生對數學感到厭惡、厭惡到永遠不能消除這種惡感的地步！我們都知道教學過程的成功，教材的選擇固然重要，但是從事指導的教學者所負的任務是相當大的！

就新教材的內容與目前的一般學生反應，大體上而言適合於現代化的要求學生接受的能力一般很好；不過我認爲要使數學教育改革收到更豐碩的效果有下列幾個拙見：

一、就新教材的出現係屬第一次，爲了提高學生學習的興趣，對於較長的定理而來予冠以名稱（尤其平面幾何上的定理）儘量予以名稱；而一般老師對學生在教學過程中所遇到的問題出版當局與作者應予以重視！

二、入學考試試題的性質應完全徹底的改變，以往入學試題許多地方不合理，而引導教學亦走向不合理的注入式教學；因此入學考試對於教學相當密切；故對新教材的實施，入學考試要特別審愼，應脫離背誦式的題目，眞正地能够測驗出新數學對於學生的要求，打破傳統的閉銷，它是一項非常有效也是最好的方法。

三、教師從事教學不應以使學生懷着爲考試與成績而學習數學！固然考試而令學生學習有效果，但往往它會失去數學教育本身的眞諦；教師應設法使學生想學，討論或爲了數學而爭辯培養學生牽連或統一的能力，以達到數學教育的目的。

四、教育當局已將高中教材改革，師資問題殊足重視，應加以擴大新教材師資的訓練，使一般非數學系出身的數學教師，利用機會便於演習，利於教學！

五、爲銜接高中新教材起見，初中教材也應該加以改革以爲進入高中的準備，便於進入高中的新教材教學！

綜上所言，新教材在國內已成爲生氣勃勃的青年學生所接受，全國教育界人士應以責任之重，負有幫助學生忘記以往他們不正確的數學概念之任務；力除足以阻止它進行成功的障礙，尤其我們將要接受這種教學任務的同學應共同引以爲榮負起這個任務！

剖剖生存的疾病

——兼論單獨個人的範疇在倫理建構上的優位性——

數三：鍾 國 和

一、前　　言

宇宙人生是一種和諧圓渾的情理組合，分割不得。科學不能違情而言理，哲學不能滅理以陳情。唯有情理分明以及由分明而構成的交融，才可能有宇宙人生合理的探討(註一)。基於此，我們在行這方面的探討時，必須把人類求知的歷程詳加判別，也就是必須把求知或眞理的屬性確切區分——即所被追求的知識是偏情的，或是偏理的；萬不可將屬性倒置，而演出理彰而情乖，或情勝而理屈的畸態。對於眞理的區分，依理及情爲則，可分爲兩種：一種是關於「客體實在」(the reality of object) 的眞理，或稱爲「客體眞理」(objective truth)；一種是有關「主體實在」(the reality of subject) 的眞理，或叫著「主體眞理」(subjective truth)。前者像一般經驗科學的研究，是用一種抽象的語言來表明所探求的行情或價值，其所得的理論不含時空因素，也不受時空約束，而所凡主觀的成份也盡量被剔除。後者是牽涉到人的存在，宗敎信仰，倫理以及人生的基本信念，它所用的方法是把人眞實的經驗織入，所造成的不是什麼抽象的眞實，而是個人（尤其我個人）在自己（尤其是我自己）生活體驗中所得的眞實。這兩種「眞理」在現實生活的實際展現中，最大的差別是：前者只求「知性」上的滿足，對於個人在實際生活裏所焦慮的主體性的問題却不過問；而後者却把主體性問題的抉擇權，交給那「單獨的個人」(The individual)，也就是說，從個人存在的範疇裏，去探擷解決之方。基於上述的區分，如以實際生活爲準面，而來評定那一種對現實生活來得貼切，來得切身。顯然地，我們會覺得主體性的眞理優位「於客體性」的眞理。因一個人儘管他對「客體性」的眞理是知道得如何寥少，只要他活著，信仰，倫理以及人生種種的信念問題都會如影隨形地一直纏著他，他永閃避不開，他必須去做思索，下判斷，做取捨。

現在將被論到的生存的疾病，就是一個完全根植在情意生活的實際題目——即屬於主體性的。筆者談及這個問題，只是想爲主體性的知識，做番基層（當然是盡量地）地剖析，以及想爲自己以及關心的同學能共同來思索：思索如何才能眞切地抓住這類問題的「眞面目」，以及一個合理的倫理建構應該抓住那些素材，應該從什麼地方建設起，而使得我們不致盲亂地淪爲某「形上體系」的「食客」（註二），或「敎授座椅上的哲學」（註三）的俘虜，當我們思索這類問題的時候。

在還沒有進入正文前，筆者必須再次地强調：這類題目純是屬於那「單獨個人的範疇」(The individual Category)。因此，對於這方面的思索，我們萬不能拋棄現實生活的基本概念——個人存在的認識，而涉抽象的理性推理；也就是說，當我們向這個題目探索時，我們萬不能忘記個人存在的實際情景，更確切地說，我們不是去做個蜃樓海市的構想者，而是做個生命的工程師。因此，對於將被論述的題目，自然是把它列進單獨個人的範疇裏。

在單獨個人的範疇裏，被湧現的第一層意義是什麼？那便是存在的自我意識；而在存在的自我意識裏，所描繪的又是什麼呢？那便是「存在的病」。現在我們就來看看，這個存在的病：看一看爲什麼對存在的意識是個病，看一看這個病是何由而起以及它的症狀與所蘊含的意義。

二、生存的疾病

在還沒有進入本項前，爲了論述的方便，讓我們先來看看兩個名詞：「本然存有」(Being in itseef)

，或譯爲「在它自身（之內）的存有」。「自覺存有」（Being for itseef），或譯爲「爲他自己的存有」（註四）。

A. 本然存有以及自覺存有的解說

a. 本然存有

這是一種沒有「意識」（consciousness）的存有，永呈一種自足的狀態，卽它們的存有完全在它們自身，一些兒也不能跑出自身之外。例如桌子，石頭以及意識呈休頓狀態的動物軀體。這種「存有」有個特色，它嚴受時空的限制，因此它是有限的，時暫的以及必然的。

b. 自覺存有

這種存有是指能意識到自身的存有，因此它是動的，永呈超越自身而向外伸延的狀態。它能擺脫有限的自身，忽而踏至明天，忽而遊於昨日，甚而能憑風御虛而馳於於其大無外的天宇。這種「存有」有個特點，它不受時空的限制，因此它是無限的，永恆的（爲 a. 項時暫的相對）以及自由的。

淸楚了這兩個名詞後，我們轉回來看看人的存有性是如何。

B. 人的存有性質

對人的存有性，可利用這兩個名詞來解說。例如：當我散步，或哭號之際，我是保持在「本然體」（「卽本然存有」）的狀態，不過，一旦我的「意識」意識到了我是在散步或在哭號的時候，我便驟然進入「自覺體」、（卽自覺存有）。因此，當人還無意識湧現時，人是自足堅固的「本然體」——就像一棵樹，一塊石頭一樣。但當意識一作用之後，人便突化爲浮動、游離、不定的自覺體。由此可知，自覺體是能顯示本然體的一面鏡子，而本然體却是被（自覺體）思惟的一種「有」、一種「現象」。

從上面的例子，我們可以看出，人——不是泛稱的人，而是指各個獨立個體的人——如想擁有恆常的安定，唯有把人完全禁錮在本然體的狀態。其實這是不可能的，因人之所以能異萬物而爲「人」，就是擁有自覺體的緣故，欲去掉這種性質是萬萬做不到的，而這種「萬萬做不到」便種下了人不安的永恆性；因自覺體是個浮游不定的東西，它是潛伏在人中促使人不安定的一條永不死的小蟲。

人的存有卽是由本然體與自覺體組合成的關係性質，而本然體是有限時暫與必然的，自覺體是無限、永恆與自由的，所以我們可以說，人是有限與無限，時暫與永恆，自由與必然間的一個綜合（註五）。旣然是一個綜合，則在這種綜合的關係中，可能是協調的，也可能是失調的，如果是失調，便冒出了病。但是，在什麼時候這種綜合關係是協調的呢？也就是說在什麼時候人是安然無恙的呢？很可惜，這種協調只是一種推理上的可能而已，而不具有現實性，實際性。爲什麼？因爲一個無病的綜合體必產生在「自覺本然體」（Being-for-itself-in-itself）中，卽自覺體的不安容於本然體的自足安定裏，本然體的禁錮又染有自覺體的無限意識；也就是在那綜合中，兩者的關係是融洽無間的。倘設，這種融洽無間的綜合能被實現，則人便成了具有萬能幸福的上帝了，而一切的問題都不會再發生；但是，在現實生活的印證下，個人的情意問題却如海潮般地永不寧息。所以，自覺本然體只是人意欲上，推理上的一個可能而已，這種可能，在另一種意義上，給人帶來了希望與鼓舞，——實現的幻想，同時也給人帶來了絕望——因不可能被實現（註六）。自覺本然體卽然是不可能，則在那綜合的關係中——如果沒有借助外來的力量——必失調無疑，因此，人如不善自欺（Self-deception）的話，對自己個人的存在意識必定是個病痛。

C. 疾病之由來

在上一段的論述裏，我們知道，這個病是與人的存在並存，因在那綜合的關係中，自覺本然體恆不被實現。現在我們再就此病做更入一層的病源探討，分兩路進行，一是從綜合體下手，一是從意識下手。

a. 從人的綜合關係中看這病

人是一個綜合，如上述，而這個綜合的意願是要成一個「自己」。這個結果的「自己」是一個具體的，既是一個具體的，則它必不變爲有限（僅像那本然體），也不變爲無限（僅像那自覺體），因爲它是一個綜合的結果。所以那個成爲具體的過程，是無盡地脫離「本然的我」而向「自覺的我」進行，同時又無盡地涉回「本然的我」向著「自覺的我」潛進。在這種過程中，就產生三種情形的失調：1°.由自覺的我而生的——即在那綜合裏邊缺乏「本然的我」，2°.由本然的我而生的——即在那綜合裏邊缺乏自覺的我，以及3°.在繼續不斷地綜合過程中所引起的失調。現在分項述之。

1°.由自覺的我所產生的以及它的症狀

人是一個綜合體，在此綜合體中，本然的我是一個限制的因素（因其具有「有限」，「時暫」與「必然」的性質）而自覺的我則是一個擴延的因素（因其具有「無限」、「永恆」與「自由」的性質）。所以從自覺的我而生的失調，就是由一種無限制的「幻想」（即「自覺的我」中意識）所導成的，本來這種幻想是意味著「意識」的可能，這種可能如越加劇，「自我」或「靈性」（見註五）也就越加深厚。但是，如果這種幻想過度囂張，人便隨著「自覺的我」而被引入一種無限的抽象境地，而脫離了「本然的我」，並進而阻止人回到「本然的我」。這種的無限化或抽象化、在客觀上說來，並不能建立人的自主自得，相反地，却越發毀損了「自己」；因爲這種無限化是向抽象邁進，並不能有具體的表現，而人的「自己」却是一種具體的表現。但是在主觀上看來，他個人爲了達到無限化的目的與決心（這是他刻意追求的自己），他便越發地去注意現實的事務，注意那能立刻被實現而可得到表現他所意欲塑造的自己的事，所以，他在這種無限的擴延中，實際上他也有了（或表現了）「自我」也就是說，他由於無限化而毀損自己時，在同一時間裏他也越接近自己。不過，如一個人過度地受了這種幻想所驅，不是陷於抽象的追逐，便是陷於抽象的隔離，只是不斷地消乏其本身，因而離開現實的自己越來越遠。這種人想從幻想去追求自己，但却消損了自我，而最後失去了統合的安定。

患了這種病的人，在一般的現象說來，仍能活得很完滿：他們也能爲一些眼前的事忙著，也結婚，生兒育女，也可贏得榮譽與尊敬。——當然，很少有人（也許沒有）能敏察到他在深刻的意義下，是缺乏了「自己」。對於這種事，世人是不會管閑事的，因爲「自己」這件事是世人最少過問的；而且更要不得的是，世人最不願他人注意到他有一個「自我」，因爲自我可構成他的品質，是他的尖突點，而維持這種特性是不能與抽象的羣衆連成一體的。人喪失自我的危險性，却被安然放過，若無其事般地，這眞是一件悲哀的大事。

2°.由本然的我而生的以及它的症狀。

這種病也是導致喪失自己的病，不過這種病不是由於被「無限」（即自覺的我）吸去而得，而是被本然的我攝佔而有限化了。這種有限化的結果，使得病人不再是一個「靈性」，而只是一個人羣當中的一個單位。這種病人有個特色，他不會去理會有關生命裏頭的一些要緊的以及切身的意義，他完全淪進抽象的羣衆裏頭，並從其中緊緊地抓住人與人間的外在差異，因爲這在他們說來、正是一種所謂致富或致福之不二法門。因此這種人是淺陋與鄙俗的。人被生出的最高意義是，他必須有他的「自我」以及他必須做個「自己」。這種「自我」或「自己」（多少都染有病）當然有其尖特之點。在人的一生裏，應該把自己的這種特異點加以琢磨，而不是將其盡量或完全磨損而變成失去「個性」的「平面」。但是得了這種病的人，却反人之爲「人」之道，而自己剝棄了自己的品質，把自己的「自我」閹割掉了。這種人之所以淪此地步，乃因他們完全心服地向空無的的羣衆投去，而羣衆正是夷平（levelling）人的一切「特異點」的惡魔，它使人不敢去承認或成爲自己，也使人不敢去表現他本質上所擁有的特性。其實，人如不憑其其特性，怎會成個自我呢？上一項的病症是由於虛妄地投進無限而喪失了自己，這一項的病症是讓自己爲別人（尤其是羣衆）所奪去。這一種病症的人，處在五彩繽紛的世上，往往看到世人因埋首世事而騰達，因熟練世務爲聰明，便忘記了自己，甚至忘記了他之爲「人」的「名字」，因而成了不敢相信也不敢承認自己，並深

感（往往是異常地感慨）卓然爲人太冒險，太划不來（其實人就是要從事這種冒險才能會有自我）。唯有亦步亦趨地仿效羣衆，在羣衆中作一分子，湊一個數目，才會有安全，會有幸福。

患了這種病症的人，正因爲他放棄了自我，所以他沒有從自我導出的「無限」的干擾與困惑，所以他往往圓滑得像海邊的卵石，光華地像枚金幣。這種人在羣衆裏頭，不但不被視爲患著絕望症的人；相反地，却被視爲値得人人效法的模範，如果他是世路亨通的話。世人眞是太不懂得什麼才是眞正可怕的事了！

3°.在繼續不斷地綜合過程中所引起的失調。

自我是一個繼續不斷地進行的東西，因它是存在在不斷地綜合的關係裏頭。因此，自我一旦被綜合成後，爲了持續，它便需要有不斷地「生成」，而這種「生成」，便需要自覺體與本然體以及所已有的自我進行不斷地關係作用。在這種生成的過程裏，也有仿上的病症產生，因這種過程是由所已有的「自我」產生所需生成的「自我」，在這裏頭，所已有的「自我」是「必然」性的，所需生成的自我是「可能」性的，必然性的是規限作用，可能性的是擺脫作用。因此，在規限與擺脫的綜合關係中，會有失調的產生，而病也就湧現出來。屬於這一層的失調與1°.及2°.所述的相仿；即由「可能性」產生的是仿1°.，由「必然性」產生的是仿2°.。

b. 從意識看這病

上邊的論述，只是從綜合的關係中討論，因此，它是單純的，機械的。不過，在實際裏，人罹致此症，並不如上邊所述的那麼呆板，而是交錯複雜的，它時而是由上述的 1°.引起，時而又轉爲 2°.引起，或時而爲 3°.中的必然性引起，時而爲 3°.中的可能性引起。但是，不管它是如何混亂與複雜，如用意識來看此病，這病可分爲：

1°. 不被意識到的病；

2°. 已意識到的病。

現在分項述之。

1°. 不被意識到的病。

這種病極嚴重，它是由於不能意識到人是具有自我而起的。這種人，他的心智可說全被血肉的直接感性所籠罩，他過慣了情慾的生活，所注意到的只是事物對他相安或不相安，而與靈智的追求睽違。他既然是慣於情慾的生活，當然就沒有勇氣去過或承受靈性的生活。這種人，不管他在世俗裏是如何的自高，但他終因不能認知自己是靈性而把自己鄙微了；即他的自高不過在於和別人做一種表面的比較，而不是從自覺自己是具有一種絕對的價値而起的。這種人通常具有一種固執性，他們常去錯覺某才是幸福，並且恆不脫離這種錯覺。倘有人去指破他的錯覺，則他們必對他極懷憤怒，認爲這是侮辱，近於殺人的罪，因爲那是損傷了他的快樂。這種不長進的固執性，我們也可用一個例子描繪。譬如宴客時，桌上滿佈豐富的菜肴，但很奇怪，他不去挾些可口的珍品，却躲到桌子的末端，盡挾些泡菜吃。如這時有人拍了拍他的肩，邀他也挾塊燉肉嚐嚐時，他便大發脾氣，因爲他以爲自己已吃得非常舒服，非常甘美。像這種人總以爲自己是安然無恙，其實却是安安然然地處於惡病的威脅下，只要一旦他被拋進了人生的顚簸之中，他的內心恐惧便刹時暴現，這時災禍便防不勝防地向他襲去。在莫泊桑的短篇小說「散步」裏，爲了刹時落進寧靜心湖裏的意外事件，而一夜之間便上吊自殺的雷納，正是這樣的一種人。（莫泊桑這篇文是値得深讀的一篇，有興趣的同學可找翻譯本看，大業或正文有出版）。

2°. 已意識到的病。

這種病是指有自我意識，並且又已意識到這種病而起的。這病可分爲：

(i) 不願做自己而得的病；

(ii) 願做自己而得的病。

(i) 不願做自己而得的病。

這種病的產生是由於某種事物（可能是心內的，也可能是心外的）的刺激而對自我感到失望，並因而

對自己厭惡而不願做自己所致。但是人是無法取消他的自己，正因爲無法取消他的自己而絕望而病。爲了能更明白地表達這病，現在舉一個爲大家所熟悉的愛情來做例子。某人對他的愛人感到失望，因爲她對他負情。如果他一向是眞心眞意地愛她，並且又以一種染有幸福的幻想的美來把他自己和她牢牢地連成一體，而使得他的「自我」變成了「他的愛人」時，則這個對他愛人的失望，就馬上成了他對「自我」的失望。本來他的「自我」可構成他的種種幸福（同樣地，也可能構成他的病），但是現在却成了他的空虛無聊，因爲他的愛人已對他負情了。因此，使得他一想到這個痛苦，就對自己失望。如果，這時有人勸他說：「你何必這樣呢？你這樣不是在摧毀自己嗎？」他的回答却是：「啊，你不知道，我的痛苦不是在摧毀自己，而是我無法消滅自己啊！」這種痛苦正是一個由不願做自己而得的病。

(ii) 願做自己而得的病

患了這種病的人，較一般人富有意識能力（卽思想）以及理想。他的病因是由於意識到自我的不够具體，而更願意去塑造自我，抓住自己；然而很可惜，這種人却抓住了意識的無限性（這也正是使得他的意識能力能較他人強之故），而想擺脫具體的自己，去創造意欲中的自己。一個人所屬有的具體的自己是具有必然性與限制性的，它具有它的固定性質以及固定的才能等等，但是這種人却想借助無限的意識而去創造一個他想做的自己。結果他終把自我變了蜃樓海市而實現不出具體的自己來，他只是在消損原本的自己而已！一般說來，由於這種人意識的能力特強，所以他的病顯得異常詭秘與沉重。現在舉一個例子說明這種病。時下被標爲或自標爲前衛派的詩人（有些很值得敬重，有些却令人難以領教），他們受了「幻想」之所驅，而致力去追求想像中的自己；他們之所以如此，乃因他們對自我與時代認識較一般人敏感。因此極力去做自己乃是他們心中強烈的意願。但是由於這種人思想的豐富，所以他們往往會極詭秘地引經又據典，援某一學派又證以某一理論來做他們「幻想」的支持。倘設，此時有人冒犯了他，他便振振有詞地用口或筆來反擊他。在日常生活裏，他們往往表現得很積極與狂熱，同時也很囂張與跋扈。不過這種人，終必陷入一種以抽象的努力去追求無限，因他彷徨失措追求的那個自己，正是他本來不是的那個自己，若他定意要做他本來的自己，就不至於如此；但他現在所想要做的自己却和那構成他「本來的自己」脫節，結果便使他陷進了抽象的盲亂追逐。在這種情況下不管他是如何地費盡心力，他仍不能擺脫他原本的自己，但是他却極力去擺脫，而那意欲裏的自己對他又是一種鏡花水月；最後，他終於使自己失去了統合，也失去了現實性。像這一種的人，自殺率往往很高（註七）。

以上是筆者，對這病的概略剖析。這種病人人都罹有，只不過是人人罹致的路線不同，或每一個人有時是從這方罹得，有時從那方罹得的差別而已！

三、這個疾病對人的意義

在本質上看來，這個病是個絕望的病，因爲自覺本然體不能被達到，既不能被達到，這個病就與人的存在並存。這樣看來，把人安放到個人的範疇裏，仍不能給人理出一條安定的，幸福的道路。人的本質既然是如此的不安定，那人的對這方面的力求安定，可以說是一種愚頑的反抗，而這種反抗將永被註定只是一種無用的熱情而已！不過，在另外的一層意義裏，這個絕望並不是令人沮喪心志，反是提高人的心志（註八），因此，對於這個絕望的深切意識並不是一種不幸，反而是一種幸運與希望，倒而那些覺得安全，滿足，而不知人正被這種絕望擷住的人，才是一種極大的不幸。如能有這一層的意會，往往可爲自己迷茫的處境賦上一種淸醒，可爲自己幾乎是荒謬的人生披上一層歡情的意義，因而使得在「行動」的展現中，感到做人的意味是無窮，因爲人在本質上雖是絕望，但在綜合的歷程裏，却永不會是個終結，而是一直被決定的東西。所以人被拋到這個世上，受著這種絕望的襲擊，可說正意味著人的被要求。因此，懂得絕望的人，乃是一種大幸，不懂得的人，乃是一種不幸。

走筆至此，筆者感到，也許會有人認爲筆者說得太過火，太過黯淡悲觀。但是，筆者自己認爲並非如此，它倒是把一個爲平常人所遺忘的問題，撤去它的幽暗而加以亮光。如果這個題目不被人重視，思索，筆者認爲，我們人將失去了所謂「爲人」的興味，而我們生活在這世上，除了只是像樹木本能地向上生長

，動物本能地在草原逐生以及湖水的被風吹縐外，將不會再有其他的意義存在！

四、單獨個人的範疇在倫理建構上的優位性

今天，我們人類的發展已有一個可怕的畸態產生：科學以日行千里的速度向前飛躍，但是「人理知識」却是像蝸牛般地緩緩而行。在這種畸態裏，使得我們生活的整體內容產生了失調，發生了問題。其中最嚴重的問題便是倫理問題。現在我們就來論這個問題，爲了方便筆者先敍述「把單獨的個人從集體裏拯救出的必要性」，再述「單獨個人的範疇在倫理建構上的優住性。」

A. 把單獨的個人從集體裏拯救出的必要性

現代的社會是複雜與繽紛的，處在這種環境裏的人，往往由於欣羡社會性的效果（這已成了俗下做人最高的目的所必遁的路）常常會不自覺地失去了自己，而心甘情願地向「羣衆心理」（psychology collective）投去，或以「羣衆意識」（concience collective）爲自己的意識。在這種普遍的趨勢下，「那單獨的個人」（註九）（The individual）已慘遭摧損，甚而已被捕滅。「單獨的個人」一被壓制，就使得社會病症顯得異常的詭秘與朦朧，所以當著手處理這個問題的時候，我們的「社會病理學家」才會把病症的分析盡往「組織的機能」或「制度的結構」推去，而大大地忽視了人的問題，而一般所謂學者才會以「爲學問而學問」的乏熱情的態度，或想成名、不甘寂寞的心情來處理或大談這個問題（因爲他們根本就沒有那單獨個人的意識）。這眞是一個應該被普遍自覺到的弊病，因爲所有問題的癥結並不是在那裏，就在人的問題上，也就是保羅田立克（Paul Tillich）（註十一）所說的：當下要不要（to be or not to be）做個人的問題上（註十）。所以解決這個問題的方針，恰如祁克果謂的、不能從集體著眼，必須從單獨的個體著眼。現在我們就對此詳論。首先我們先說爲何從集體裏把單獨的個人拯救是必要的。

由於科學進步所得的成效，今天我們已普遍地生活在一種舒適的，熱閙的天地裏，我們已不再擁有我們前代的那種空寂日子的啃噬。但是，這種舒適却也爲我們帶來了一種危險，這種危險使得我們已逐漸趨向於懶慵與外散，我們已不再如我們前代的人來得凝聚與深沉；因我們所應擁有的獨自安靜的時間已被外在的繽紛所奪去，我們普遍毫不自覺地把寶貴的時間抛在羣衆心理的氣旋裏，抛在勢利的劇烈競爭裏，而所追求的所謂知識，也只是做爲這方面的武器而已（在目下的社會，正有很多漂亮的口號支使我們這樣去做），或抛在沒有一點寂寞的娛樂場所裏；我們變得了好像臨睡的小孩般的，若沒有熱閙的嘈雜聲來做搖眠曲便不能安下心來入睡。因此，我們越來越貧乏，我們逐漸忘記了很多不應被忘的「題目」與「意義」。更可怕的是，現代的社會已培養了一股否定「人性」與剝落「個性」的力量，而一種所謂抽象的集團也不斷地侵襲個人的隱秘，破壞了人與人之間的坦誠與友愛，也剝奪了個人的創造力以及內省性。處在這種境況裏，個人的地位已被壓制成只是一種「集體」的統計數目字而已！不再具有絕對性的價值。因此，健全的個人越來越少，人普遍養成了一種沒有深意的情慾的享樂心理，缺乏理想，缺乏倫理，缺乏有意義的人生哲學。於是，社會問題便如海潮般地湧現。而這種問題的癥結就在那單獨個體的問題上，所以，把人從集體中拯救出來是必要的。

B. 單獨個人的範疇在倫理建構上的優位性

由於哲學上心物二元的不能被統合，主體性知識與客體性知識的對立是截然分明與應該被認淸的，否則，知識的研究不是演變成「情勝而理屈」便是「理彰而情乖」的畸態，而不能給問題帶來眞確有效的解決。例如歷史上有挾住「絕對精神」而去建構「人生觀」，「世界觀」以及「宇宙體系」的强蠻無理（這一類可推黑格爾（Hegel）爲代表；）以及採用客體知識的手法來批評與處理主體知識的狂妄（這一類可以二十年到三十年代的維也納學派爲代表）。這類對知識處理的畸態，在歷史上，往往會形成一種心理的風暴，而這種風暴往往是構成歷史動亂的主要因素。例如黑格耳以日耳曼爲中心而推演出的世界體系，以及費希特（Fichte）的國家觀念論，可說是支持希特勒「瘋狂」的一大因素。所以對知識屬性的區分，是

該與必要的（註十二）。

倫理學純是屬於主體性的知識，它是研究人與人之間的關係以及「人的內容」，尤其是「人的內容」（即人的存在問題）。但是，很可惜，一般研究這方面的人，却大大地忽視了「人的內容」的重要，只著眼於人與人之間的關係上。在處理上，如果「人的內容」一被忽視，則人便失去了他所擁有的奧秘性，與不變性，變成了只要幾個符號便可表示完盡的物體；因此，在這種誤認裏，處理的手法很自然地便落到了自然科學的機械推演裏去。於是研究，拼命地研究（在這種研究裏，往往也是方法嚴密，構思精細的），成果輝煌，什麼系統，什麼體系，一個個地出籠；不過，很可惜地，這種建構只是一種華麗的海市蜃樓而已！在生活上根本就套用不上。這種荒謬的成就，可用百多年前祈克果（S. kierkegaard）的嘲諷來形容：當我們一觀察他們的生活時，却往往發現了一件可笑的事，我們可以看出他們自己完全沒有生活在他們自己所建構出的系統或體系裏，反倒生活在系統或體系外的一個「狗庣」裏（註十三）。祈克果這段話，真把這種座椅上學問的荒謬揭發淨盡。上述的那種探討法之所以會產生流弊，乃是他們沒有認清這個問題的基點是屬於人的內容（即單獨個人的範疇）。但是，非常令人痛心地，這種錯誤仍不能普遍為人所承認，在今天仍然有相當多的人執迷地，頑固地錯下去。在這種不被覺醒的現象裏，一般對這方面的探討已失去了它原有的意義、它已變成了只是「學者」生活上的裝飾品，或學院高牆內的玩物而已，已不再具有實際生活的效用。前年，在非洲逝世的史懷哲醫生（Albert Schweitzer）（註十四）也曾為這個問題，説了段極沉重的話：「現在的哲學，尤其是在歐洲哲學中，又產生了另一種型式的思想，完全不是基本化……它全神貫注於知識的性質問題上，如理則學，自然科學，心理學，社會學，以及其他許多事物上。好像哲學眞是專門替這些問題作解答，或者好像哲學的功用，只在把不同的科學結論，加以選擇和系統化。這種哲學不鼓勵人類不斷去默想自己，以及他們與世界的關係。反而帶給人類的是認識理則學，自然科學，心理學，或者社會學的結論，叫人類單獨依照這些學問，來確定他們的人生觀，和世界觀。這一切的學問，都使人覺得自己好像不是生存於這個世界，或在這個世界中過活的生物，而是生活在接近這個世界的一個地方，來觀察這個世界。」（註十五）

所以，欲對倫理有個可能的及合理的探討，其要點是「有而且只有」從「單獨的個人範疇」開始，把單獨的個人從集體裏營救出來，教他懂得思維，變成深刻（註十六）。否則所為的一切、只是打打空氣而已！沒什麼實際的效用可言（如果不把人當成是個養在地球上的動物。）。

五、餘　　論

筆者這篇文字是從個人的單獨範疇來剖析存在的病，以及談了些倫理建構所必遵行的路。筆者的目的是在提醒肯思索以及有興趣的同學：單獨個人的範疇對個人生活的重要性以及一個合理的倫理建構「一定必須根植在對單獨個人範疇的認識裏」。另外，筆者寫這篇文章，還有一個更殷切的心願：期盼這篇文章能引起同學們的共鳴，使得同學在看過之後，能為各人的「我自己這個人」做番認眞地，仔細地以及眞確地思省，而不致令自己的一生糊里糊塗地去抓住些「抽象體」而把自己浪費掉。

最後，筆者引用一百年前祈克果的一段話，來做為本文的結束。

「啊，這眞是慘，許多人活著欺騙而未曾得到這種最有福的思想，許多人忙碌在一切別的事上而未曾想到這個；更有許多庶衆，為人們所驅使去經營其他一切的事，利用它們去發生力量來導演舞台的人生，却從未曾有人提醒他們去領略這種福氣；人們把他們推成一堆，而不讓他們個別分開來得著那最高尚的事物，得到那唯一値得生活的，且能滿足永生的事物。世上正有這種慘事的存在，我似乎不得不永遠地為之痛哭。」（註十七）

1967.5.26.夜

附　　註

註　一：方東美在他的科學哲學與人生的緒論裏，錄了兩句華夫人的話，見西青散記卷四，可説把宇宙人生的情理渾融道出淨盡。這兩句話是：「自古以來，有有法之天下，有有情之天下，……何自有情因色有

，何緣造色爲情生，如環情色成千古，豔豔熒熒畫不成……」

註　二：祁克果在1837，1月17日的日記曾寫：哲學每行一步都脫一層皮，它的食客就爬進去居住。

註　三：這句話是叔本華（Schopenp hauer）嘲笑黑格耳（Hegel）語。

註　四：這是沙特（Sartre）「本體論」內的兩個名詞，這兩個名詞其實就是傳統哲學「心」，「物」二元的改良。這兩個名詞是採自 Wilfrid Dean 的 The Tragic Finale, An Essay on the philosophy of Jean Pau Sarter

註　五：從這裏，我們可解釋自我與靈性：

自我：自我是「自覺存有」與「本然存有」發生關係的那個關係。

靈性：是一種自我，不過這種「自我」較上項的自我來自一個更複雜的關係。對於這種複雜的關係，可用如下的例子解析，在兩個物件發生關係時，那關係本身便是第三者，如果那原來的兩物件也對那關係（第一次的）發生關係（第二次的），甚至對第二次的關係發生關係（第三次的），如此類推下去，進展到與第三次的，甚或第四，五，……也發生關。如果上例中的關係是導從自覺存有與本然存有間的，則那個與第一次；第二次，甚或第三次，，第四次……發生的關係便是靈性。上述的說法，筆者是從祁克果的說法改良來的。

註　六：沙特嘗謂，人類的現實就是欲成上帝的全盤努力，然而却沒有努力的根基，也看不出朝這方面努力的跡象。」……「人無非是一堆無用的熱情而已！」

註　七：這種人萬一是總攬大權的君王或獨裁者，往往會爲了一己的野心而殺人盈野，歷史上像這類的英雄爲數不少。

註　八：這種超脫是屬於意志，不是屬於知識，筆者難以詳述，請同學參見卡謬（Albert carmus）的薛西弗斯的神話，這篇文有翻譯，現收入陳鼓應先生篇的存在主義的版本裏（商務人人文庫（353，352）。或參閱方東美在科學哲學與人生的末章所論的希臘悲劇精神的三義。

註　九：這是祁克果（S. Kierkegaard）常用的名詞，他會在他的著作裏謂， 他呼讀者爲那單獨的個人（The individual）是對讀者的一種敬意。

註　十：這裏所說的「做人」，並不是道學家或宗教裏所說的那種「做人」，而是說做一個「有存在意味」的人。

註十一：(Paul Tillich) 保羅田立克（1886—1966）德人，爲當代著名的存在神學家，著作有「信仰的力量」（臺灣有譯本）等。

註十二：方東美在他的科學哲學與人生裏，對這種畸態有詳細的論述。有興趣的同學可參考。

註十三：採自祁氏的致死的疾病（The sickness onto death）

註十四：史懷哲德人（1875—1965）是一位人道主義者，有「非洲之父」之稱，年青時獲得，哲學、神學醫學博士，三十歲過後，把全身的精力用在赤道非洲行醫，爲土人服務。畢生反對戰爭，反對對暴力，曾得諾貝爾和平獎金。他偉大的地方不是見諸空言，而是付諸實踐。

註十五：見史懷哲的 Out of my life and thought, Ch.21

註十六：史懷哲嘗謂：……我在世上立身及工作，處處都想使人思維，使他們變得較深刻，較合乎道德標準。錄自同註十五。

註十七：錄祁克果的The sickness onto death。（註：祁克果(1813—1855)丹麥人，爲當代存在思潮的鼻祖。）

末　註：在第四節的B中，所提到的維也納學派，就是當今邏輯實徵論的前身。這個學派剛建立的時候，非常的狂，幾乎用他們專橫的態度罵盡了歷史上所有的學派，尤其是形上學派。不過，現在這個學派已將討論的範圍逐漸縮小，已不再關心情意上的知識了。關於這個學派，劉述先在他的「新時代哲學的信念與方法」有批的評論述。另外，對於解析哲學（這是由於意語學的成長而鞏固的一個學派）在情意上處理的困惑，他在那本書中也有論到。

一個小小的問題

高中數學第三冊(東華本自然組 P.27)

若 $a,b,c\varepsilon I$ 則 $(a+b)+c=a+(b+c)$

【證明】此定理對於 $a,b,c\varepsilon N$ 或 a,b,c 中有一爲 0 均不必再證，故可分下列各情形證明之：

(i) $a,b\varepsilon N,\ -c\varepsilon N$　(ii) $a,c\varepsilon N,\ -b\varepsilon N$　(iii) $b,c\varepsilon N,\ -a\varepsilon N$　(iv). $a\varepsilon N\ -b,-c\varepsilon N$

(v) $b\varepsilon N,\ -a,-c\varepsilon N$　(vi) $c\varepsilon N\ \ -a,-b\varepsilon N$　(vii) $-a,-b,-c\varepsilon N$

其證明甚繁，讀者若有興趣不妨任取一、二證明之。教科書交代到這裡停了，數學老師也沒有耐性去幫學生解這個問題，但我發現學生對這個問題很有興趣，南部名中學幾個高二生來信要我再給他們多一些提示，深感小孩子的求知慾不可抹煞，趁去年暑假閒暇爲他們動筆。

(i) $a,b\varepsilon N,\ -c\varepsilon N$

設 $-c=d$

(一)若 $b>d$ 則 $a+b>d$

$(a+b)+c=(a+b)+(-d)=(a+b)-d=h,\ h\varepsilon N$

令 $(a+b)-d=h.$ 則 $a+b=h+d$ ……①

又 $a+(b+c)=a+[b+(-d)]=a+(b-d)=a+k,\ k\varepsilon N$

令 $b-d=k$ $\therefore$ $b=k+d$ ……②

由①②得 $a+b=a+(k+d)=h+d$

$(a+k)+d=h+d$

$\therefore$ $a+k=h$， 即 $(a+b)+c=a+(b+c)$

(二)若 $b=d$ 則 $a+b>d$

$(a+b)+c=(a+b)+(-d)=(a+b)-d=h,\ h\varepsilon N$

令 $(a+b)-d=h$ 則 $a+b=h+d$

$\because$ $b=d$ $\therefore$ $a=h$ ……③

又 $a+(b+c)=a+[b+(-d)]=a+[b+(-b)]=a$

即 $(a+b)+c=a+(b+c)$

(三)若 $b<d$ 且 $a+b>d$

$(a+b)+c=(a+b)+(-d)=(a+b)-d=h,\ h\varepsilon N$

令 $(a+b)-d=h$ 則 $a+b=h+d$ ……④

又 $a+(b+c)=a+[b+(-d)]=a+[-(d-b)]=a-k,\ k\varepsilon N$

令 $d-b=k$ 則 $d=k+b$ ……⑤

由④⑤ $a+b=h+d=h+(k+b)=(h+k)+b$

$\therefore$ $a=h+k$　$a+(-k)=h+k+(-k)$　$a-k=h$

即 $(a+b)+c=a+(b+c)$

(四)若 $b<d$ 且 $a+b<d$

$(a+b)+c=(a+b)+(-d)=-[d-(a+b)]=-h\ \ h\varepsilon N$

令 $h=d-(a+b)$ 則 $d=h+(a+b)$ ……⑥

又 $a+(b+c)=a+[b+(-d)]=a+[-(d-b)]=a-k\ \ k\varepsilon N$

令 $d-b=k$ 則 $d=k+b$ ……⑦

由⑥⑦ $h+(a+b)=k+b$

$\therefore$ $(h+a)+b=k+b$　$h+a=k$

$\therefore$ $h=k+(-a)=k-a,$　$-h=-(k-a)=a-k$

即 $(a+b)+c=a+(b+c)$

仿上：(一) $a>d$ (二) $a=d$ (三) $a<d$ 且 $a+b>d$ (四) $a<d$ 且 $a+b<d$時亦成立。故 $a,b\varepsilon N$ $-c\varepsilon N$ 時 $(a+b)+c=a+(b+c)$ 恆成立。

次 (ii),(iii) 仿 (i)，(iv),(v), (vi)，依加法反元素，又與 (i) 同型

(vii) $-a,-b,-c\varepsilon N$ 則 $[(-a)+(-b)]+(-c)=(-a)+[(-b)+(-c)]$

再依加法反元素可證得 $(a+b)+c=a+(b+c)$

「期考在即，生命交關。」理事長只給我一個鐘頭時間，以補篇幅之缺，錯誤必多，請指正。

※ **謹以此獻給那屬於懶惰的畢業學長暨在校的小老師。**　　——數三　吳富藏——

賀

本系同學

王作民	王樂群
汪昌言	周勝生
陳昭地	黃允明
王　坪	林哲雄
王惠中	周武男

高　中

清華大學數學研究所

此次創刊經費不足承師長及同學們踴躍贊助茲誌芳名如下：

一、師長部份

康洪元（三百元）
王詩頌（一百元）
陳銘德（一百元）
邱日盛（一百元）

二、學生部份

陳勝雄（二百元）
賴建業（五十元）
戴勝明（五十元）
吳惠珍（五十元）
黃壽雄（十元）
畢詩存（十元）
林英雄（十元）
李文光（十元）
王建都（十元）
陳高田（十元）
李耀茂（十元）
莊聰智（十元）
吳宗典（二十元）
鍾國和（十元）
郭友義（十元）
黃憲式（十元）
劉松田（二十元）
蘇永霖（十元）
林福來（十元）
徐　純（十元）
簡　爾（二十元）

戴樂生（十元）
陳順宇（十元）
葉慶文龍（一百元）
黃主享（五十元）
林榮男（十元）
彭武棕（十元）
鄭錦彬（十元）
劉維中（十元）
鄭根國（十元）
翁玉忠（十元）
陳惠南（十元）
林江泉（十元）
楊清誌（十元）
六一三室（五十元）
吳富藏（五十元）
陳進陽（十元）
郭正義（十元）
陳　返（二十元）
林義坤（十元）
鍾維澄（十元）
謝秀芳（十元）
周秀珠（十元）
黃艷麗（二十元）
屠耀華（二十元）
陳東妹（二十元）
項海麗（二十元）
陳慎貞（十元）

賴瑞鈴（十元）
黃淑華（十元）
林明勇（二十元）
葉東進（二十元）
高月嬌（十元）
竇長寧（十元）
施建東（一元）
胡安衡（五元）
秦宏璞（十元）
王應毓（十元）
葉綉蓮（十元）
謝幸雄（十元）
樂芳吉（十元）
白德茂（十元）
吳宜修（十元）
黃重嘉（十元）
邱吉雄（十元）
黃金鐘（十元）
羅永川（十元）
張芳渝（三十元）
謝中光（二十元）
郭茂雄（二十元）
郭秀郁（三十元）
林妙英（十元）
陸培恩（十元）
吳金波（十元）

林忠信（十元）
蕭清輝（十元）
李禎泰（十元）
林振山（十元）
王水香（十元）
鎮健常（一百元）
吳隆盛（十元）
甘邦俊（二十元）
張敏誼（十元）
吳椿松（十元）
樊　鵬（十元）
陳德明（十元）
郭承仁（十元）
吳建明（十元）
陳信成（十元）
林蓮茹（十元）
林博仁（十元）
陳獻平（十元）
許崑陽（十元）
陳忠貴（十元）
許文振（十元）
謝榮田（十元）
黃吉成（十元）
王朝松（三十元）
何竹雄（十元）
陳國梁（十元）

編後話

「萬事起頭難」在同學們合力的工作及學會常務理事陳勝雄同學，犧牲課業和時間，竭力奔走之下，「數學系刊」，終於呈現在各位的面前。

這是一塊屬於我們自己的園地，希望同學們多多利用它發表自己的讀書心得，共同討論，互相研究，藉以蔚成讀書風氣，創造各人的錦繡前程。

因爲是第一次出刊，難免不受到經驗欠缺及時間匆促的影響，而編輯得不夠理想，但是我們一直以爲路是人走出來的，有了開始，便有希望。在遍地荆棘中，我們終於闢出一條路，儘管它僅是一條小路，崎嶇難行，我們相信有一天在同學們的批評指敎，努力耕耘之下，終會拓成一條康莊大道來。

最後，此次創刊承蒙康主任及各位師長在百忙中惠賜大作，謹致謝忱。又封面承葉東進同學設計及幾位同學幫忙校對，熱情可感，一併在此致謝。

師大數學系刊

創刊號

師大訓課刊登字第130號(非賣品)

發行人：康洪元

出版者：師範大學數學學會

學會負責人：陳勝雄

主編：郭茂雄

賴建業

編輯：黃主亨・葉慶文龍

印刷者：高長印書局

廠址：臺北市大同街一一九號

中華民國五十六年六月十五日出版