數學系刊

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
NATIONAL TAIWAN NORMAL UNIVERSITY

3

我所知道的孔子教學主張

系主任的話

唐洪元

系刊編輯再三向我索稿，我一直遲遲不想動筆。並非我惜墨如金，而是我以爲諸位同學都是大學生了，將來又都要爲人師表，亟需培養一份獨立自主的精神。而且系刊成立至今，倏忽三載，初創的艱苦時期，已經渡過，今後同學們應當獨力墾殖這一片屬於自己的園地，用不著再倚賴師長的文稿了。話雖如此，但感於編輯同學的懇切，無法推辭，所以藉這機會，來談一談孔子的教學主張，作爲大家的借鏡

大家所熟悉的孔子教學主張，是“有教無類“與”因材施教”，關于前者，孔子曾說：“自行束脩以上，吾未嘗無誨焉”，甚至，“有鄙夫問於我，空空如也，我叩其兩端而竭焉。”由此可知，孔子誨人不倦的熱誠與懇切了，關于後者，在爲政篇載有他的弟子孟懿子，孟武伯，子游、子夏等人詢問有關“孝道”一事，孔子的答覆並不一樣，他是因各人的性格作風而分別答覆的。由此可見孔子對學生的瞭解之深和因材施教的苦心了。現在，大家歡喜講標準答案，講提高程度，却不知道“標準”的眞實意義，不知道深入淺出使學生領悟，這是教學上的大悲劇，値得大家深思。

除了“有教無類“與”因材施教”以外，我想提出一個大家所忽略的問題，那就是孔子對於“知”是相當注意的。論語第一篇，就是“人不知，而不慍，不亦君子乎？“這裡所謂”人不知而不慍，”我以爲是一種甘於寂寞的表現。是爲人師者的基本修養之一，孔子再三提到這個問題。“不患人之不己知，患不知人也，”“不患莫己知，求爲可知也。”“古之學者爲人，今之學者爲己。”“不患人之不己知，患其不能也。“大家既已走上了“教育”這條路，就必須持之以默默耕耘，埋頭苦幹的態度，抱著不求人知的精神，做一個“無名”的拓荒者。“德不孤，必有鄰”，好人是不會寂寞的。

在論語爲政篇裡，又載有孔子這樣一段話就“由，誨汝知之乎，知之爲知之，不知爲不知，是知也。”這是一句樸實的眞理，一掃那種矯情與惺惺作態，聖人的坦白眞淳，於此可見。孔子嘗自云：“吾不如老圃，”這裡我們又記取了一個新的教訓，誇浮虛妄，是聖人所禁忌的。“聲聞過情，君子耻之”，這是爲人師表應當體會的。

我想，“有教無類”，“因材施教”，“甘於寂寞”，虛心知耻”，應該是我們的座右銘，希望各位同學共同勉勵。

數學系刊

自己的園地　自己耕耘

我們——

一群走在同一條路上的伙伴

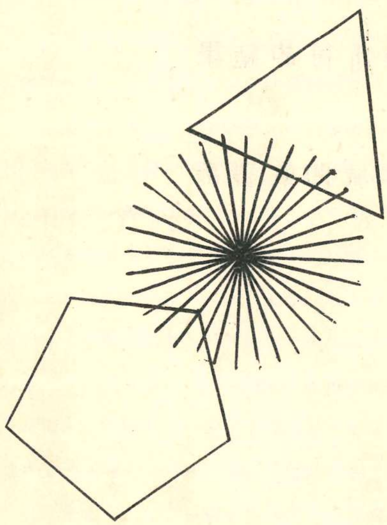
要

記取前人血汗淚所得的結果

來

開拓吾人生活領域的眞善美

數學系刊



目錄 3

國立台灣師範大學數學學會印行
中華民國五八年六月二〇日出版

編輯人語

• 傑 •

□首先，編者向各位同學表示歉意—系刊拖延了這麼久的時間才出版。

□至於延遲的因素是：稿件的缺乏，「巧婦難爲無米之炊」編刊物而無稿件，那一切不必談了；又因同學對這方面沒有「自動精神」故編者只好四處拉稿，直到期中考完才算收齊；稿件難收，此其一也。

□其次編者辦事能力不足，以致於找印刷廠、估價，送至學校審查，又費了不少日子；最後得系裏助教與理事長之奔走，才能通過，此其二也。

□本期系刊有二大特色：第一：稿件都是同學的作品，而沒有借助於師長的文稿，誠如系主任所講的：「今後同學們應當獨立墾殖這一片屬於自己的園地！」同學們的作品不敢說有什麼價值，但至少刊出同學們的作品，大家可以藉此研討其觀點、想法—這也就是出版系刊的主要目標。

□第二個特色是除了刊載學術性的文稿外，還刊登同學們文藝性的文章—在這裏，要感謝系主任答應編者的這項請求。希望同學們在滿腦子xyz之外，也能看一看這些屬於我們系裏同學的心靈吐露！

□最後，感謝下列諸位同學熱心幫忙校正：何聖宗、張靜嚳、季大明、張自綸、于靖、許仕豪、陳恆東、傅恆霖、等諸位同學。

□「醜媳婦終須見公婆」現系刊在您眼前，請您批評指教!!

把本刊的優點告訴別人
把本刊的缺點告訴我們

Limit

數四 陳炎坤

In topology we make the definition of limit in the following way :

Let $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ be two topological spaces,

$f : X \rightarrow Y$ be a function on X to Y with $x \subset X$, $y \subset Y$

we say f has a limit b at a if

(1) a is an accumulation point of x in $(X, \mathcal{T}_X)$

(2) $b \in Y$

(3) $\forall N(b)$, neighborhood of b, $\exists N(a) \ni$

$$f_* \left(N(a) - \{a\} \right) \cap X) \subset N(b)$$

We denote it by the symbol

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

In the above definition, we note that a must be an accumulation point of X ; if a is not an accumulation point of X then f has no limit at a.

Recall that an infinite sequnce $\langle S_i \rangle$ is a function f on N to certain set S with $f(i) = S_i$ $i \in N$.

Now, suppose S is contained in some topological space $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

If we can extend N to some topological space then we can consider the limits of f at accumulation points of N in the topological space.

For this purpose, we set

$$\bar{N} = N \cup \{\infty\}$$

Where ∞ is only a symbol.

Set $\mathcal{J}_{\bar{N}} = \{x \mid x = \phi \text{ , or } x = \{\infty\} \cup \{n ; n \geq n_0\} \text{ , } n_0 \in N\}$

We have

1. $\phi \in \mathcal{J}_{\bar{N}}$

2. $\bar{N} = \{\infty\} \cup N = \{\infty\} \cup \{n ; n \geq 1\} \in \mathcal{J}_{\bar{N}}$

3. if $o_1, o_2 \in \mathcal{J}_{\bar{N}}$ then there are two cases

   a. one of o_1, o_2 is ϕ in this case

   $o_1 \cap o_2 = \phi \in \mathcal{J}_{\bar{N}}$

   b. none of o_1, o_2 is ϕ , then

   $o_1 = \{\infty\} \cup \{n ; n \geq n_1\}$, for some $n_1 \varepsilon N$

   $o_2 = \{\infty\} \cup \{n ; n \geq n_2\}$, for some $n_2 \varepsilon N$

   $o_1 \cap o_2 = \{\infty\} \cup \{n ; n \geq \max(n_1, n_2)\} \varepsilon \mathcal{J}_{\bar{N}}$

   both imply $o_1 \cap o_2 \varepsilon \mathcal{J}_{\bar{N}}$

4. if $o_i \in \mathcal{J}_{\bar{N}}$ $i \varepsilon K$ then there also are two cases

   a. all of oi are empty, in this case

   $\bigcup_{i \in K} o_i = \phi \varepsilon \mathcal{J}_{\bar{N}}$

   b. not all of oi are empty, in this case, we choose $K' \subset K$ such that

   $O_i = \phi$ for $i \varepsilon k$ $i \varepsilon k'$

   $O_i = \phi$ for $i \varepsilon k'$

Clearly $k' = \phi$ and $\bigcup_{i \varepsilon k'} O_i = \bigcup_{i \varepsilon k} O_i$

For each Oi, , there is a $n_i \in N$ such that

Set H be the set of all such ni, then H is a nonempty subset of N, the nature number.

By well-ordering of nature number, there is the smallest number No in H and then

i.e. $\bigcup\limits_{i \in K'} O_i = \{\infty\} \cup \{n \,;\, n \geq n_0\} \varepsilon \mathcal{J}_{\overline{N}}$

$\bigcup\limits_{i \varepsilon K} O_i^i \varepsilon \mathcal{J}_{\overline{N}}$

both cases imply $\bigcup\limits_{i \in K} O_i \,\varepsilon \mathcal{J}_{\overline{N}}$

By 1, 2, 3, 4, we see that $\mathcal{J}_{\overline{N}}$ is a topoloay on N and then (N, $\mathcal{J}_{\overline{N}}$) is a topological space.

Clearly, ∞ is an accumulation point of N, indeed, each open set which contain ∞ is of the form $O = \{\infty\} \cup \{n \,;\, n \geq n_i\}$ for some ni 2N and then $[O - \{\infty\}] \cap N = \{n \,;\, n \geq n_i\} \neq \phi$

Now, we have extended N to (N , $\mathcal{J}_{\overline{N}}$) and know that ∞ is an accumulation point of N, so if there is a b εY such that it is a limit of f at ∞,

i.e.,

$$\underset{\to\infty}{\mathrm{Lin}}\; f(i) = b$$

but f (i) = Si

We will denote it by

$$\lim_{i\to\infty} Si = b$$

Therefore, given a sequence X Si X with $\{Si\} \subset Y$ and (Y , $\mathcal{J}_{\overline{N}}$) be given topological space, we write

$$\lim_{i \to \infty} S_i = b$$

imply and implied by that N is extended to the topological space $(\overline{N}, \mathcal{T}_{\overline{N}})$ with $\overline{N} = N \cup \{\infty\}$ and $\mathcal{T}_{\overline{N}} = \{ x \ ; \ x = \phi \text{ or } x = \{\infty\} \cup \{n \ ; \ n \geq n_0\} \ n_0 \in N \}$ and that the funation f defined on N by $f(i) = S_i$, i N, to S_i has a limit b at the accunulation point of N in $(\overline{N}, T_n)$ But by the definition of limit

$$\lim_{i \to \infty} f(i) = b$$

imply and implied by

$$\forall N(b) \ \exists N(\infty) \ni$$

$$f_*\{ (N(\infty) - \{\infty\} \cap N\} \subset N(b)$$

imply and implied by $\forall N(b) \ \exists U(\infty) = \{\infty\} \cup \{n \ ; \ n \geq n_0\}$

for some $n_0 \in N \in$

$$f_*\{ (O(\infty) - \{\infty\}) \cap N \} = f_*\{ n \ ; \ n \geq n_0 \} \leq N(b)$$

imply and implied by

$$\forall N(b) \ \exists n_0 \in N \ni \quad f(n) \in N(b) \quad \forall n \geq n_0$$

Since $f(n) = S_n$, so we writt $\lim_{i \to \infty} S_i = b$

imply and implied by

$$b \in Y \text{ and } \forall N(b) \ \exists n_0 \in N \ni \ S_n \in N(b) \text{ whenever } n \geq n_0$$

This is the usual definition of the limit of infinite sequence

Return to the definition of the limit of a function. The following is a consequence directly from the definition of limit.

Let $x \subseteq (X, \mathcal{T}_X)$, $y \subseteq (Y, \mathcal{T}_y)$, $z \subseteq (Z, \mathcal{T}_Z)$

$$f : X \longrightarrow Y, \quad g : Y \longrightarrow Z$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \quad \lim_{y \to b} g(y) = C$$

Then $\lim\limits_{x \to a} g \cdot f(x) = C$ if

1. $b \notin f(x)$

or

2. $b \in f(x)$, $g(b) \in N(c)$ for any $N(c)$, neighborhood of C.

Indeed. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{y \to b} g(y) = C$

imply $\forall N(c) \ \exists N(b) \ni$

$g_*([N(b) - \{b\}] \cap y) \subseteq N(c)$

and $\exists N(a) \ni$

$f_*([N(a) - \{a\}] \cap x) \subseteq N(b)$

then $\{f_*([N(a) - \{a\}] \cap x) - \{b\}\} \cap y \subset [N(b) - \{b\}] \cap y$

Since $f : X \to Y$

So $g_*\{f_*([N(a) - \{a\}] \cap x) - \{b\}\} \subseteq N(c)$

If $b \notin f(x)$ then

$g \circ f_*([N(a) - \{a\}] \cap x) = g_*\{f_*([N(a) - \{a\}] \cap x) - \{b\}\} \subseteq N(c)$

If $b \in f(x)$, $g(b) \in N(c)$ for any $N(c)$ then

$g \circ f_*([N(a) - \{a\}] \cap x) \subset g_*\{f_*([N(a) - \{a\}] \cap x) - \{b\}\}$
$\cup \{g(b)\} \subseteq N(c)$

Both imply $g \circ f_*([N(a) - \{a\}] \cap x) \subseteq N(c)$

and then

$\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = c$

The above result can be applied to continuity. In topology we also define the continuity as follow

Let $x \subseteq (X, \mathcal{T}_X)$, $y \subseteq (Y, \mathcal{T}_Y)$

$f : x \to y$

then we say f is contiruous at a if

1. a X

2. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

By previous result and the above definition, the following is tririd.

Let $x \subseteq (X, \mathcal{T}_X)$, $y \subseteq (Y, \mathcal{T}_y)$, $z \subseteq (Z, \mathcal{T}_Z)$

$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$

f is continuous at a. g is continuous at f(a)

i, e. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, $\lim_{y \to f(a)} g(y) = g(f(a))$

then go f is continous at a,

for $g(f(a)) \in N(g(f(a)))$

In E_2 space we extend E_2 to $E_2 = E_2 \cup \{\infty\}$ with usual topology TE_2 defined as follow.

$$O \in \mathcal{T}\overline{E}_2$$

iff $\forall x \in O$, O contain an open sphere of x.

where if $x \in E_2$ an open sphere of X is of the form

$$O_x = \{z ; |z-x| < r \quad r > 0\}$$

if $X = \infty$ an open sphere of X is of the form

$$O_\infty = \{z ; |z| > r \quad r \geq 0\}$$

Let f be a function on X to Y with $X, Y \subseteq E_2$ and let $a, b \in \overline{E}_2$ then f having limit b at a can be proved to be equivalent to the definition in general complex analysis text books, by similar way as we proving the definition of the limit of infinite sequence.

Similarly, in E_1 space we extend E_1 to $\overline{E}_1 = \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ with usual topology $\mathcal{T}_{\overline{E}_1}$ defined as follow

$$O \varepsilon \mathcal{T}_{\overline{E}_1}$$

iff $\forall x \varepsilon 0$ o contain an open sphere of X, where if $x \varepsilon E_1$ an open sphere of x is of the form

$$O_x = \{z \,;\, | z - x | < r \quad r > 0\}$$

if $x = \infty$ an open sphere of x is the form

$$o_\infty = \{ z \,;\, z > r \,,\, r \varepsilon E_1 \}$$
$$o_\infty = \{ z \,;\, z < r \,,\, r \varepsilon E_1 \}$$

Similar with above, let f be a funtion on X to Y with X, $Y \subseteq E_1$ and let a, b ε E_1 then f having limit b at a can also be equivalent to the definition in generel calculus books, by smilar way we methioned.

Finally about derivatives.

Let $\quad f : X \to Y \quad X, Y \subseteq E_1 \;(E_2)$

a ε x, and a is an accumulation point of X in E_1 (E_2) then a is also an accumulation point of $X - \{a\}$ in E_1 (E_2)

Define the function $\overline{f}$ on $X - \{a\}$ by

$$\overline{f}(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad x \varepsilon X - \{a\}$$

If there is a b ε $\overline{E}_1$ ($\overline{E}_2$) such that b is a limit of f at a then we say f has derivative b at a, denote it by

$$f'(x) = b = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

This may be the general definition of derivative in calculus. From these definitions we can also reduce the following theorems found in calculus, anslysis :

Theorem 1. Let $f : x \to Y$, $X, Y \subseteq E_1 \ (E_2)$
and f has finite derivative bat a (i.e. $b \neq \infty, -\infty$)
then f is continous at a

Theorem 2. Let $f : X \to Y$, $g : X \to Y$, $X, Y \subseteq E_1 \ (E_2)$

$\lim_{x \to a} f(x) = b$ $\lim_{x \to a} g(x) = c$ $b, c \in \overline{E}_1 \ (\overline{E}_2)$

such that the ordered pair $(b, c) \neq (o, \pm\infty)$ or $(b, c) \neq (\pm\infty, 0)$

then $\lim_{x \to a} f(x) g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$

where we define

$$\infty \cdot \infty = \infty, \ (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$$
$$\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$$
$$\infty \cdot c = c \cdot \infty = \infty \quad \forall c > 0$$
$$(-\infty) \cdot c = c \cdot (-\infty) = -\infty \quad \forall c > 0$$
$$\infty \cdot c = c \cdot \infty = -\infty \quad \forall c < 0$$
$$(-\infty) \cdot e = c \cdot (-\infty) = \infty \quad \forall c < 0$$

Theorem 3 (Chain Rule)

Let $f : X \longrightarrow Y \quad X, Y, Z \subseteq E_1 \; (E_2)$

$g : Y \longrightarrow Z$

f has derivative $f'(a) = b$ at a

g has derivative $g'(f(a)) = c$ at $f(a)$

$b.\ c \in \overline{E}_1$

and $(b.c) \neq (o. \pm\infty)$ or $(b.c) \neq (\pm\infty, o)$

then $(gof)'(a)$ exist and $(gof)'(a) = c.b$

i, e. $(gof)'(a) = g'(f(a)).\ f'(a)$

Theorem 4. (monotonic)

Let $f: X \longrightarrow Y,\ X, Y \subseteq E_1,\ (a, b) \subseteq X$

f has derivative $f'(x) > 0 \; [< 0]$ at each $x \in (a, b)$

then f is strictly increasing (decreasing)

Theorem 5. (Rolle's theorem)

Theorem 6. (Mean Value theorem) etc.

We only prove the third.

Define $h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} & y \neq f(a),\ y \in Y \\ g(f(a)) = c & y = f(a) \end{cases}$

then $h(x)$ is continous at $f(a)$ (By discussion before)

By above $(f(x) - f(a))\ h(f(x)) = g(f(x)) - g(f(a))$

is true for all $x \in X$

and then $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}\ h(f(x)) = \dfrac{gof(x) - gof(a)}{x - a}$

is true for all $x \in X,\ x \neq a$

By given $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ exists $\lim\limits_{x \to a} h(f(x))$ exists

and theorem 2

(下文接第17頁)

Boolean Ring

數三　曾慶男

一、前言　若一環中任何元素皆爲等幕元素（ idempotent ）（註１）則此環謂之布氏環（ Boolean Ring ）。事實上，布氏環就是一個示性（ characteristic ）爲２之交換環。本文所討論的是一些有關布氏環之基本性質，而在未進入本題之前，筆者有兩點聲明。一、本文之構作是站在對抽象代數（ Abstract Algebra ）只具基本認識者之立場而寫成。二、在布氏代數（ Boolean Algebra ）之課程中，我們知道具乘法單位元素之布氏環（ Boolean ringniuth unity ，下文皆略爲單位布氏環）與布氏代數相同（即結構相同）。但本文並不涉及布氏代數之問題，故此點在文中並不論及。

二、Boolean Ring with unity（單位布氏環）

序模有限的布氏環（ Boolean Ring with finite order ）皆爲單位布氏環。因若 $R=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 爲任意有限布氏環，且設 $b_1=a_1+a_2+a_1a_2$，$b_2=b_1+a_3+b_1a_3$，……，$b_{n-1}=b_{n-2}+a_n+b_{n-2}\cdot a_n$ 則 $b_1, b_2, \cdots, b_n-1\in R$ 且 $a_i b_j=a_i A_j$ 及 $i\leq j+1$。故 b_{n-1} 爲 R 之乘法單位元素，而 R 即爲一單位布氏環。而對任意非單位布氏環，我們都可把它加以延伸成單位布氏環。因若 R 爲任意非單位布氏環，而 $R\times Z_2=\{(x, y)\mid x\in R,\ y\in Z_2\}$，且定義 $(a, l)+(b, m)=(a+b, l+m)$，$(a, l), (b, m)=((ab+lb+am, lm)\ (a, l), (b, m)\in R\times Z_2$ 則 $\{R\times Z_2 ; +, \circ\}$ 顯係一以 $(0, 1)$ 爲乘法單位元素之單位布氏環。再者，對於抽象的結構言，它是包含 R 之最小的單位布氏環。因若 R' 爲任意包含 R 之單位布氏環，則 $1+x\notin R$，$\forall x\in R$（ 1 爲 R' 之乘法單位元素）。假設 $R''=R\cup\{x+1 1 x\in R\}$ 則 $R''\subset R'$，且 R'' 對於抽象結構言，是包含 R 之最小單位布氏環。若我們使 x，$x+1$ 分別對應於 $(x, 0)$，$(x, 1)$，則 R' 與 $R\times Z_2$ 顯然同構（ isomorphic ）所以，對於結構言，$R\times Z_2$ 是包含 R 之最小單位布氏環。

三、有限布氏環（ Boolean Ring with finite order ）

假設 R 爲任意有限布氏環，則有某一正整數 n 存在，$s.t.$ R 與 $\overbrace{Z_2\times Z_2\times\cdots\cdots\times Z_2}^{n\ \text{times}}$ 同構。對於此，我們可分數步證明之。首先，設集合 $A=\{a\mid a\in R,\ x\cdot a=x$ 恰有二解$\}$，則

(1)　$A\neq\varphi$　(2)　設 $A=\{a_1, \cdots, a_n\}$，則 $\forall a_i, a_j\in A$，$a_i a_j=\begin{cases} a_i & 若\ a_i=a_j \\ 0 & 若\ a_i\neq a_j \end{cases}$

(3)　$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=\phi$

T_0 (1)，設 $\alpha\ (\neq 0)\in R$，若 $\alpha\in A$，則(1)自然成立。若 $\alpha\notin A$，則 $x\cdot\alpha=x$ 有K解，$K\geq 3$。設 β 爲任意旣異於零又異於 α 之解。若 $\beta\in A$，則(1)亦已成立。若 $\beta\notin A$，則 $x\cdot\beta=x$ 有 K' 解，而 $3\leq K'\angle K$，繼續此一做法，經有限次之後，我們必得一解 γ，$s.t.\ \gamma\in A\Rightarrow A\neq\varphi$。

T_0 (2)，若 $a_i=a_j$ 則因 R 爲布氏環，故 $a_i a_j=a_i$，若 $a_i\neq a_j$ 則因 $a_i(a_i a_j)=a_i a_j$，$a_j(a_i a_j)=a_i a_j$。因0，a_i 與0，a_j 分別爲 $x.a_i=x$ 及 $x.a_j=x$ 之唯一的兩解，故 $a_i a_j=0$。

T_0 (3)，由(1)之證明，我們知對於任意 $b\neq 0\in R$，$\exists\, a_i\in A\ s.t.\ a_i b=a_i$，現假設 $b=1-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$，若 $b\neq 0$ 則由以上之敍述，$\exists\, a_i\in A\ s.t.\ a_i=a_i b=a_i-a_i=0\Rightarrow 0\in A$。但此爲不可能之事，因 $0.x=x$ 只有唯一的解，即0本身。故 $b=0$，而 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=1$。

其次，由於 $(a.a_i)\,a_i=a.a_i$ $\forall_i$ 及 $a\in R$，故 $a.a_i=0$ 或 a_i。設 $\alpha_i=\begin{cases} 0 & 若\ a.a_i=0 \\ 1 & 若\ a.a_i=a_i \end{cases}$　則

$a=a.1=a.(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\alpha_1 a_1+\cdots+\alpha_n a_n$，再者，若 $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\cdots+\alpha_n a_n=\beta_1 a_1+\beta_2 a_2+\cdots+\beta_n a_n$ 則

$\alpha_i a_i=\beta_i a_i$ $\forall_i\Rightarrow\alpha_i=\beta_i$ 故對任意 $a\in R$ 而言，皆有唯一的 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\in\overbrace{Z_2\times\cdots\times Z_2}^{n\ \text{time}}$ 與之對應。

現在，若我們定義 $f: R\to\overbrace{Z_2\times Z_2\times\cdots\times Z_2}^{n\ \text{time}}$ 爲 $f(a)=(\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n)$ 若 $a=\alpha_1 a_1+\cdots\cdots+\alpha_n a_n$，則 f 爲一同構（ isomorphic ）。故 R 與 $\overbrace{Z_2\times\cdots\times Z_2}^{n\ \text{time}}$ 是同構的。

由以上之討論，我們得知任何有限布氏環之序模（ order ）皆爲２之乘冪。反之，由於，$\forall(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，$(\beta_1, \cdots, \beta_n)\in\overbrace{Z_2\times\cdots\times Z_2}^{n\ \text{time}}$，若定義“＋”“・”爲 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)+(\beta_1, \cdots, \beta_n)=(\alpha_1+\beta_1, \cdots\cdots$

$\alpha_n+\beta_n$)，(α_1 ，……，α_n)，(β_1 ，……，β_n) = ($\alpha_1\beta_1$ ，……，$\alpha_n\beta_n$)，則 $\{\overbrace{Z_2\times Z_2\times\cdots\times Z_2}^{n\text{ time}}\ ;+,\cdot\}$ 爲一序模爲 2^n 之布氏環，故 $\forall n\in N$，都存在有序模爲 2^n 之布氏環。

四、布氏群（Boolean group）

若一亞倍爾群（Abelian group）G中任意非零元素之序模皆爲2（i・e・$2a=0\quad\forall a\in G$），則我們稱此亞倍爾群爲布氏群。對任意布氏環 {R；+，・} 言，其加法群 $\{R;+\}$ 皆爲布氏群。反之，任意布氏群皆可爲一布氏環中之加法群。對於後面這一論述，我們可證之如下:

設G爲任意布氏群，而 $W=\{A_\alpha\mid\alpha\in I,\ A_\alpha$ 爲 Z_2 獨立$\}\subset 2^G$〔在此，I 爲指標集合（index set）。〕〔若一集合 A 爲 Z_2 獨立（Z_2 independent），則 $\sum\limits_{b\in A} r_b b=0\Leftrightarrow r_b=0\quad\forall_b,\quad r_b\in Z_2$〕，則 $W\neq\phi$，因對任意 $a\neq 0\in G$ 而言，$\{a\}\subset G$ 爲 Z_2 獨立，故 $\{a\}\in W$ 而 $W\neq\phi$ 其次，若以集合間之包含（inclusion）關係對 W 加以偏序（Partial ordering），則我們對於偏序集合（Partial ordered set）（$W\leq$）中之任意全序子集（totally ordered subset）$\{A_\beta\mid\beta\in I'\subset I\}$ 皆可得一上界（upper bound）$\bigcup\limits_{\beta\in I'}A_\beta$，故由 Zorns lemma（註2）我們可得一極大元素（Maximal element）$A\in W$，則對任意 $a\in G$ 而言，$a=\sum\limits_{\alpha\in A}r_\alpha\alpha$ $r_\alpha\in Z_2$（因對任意 $a\in G$ 而言，若 $a\notin A$，則集合 $A\cup\{a\}$ 並非 Z_2 獨立，故 $a=\sum\limits_{\alpha\in A}r_\alpha\alpha$，若 $a\in A$，則 a 亦可記成 $\sum\limits_{\alpha\in A}r_\alpha\alpha$，在此 $r_\alpha=0\quad\forall\alpha\neq a$，$r_a=1$）再者，由於 A 爲 Z_2 獨立，故此種表示法爲唯一。現對任意 $a=\sum\limits_{\alpha\in A}r_\alpha\alpha\in G$，若定義 $f:G\to\langle\mathop{X}\limits_{\alpha\in A}Z_{2\alpha},+\rangle$（在此 $Z_{2\alpha}=Z_2\quad\forall\alpha\in A$，且對 $x,y,z\in\mathop{X}\limits_{\alpha\in A}Z_{2\alpha}$，若 $P_\alpha(z)=P_\alpha(x)+P_\alpha(y)$（註3），則定義 $x+y=z$）爲 $f(a)=d$ 若 $P_\alpha(\alpha)=r_{\alpha 0}$ 則顯然 f 爲 G 與 $\mathop{X}\limits_{\alpha\in A}Z_{2\alpha}$ 間之同構（isomorphism）故 G 與 $\mathop{X}\limits_{\alpha\in A}Z_{2\alpha}$ 同構。而由於 $\langle\mathop{X}\limits_{\alpha\in A}Z_{2\alpha};+,\cdot\rangle$ 爲一布氏環（$\forall a,b\in\mathop{X}\limits_{\alpha\in A}Z_{2\alpha}$ $P_\alpha(a\cdot b)=P_\alpha(a)P_\alpha(b)$），故由同構我們亦可在 G 中定義一乘運算而使 G 成一布氏環，由此上面之論述得上之討論，我們知若 G 爲有限之布氏群，則 G 與 $\overbrace{Z_2\times Z_2\times\cdots\cdots\times Z_2}^{n\text{ time}}$ 同構（$n\in N$），而 G 之序模 order 即爲 2^n。

註1. 設 $a\in R$，R 爲一環，若 $a^2=a$ 則稱 a 爲等幕之素（idempotent）。

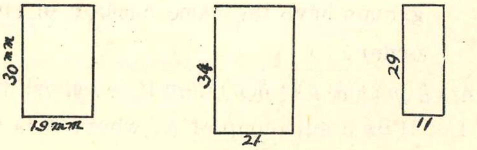
註2. Zorn's lemma：對任意偏序集合（A；$\leq$），若其全序子集皆有一上界存在於 A，則 A 至少有一極大之素。

註3. P_α 爲投影映射（Projection map），即 $\forall x\in\mathop{X}\limits_{\alpha\in A}Z_{2\alpha}$ 言，$P_\alpha(x)=x(\alpha)$。

黃　金　段

梁仁孝

在各種形體中，我們所最歡喜的是長方形，所以窗門、書籍等等都是長方形。長方形的二邊的長短也各各不同，究竟長邊和短邊成什麼比例才能引起美感呢？以達文奇歷而來畫家都以爲在最美的長方形中，短邊和長邊的比例須成1:1.618或5:8的比例。他們把這種比例，叫做黃金段（Golden Section）。例如下列三個長方形中以居中者最美，因其知邊與長短之比爲1:1.618。。



同時吾人可以得下列之結果：

$$\frac{21}{34}\doteqdot\frac{34}{34+21}$$

（節自文藝心理學）

A Note on Finite Abelian Groups

(數三)　賴世倫

The classification of all finite (or more fully, finitcly generated) abelian groups has been settled. Thus the structure of the kind has no mystery any more. However for some practical reasons, it is interesting to count the number of subgroups of a given kind. This paper provids an extra data for such counting and along with an example to illustrate it' s application. Since the article is merely a classroom note, i,e an extended study of the school textbook, our pace is leisurely.

First, let' s cite somedefinations and proof-free eheorems, which will be used in the requel :

Def. 1 : Let S be any monempty ret of elements, then ISI clenote the cardinal number of S.

Def. 2 : Let A be a finite abelian group & pin a prime A is p-primary, if $IAI = p^m$, for some nonnegative itreger m.

Def. 3 : If n is a poritive integer, then δ (n) will denote the cyclic group of order n.

1* : (Cauchy) : Let G be a finite group & p-be a prime . If FIGI;. then G critains a subgroup of order p.

2* . Let A be a finite abelian group. then A can be deconyured into direct sum of primary cyclic groups. Any two decompositions of G into direct sums of primary cyclic groups have the same number of ruminands of each order.

e.g) $A \cong \delta(p) \oplus \delta(p) \oplus \delta(p)$ then it is impossible hat $A \cong \delta(p^2) \oplus \delta(p)$

3* . Let H be a subgroup of A, where A is finite abelian, then A contains a subgroup iromorplni to A/H. (this follows directly from 2*)

4*. A finite group G is a p-group (ie. IGI = p^m) not necessarily abelian iff every element in G is of order a power of p.

5*. Let G be a finite p group and S a subgroup of G. If $S \subset G$ then there is a subgroup T such that (1)$S \subset T \subseteq G$ (2)$S \triangle T$ (i.e S is normal in T). & (3) ITI = pISI.

6*. Let $\delta(n)$ be a finite cyclic group of order n. For every divisor d of n, there is a unique subgroup of order d.

Theorem : Let A be a finite abelian group and p be a prime such that $P \mid |A|$ Let P be any subgroup of order p in A. If n_1, n_2 denote the number of distinct subgroups of order p in A and in the quotient group A/P resp., then either $n_1 = n_2$ or $n_1 = pn_2 + 1$.

From Caushy' s theorem 1*, we know that such P exists. So let's begin the argument. The proof is based on the following tow lenamas.

Lemma1 : Let H be a finite p-primary abelian group. Let Q be any subgroup of order p in H, If n_1, n_2 be the number of distinct subgroups of order p in H and in the quotient group H/Q resp., then $n_2 \leq n_1 \leq Pn_2 + 1$

Proof : Since H contains a subgroup isomorphic to H/Q (2^*) clearily $n_2 \leq n_1$. To prove the right hand of the inequality, let $\mathcal{E} = \{Q_1, \cdots, Q_n\}$ be the family of all subgroups of order p in H (when Q = Q_1) and π: H $\rightarrow$ H/Q be the natural map. It is easy to show that if $Q_i \in \mathcal{E}$, i $\neq$ 1, then $Q_i^* = \pi[Q_i]$ is also a subgroup of order p in H/Q. Thus, for any two Q_i , Q_j $\varepsilon \mathcal{E}$ i $\neq$ j, i $\neq$ 1, j $\neq$1, we have either $Q_i^* \cap Q_j^* = O^*$ or O i* = Oj* (Note: $x^* \varepsilon Q_i^* \cap Q_j^*$ Oi* & x* $\neq$O* iff $\exists x \varepsilon Q_i, y \varepsilon Q_j$ such that X$\neq$O., X $\neq$ O 8 & $x - y \varepsilon Q$, Define an equivalence relation, $\sim$, in $\mathcal{E} \sim \{Q\}$ as follows: $Q_i \sim Q_j$ iff Oi* = Oj*. Let $[Q_j]$

denote the equivalence class of Q_i. We claim that $|[Q_i]| \leq P$; choose a fixed $x \varepsilon Q_i$, if $Q_i \sim Q_j$ $i \neq j$, then $\exists y \varepsilon Q_j$ such that $x-y \varepsilon Q$. But thir y is unique ; for if $y' \varepsilon Q_j$ & $x-y' \varepsilon Q$ then $(x-y')-(x-y) \equiv y-y' \varepsilon Q \cap Q = 0$ $\Rightarrow y = y'$. Thus, $\forall Q_j \varepsilon [Q_i]$, $i \neq j$, Oj has a unique " representive " which is in the coset of x. Moreover, distinct $Q_j's$, must have cistinct " representitives", for $Q_j \cap Q'_j = 0'$, $j \neq j'$. Since the number of els. in the coset of x must be p, there are at most p's Q_j such that $Q_j \sim Q_i$, namely $|[Q_i]| \leq P$. It then follows that $n_1 - 1 = \Sigma |[Q_i]| \leq \Sigma P \leq P n_2$ or $n_1 \leq P n_2 + 1$ q.e.d.

Lemma 2 : Let A be any finite abelian group and p be a prime, pIIAI. Let $\mathcal{G}^\alpha$ be the family of all subgroups of order p^a in A. Defirn $H_\alpha = \{ x \varepsilon A : P^\alpha x = 0 \}$, then H_α is a subgroup of A. Moreover, if $P^\alpha || A|$ then $H_\alpha = \bigcup \mathcal{G}^\alpha$, in other words, $|\bigcup \mathcal{G}^\alpha|$ divides IAI.

'roof : Since it is easy to prove that H_α is a subgroup of A, we prove the second half of the lemma. Let $x \varepsilon H_\alpha$, i.e $P^\alpha x = 0$, then $|[x]| | P^\alpha$(where $[x]$ is the subgroup generated by x), Since $[x] \subset H_\alpha$ and H_α is itself a p-primary group (from 4*), hence H_α contains a subgroup T such that $[x] \subset T$ & $|T| = P^\alpha$(from 5*). Thus, $T \varepsilon \mathcal{G}^\alpha$ & $x \varepsilon \bigcup \mathcal{G}^\alpha$ Conversely, if $x \varepsilon \bigcup \mathcal{G}^\alpha$ then there exists a $Q \varepsilon \mathcal{G}^\alpha$ such that $x \varepsilon Q$ Since $|Q| = P^\alpha$, it then follows that $P^\alpha x = 0$ and hence $x \varepsilon H_\alpha$ q. e. d.

Now we prove the theorem. First, we claim that the therorem can be reduced to the case for finite p-primary groups; define a set $H = \{ x \varepsilon A : P^\alpha x = 0$, for some $\alpha \varepsilon Z \}$ clearily H is p-primay subgroup of A (from 4*) and any subgroup of order p in A is also a subgroups of H. Let $H^* = \{ x^* \varepsilon A/P : P^\alpha x^* = O^*$, for some $d \varepsilon Z$.

If $x^* \varepsilon H^*$ then $p^\alpha x^* = 0^*$ or $p^\alpha x \,\varepsilon\, P$. Hence $p^{\alpha+1} x = 0$ & $x \varepsilon H$. Thus, $x^* \varepsilon \pi[H]$. Conversely, if $x^* \varepsilon \pi[H]$, i.e $\exists y \varepsilon H$ such that $x^* = y^*$, then $p^\alpha y = 0$, for some $\alpha \varepsilon Z$. Hence $p^\alpha x^* = 0^*$ & $x^* \varepsilon H^*$. Consequently, $H^* = \pi[H]$.& $\pi[P'] \subset H^*$ for any subgroup P' of order p in A. Thus the theorem will be hold if it holds for p-proimary groups.

Let us assume that $|H| = p^m$, for some positive integer m. Let $\mathscr{G}$ be the family of all subgroups of order P in H 8 let $n_1 = |\mathscr{G}|$. Since $|\bigcup \mathscr{G}| = n_1(p-1)+1$ and $|\bigcup \mathscr{G}|$ $|H|$ (lemma 2), hence $n_1 = (p^{m-k} - 1)/(p-1)$, for some nonnegative integer k_1. Following the same argument, me have $n_2 = (p^{(m-1)-k_2} - 1)/(p-1)$, when n_2 is the number of subgroups of order p in $H^* = \pi[H]$. Since $n_2 \leq n_1 \leq pn_2 + 1$ (lemma 1), then $p^{m-1-k_2} - 1 \leq p^{m-k_1} - 1 \leq p^{m-k_2} - 1$,

and hence $k_2 \leq k_1 \leq k_2 + 1$ Case i. $k_1 = k_2$. We have $pn_2 =$

$P(P^{m-1-k_2} - 1)/(p-1) = p(p^{m-1-k_1} - 1)/(p-1)$

$= p^{m-k_1} - 1 - (p-1))/(p-1) = n_1 - 1$, or $n_1 = Pn_2 + 1$. Case ii. $K_1 = K_2 + 1$,

$n_2 = (p^{m-1-k_2} - 1)/(p-1) = (p^{m-k_1} - 1)/(p-1) = n_1$, i.e $n_1 = n_2$

Thus, the theorem has been completed. q. e. d.

Example (for application)

* Let A be a n abelian group of order p^{m+k} & type $(k, \overbrace{1, \ldots, 1}^{m})$

(ie $A = \delta(p^k) \oplus \overbrace{\delta(p) \oplus \ldots\ldots \oplus \delta(P)}^{m}$) (2*) when K be any poritive integer. Then n_1, the number of subgroups of order p in A, is $1 + p + \ldots. + p^m$.

We varify this fact by induction on m. Let m = 1, ie $A \cong \delta(p^k) \oplus \delta(p)$, then $A/\delta(p) \cong \delta(p^k)$. But $\delta(p^k)$ has exactly one subgroup of order p (from 6*) while A has at least two, thus, $n_1 \geq 2 > n_2 = 1$ or $n_1 \neq n_2$ From our theorem, we deduce that $n_1 = pn_2 + 1 = p + 1$. Assume that the statement is true for m-1, Consider $A=\delta(p^k)\oplus\overbrace{\delta(p)\oplus\cdots\oplus\delta(p)}^{m}$

choose $\delta(p)$ from the diret sumnands, then $A'=A/\delta(p)\cong\delta(p^k)\oplus\overbrace{\delta(p)\oplus\cdots\cdots\oplus\delta(p)}^{m-1}$ Since A is obtained from A' by adding one direct summand, namely δ (p), hence $n_2 \neq n_1$ & $n_1=Pn_2+1$ By the inductive hypothesis, $n_2=1+P+\ldots+p^{m-1}$, we have $n_1=p(1+p_+\ldots+p^{m-1})+1$

$= 1+p+\ldots+p^m$

Finally, we point out that, in terms of n_1, it is not difficult to determine the number of subgroups of order p^α, for $\alpha>1$ Note : any subgroup of A of order p^α for $\alpha>1$ must suit the following types : $(\overbrace{1,\ldots\ldots,1}^{\alpha})$, $(2,\overbrace{1,\ldots\ldots,1}^{\alpha-2})$, ... $(\alpha-1, 1)$, (α), and use our theorem, we may determine the number of subgroups of order p, in each type, which characterize these subgroups, in tern, can determine the whole number of subgroups of order p . In Burnside book, a case for type (1, ..., 1) has been formulated.

Reference : Burnside, The theory of Groups of Finite Order
Carmichael. Groups of Finite Order.

Index: Two basic problems occurring in mathematics are : (1) classify all systems of a given kind, e.g. all groups, all vector spaces, all topological spaces; (2) classify all the transformations of one system into another. By a classification of systems, one usually means a scheme that distinguishes essentially different systems, or to say it antoher way, a scheme that tells when two systems are essentially the same. A clarsification of transformations is more subtle, and we needn't discuss; it further now. As an illustration, consider the collection of all finite dimensional vector spaces over a field

F. In this case, the first problem is answered by the theorem that two such spaces are isomorphic iff they have the same dimension. Even the second problem has been answered. The transformations of vector spaces are, of course, the linear transformations, which give rise to similarity classes of matrices, and these are classified by the canonical forms. The same problems arise in group theory: (1) when are two groups isomorphic : (2) how may one describe the homomorphism from one group to another ? In contrast to our illustration, both problims are exceedingly difficult (if not possible sible) and are only partically solved.

(上文接第 9 頁)

$$\lim_{x \to a} \frac{gof(x) - gof(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \, , \quad \lim_{x \to a} h(f(x))$$

$$= b \, . \, c$$

i.e.

$$fog'(a) = c \, . \, b = g'(f(a)) \, . \, f'(a).$$

END

幾 個 小 問 題

數一　傅恆霖

本文中的「小」，並非微不足道，只是指這些不能夠和一般的長篇大論，或名詞集錦的「大」" 稿相比較而已。當然也不敢渴望具有和它們一樣所謂「"浩大的效果"」。但是我深信看了下面的幾個問題，會使你得到一點好處，收異曲同工之效。

× × ×五個部份全等的三角形（5－con triangles）× × ×

$S.M.S.G$ 新教材中，關於全等關係的敘述有：$S.A.S$ 公設，$S.S.S.$；$S.A.A.$；$A.S.A.$ 和 $r.n.S.$ 定理，都是只有三個部份即可全等，就是 $S.S.A.$ 及 $A.A.A$ 不一定全等的，只要再加一條件，角或邊全等，則可成 $S.S.S$.$A.A.S.$ 或 $A.S.A.$ 的關係，不就全等了嗎？可是這裏爲何已具有三個部分全等，而它們仍不能全等，賣弄玄虛嗎？請看下面的說明：

若兩三角形彼此有 $S.S.S.$ 的關係，則它們是必然全等的，於是我們可知這是不可能不全等。所以最多只能是兩邊，再加上三角，既然如此則這些三角形具有相似的關係；即它們的三邊成比例。那麼我們可假設三角形的三邊爲（$a.,ar,ar^2$），（ar,ar^2,ar^3），……，（nr^{n-2},ar^{n-1},an^n），……，由上面的序對，即不難看出相鄰的兩三角形具有五個部分全等的關係；如 a；ar : $ar^2=1:r:r^2=ar:ar^2:ar^3$；$ar=ar$，$ar^2=ar^2$，如此則不難了解，只要在 r 的定義域內，這些三角形是可以作出來的。由兩邊和大於第三邊的定理可得(1) $a+ar>ar^2$ (2) $a+ar^2>ar$，(3) $ar^2+ar>a$，而它們 r 的定義域分別是 (1) $ar^2-ar-a<o$，$a>o$ $(r-\frac{1+\sqrt{5}}{2})(r-\frac{1-\sqrt{5}}{2})<o$，$\frac{1+\sqrt{5}}{2}>r>\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (2) $ar^2-ar+a>o$，$a>o$，$(r^2-r+\frac{1}{4})+\frac{3}{4}=(r-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>o$ $\forall r\in R$，$ar^2-ar+a>o$ (3) $ar^2+ar-a>o$，$a>o$ $(r-\frac{-1+\sqrt{5}}{2})(r-\frac{-1-\sqrt{5}}{2})>o$，$r>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$r<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

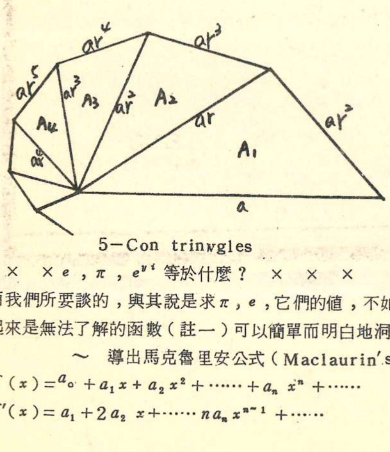
由(1)，(2)，(3)，所得的結果可知當 r 在 $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ 的開區間中都滿足(1)，(2)，(3)，那麼根據此即可作出下面的三角形（附圖）：$r=\frac{3}{4}$，$a=8$ cn，各位同學你（妳）明白爲什麼呢？如果不明可再看看 S,M,S,G 第一册的全等公設或定理的敘述，仔細！根據上面的討論，可以推廣至幾邊形的關係嗎？

註 1：上面當 $r=1$ 時則屬特殊三角形，而於此時，只須一邊全等，則三角形便可全等。

2：上述之三角形乃指彼此間的關係而言。

3：此文摘自 The Mathematical teacher 的雜誌裏。

（附圖一）



5−Con trinvgles

Ai 三邊	一	二	三
A_1	a	ar	ar^2
A_2	ar	ar^2	ar^3
A_3	ar^2	ar^3	ar^4
A_4	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
A_n	ar^{n+}	ar^n	ar^{n+1}

× × × e，π，$e^{\pi i}$ 等於什麼？ × × ×

下面我們所要談的，與其說是求 π，e，它們的值，不如說這些都是展開式的應用，因爲有了展開式的發現，使得以前看起來是無法了解的函數（註一）可以簡單而明白地洞悉它們的內容，這也就是提出下面例子的原因。

～ 導出馬克魯里安公式（Maclaurin's Formula）～

令 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$

則 $f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots\cdots na_nx^{n-1}+\cdots\cdots$

$f''(x)=2a_2+\cdots\cdots+n(n-1)a_n x^{n-2}+\cdots\cdots$

$\vdots$

$f^{n}(x)=n!\,a_n+\cdots\cdots$

$\vdots$

$\therefore f(o)=a_o, f'(o)=a_1, f''(o)=2!a_2, \cdots\cdots\cdots f^{(n)}(o)=n!\,a_n \cdots\cdots$

$\therefore f(x)=a_o+a_1x^2+\cdots\cdots+a_n x^n+\cdots\cdots\cdots$

$f(x)=f(o)+f'(o)x+\frac{1}{2!}f''(o)x^2+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(o)x^n+\cdots\cdots$

上式卽爲馬氏的公式，一般常以它爲泰勒公式（Taylors' Formula）

$f(x)=f(h)+\frac{x-h}{1!}f'(h)+\frac{(x-h)^2}{2!}f''(h)+\cdots\cdots+\frac{(x-h)^n}{n!}f^{n-1}(h)+\cdots\cdots$ 的特例，卽 $h=o$，但由上面的推演似乎快了些。

～ 以無窮級數表出 e，π ～

由 $f(x)=f(o)+f'(o)x+\frac{1}{2!}f''(o)x^2+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(o)x^n+\cdots\cdots$

令 $e^x=f(x)$，則 $e^1=e=f(o)+f'(o).1+\frac{1}{2!}f''(o).1+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}f^{n}(o).1+\cdots\cdots$

而 $D(e^x)=e^x$

$\therefore e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cdots$

同上式一樣，可令 $f(x)=\text{arc}\tan x$，而當取 $x=1$ 時，$4\cdot\text{arc}\tan 1=\pi$

$D(\text{arc}\tan x)=\frac{1}{1+x^2}$ $D\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=-2x.(1+x^2)^{-2}, \cdots\cdots$

再以 o 值代入其中的 x，則可得 $\frac{\pi}{4}$ 的表示法爲 $\pi/4=\text{arc}\tan 1=f(1)=1-\frac{1}{3}\cdot 1^3+\frac{1}{5}\cdot 1^5-\frac{1}{7}\cdot 1^7+\cdots\cdots$

$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\cdots$

$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\cdots\cdots\right)$

～ 指數爲複數的定義 ～

既談上了面的自然指數，現在就以它作爲底來討論。

由指數律，則 $e^{x+y}=e^x\cdot e^y$；$x, y, \in R$，如果 e^{x+yi} 則可以 e^x，e^{yi} 表之。

那麼只要 e^{yi} 可以定義，e^{x+yi} 便迎刃而解。在未提出解答之前，先比較下面三個式子。

(1) $f(x)=e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$

(2) $f(x)=\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots$

(3) $f(x)=\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots$

（上面(2)，(3)兩式可由 $D\sin x=\cos x$，$D\cos x=-\sin x$ 的關係導出）。

由上面三式不難明白若以(2)+(3)和(1)比較，則有關平方和立方項（卽 $n=4m+P$，$m=o, 1, 2\cdots$）的 P 値僅差一符號而已，這和 i 的性質相同，因此以 (xi) 來代替 x，則

$e^{xi}=f(xi)=1+xi-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}i+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}i-\frac{x^6}{6!}-\frac{x^7}{7!}i+\frac{x^8}{8!}+\cdots\cdots=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots\cdots\right)$

$+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots\right)=\cos x+i\sin x$

亦卽 $e^{x\ yi}=e^x\cdot e^{yi}=e^x(\cos y+i\sin y)$ 既得此式則複數時亦不難定義，在此不再贅述。有趣味的話可參考 Introduction to mathematical analysis，Apostal）。

註一：關於這些函數如超越函數（Transcevndental Function）。，
在（Functions theory，Knopp）一書中有詳細的說明。

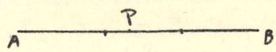
× × ×詭論的瑣談× × ×

詭論（paradox）在QxFord，Hornby 所作的字典（The advauced Learners dictionary of Current-

Englisih), 中的解釋爲Paradox statement that seems to say Something opposite to common-sense or the truth, but which may contain a truth，根據這意思詭論是可以似是而非，似非而是，甚則是亦可非亦可。下面是幾個簡單的例子：

～ 此點不在直綫上 ～

今有點P在AB上，如附圖二所示，今分AB爲三段，則點落在每一段上的概率爲$\frac{1}{3}$，如果n段則爲$\frac{1}{n}$，由此可知若每一段的距離爲AB的$\frac{1}{m}$，則概率爲$\frac{1}{m}$；而$\overline{PP}$爲距離爲零，亦即點在P點上的概率等於零，兩點在此直綫上是連續的，所以P必不可能在AB上，否則將成兩綫段。



～ 部份等於全部 ～

在無窮數列中，部份是可以，而且是等於全部，如1，2，3，4，5，……，n，……的個數即是等於1，4，27，64，……n^n，……的數目（基數），原因是它們之間可形成一 one－one的對應，而且是映成，亦即等值（equivalent）關於此，不再贅述。同學有趣味的話，可參考集合論導引（劉福增譯）。

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \cdots\cdots\cdots\cdots n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1, & 4, & 27, & 64, & 125, & \cdots\cdots\cdots\cdots n^n \end{array}$$

～ 羅素的詭論 ～

這可以說明集合論上的一大問題：我們知道集合本身是可以爲集合的分子（member）。例如：所有自然數（natural number）集合所成的集合，就有集合（自然數）爲它的分子。可是大部份則否。如：狗的集合就不是本身的分子，因爲顯然地狗的集合，並非一狗。所以就下面的定義看來似乎是正確，無誤的。即所有不是集合本身的分子，所成的集合，就也就是羅素詭論的大概型式；在此，我們只要設$A = \{ x \mid x \epsilon x \}$，即可證明出它的誤謬。可是羅素也因此提出了另外所謂的類型理論（Theory of types），這不是我們所要討論的範圍，如果願在進一步研究它的內容，可參考：

後設數學導論（Introductin to netamaththematics, Kleene）

數學原理（Principia mathematica, Russell, Witheheaed）

～ 說謊者的詭論 ～

今有一個人說：「我正在說謊。」，那麼他正在說謊嗎？還是沒有呢？如果他說謊，可是他所說的卻是眞的；如果他不說謊，則由他所說的是眞；他正在說謊；這也就是說在任何情況下，他正在說謊與他不是在說謊，明白嗎？

拉拉雜雜地說了一大段，只是想多提供點意見，來表明詭論的眞義，不要爲大一英文課本中Paradox的解釋所迷惑，其他還有很多重要的詭論如Cantor，Burali－Forte……等，因篇幅有限不再一一說明。

× × ×後記× × ×

我很想本著數學的精神，重頭開始，經過一步步的嚴格推測才引出結果，可是這對於我來說，實在很困難，因此僅以上面三個小問題，提出來彼此研究，倉促成章，錯誤難免，如有錯誤，望不吝指正。

談數學基本概念

數一　于靖

A. 集合及類（Sets and Clases）

集合論今天已成為整個數學的基礎，所有數學家研究的對象都"是"某種特殊的集合或類。（所謂都"是"的意思是指都可以從集合論的角度來清晰的解釋及區別數學家所研究的對象。）因而我嘗試在此節中討論一下集合論的一些公設。

雖然我們直覺上都熟悉集合的觀念。但我們尚須眞正知道我們能夠如何的來運用集合及類，如何能夠有系統的穩固的把數學從集合論上建立起來。更確切的說我們要一個公設化的集合論，它能夠依照一套適當的邏輯系統，精確的告訴我們在什麼情形下存在什麼樣的集合及類，這些集合及類間的關係及它們的基本性質。

在將近一世紀前G. Cantor 由分析上的研究促使他建立了基數的概念，由此處發展合於數學上要求的無限集合理論。從此數學才有了它眞正的基礎。但當時集合論如同當時大多數其他數學理論並沒有被公設化，因而不久就出現了一些矛盾。例如我們知道對一般的集合$A \in A$不成立。於是我們進一步考慮所有滿足$A \notin A$的集合A的集合X，問題就來了。如果$X \notin A$，那麼X滿足$X \in X$，如果X滿足$X \in X$那麼X就是它自己的元素。這就是B. Russell 在1902年提出的矛盾，還有Cantor本人及其他學者提出的一些矛盾。由這些矛盾才促成了今天公設集合論的發展。

當時對基礎有興趣的學者就去分析這些矛盾，企圖進一步避免這些矛盾。我們如果去分析Russel 矛盾就產生了以下的懷疑：是否對於任何我們能舉出的性質（Property）都存在有一集合，它的元素正是滿足此種性質的。更有甚者，什麼是我們應稱之為性質的？到底$A \in A$這敘述是否有意義，我們如何來判別它是否有意義？基於對以上的肯定回答，我們才造成了集合所有滿足$A \notin A$的集合A的大集合，才導致了矛盾。當時主要想出了三種方式解決矛盾。其一是Russel 自己提出的，針對$A \notin A$的敘述，它把每一個集合都賦與一個非負整數叫做序型（Type）而規定$A \in B$或$A \notin B$，只有在B的序型大於A的序型時，才有意義。故$A \notin A$是沒有意義的，因而不能用以形成滿足此性質元素的集合。由[illegible]免除矛盾。另一個方式是針對是否任一性質都可找到一集合其元素滿足此性質。由J. Brouer的直覺主義者所提。它們除掉一些邏輯規則，強調必須經過有限直覺的建構（Construction）才能證明集合的存在，因而像以上的矛盾是不會產生的。但Russel 的序型論本身亦有相當多的毛病，且很複雜。而依直覺主義的觀點，必須連帶拋棄很多其它重要的數學定理，損失太大。E. Zermelo在1908年提出一個集合論公設系統，也針對集合的存在條件，不過對「性質」加以"適當"的約束。只約束到不會產生矛盾，用其它的公設輔助此公設來建構數學家所須之集合。不加旁的概念如序型，也不對建構規律開刀。John Von Neuman 在1923年把Zermelo的修改，主要加進了類的概念。後來P. Bernays 及K. Godel 又把Von Neuman的系統重新加以整理簡化。我下面要談的系統就是由Zermelo, Von Neuman, Bernays, Godel 而來的，注意我只打算"談"而不是完全嚴格的發展此系統。

在此系統中我們有三個無定義觀念：類（Class）；＝即相等，∈即屬於。類是我們的對象以下所有變元均以類為範圍。$A \in B$和$A = B$（A，B為變元）就是我們的基本語句。當$A \in B$時我們稱A為B之元素。所有其他的語句，都是由這兩個基本語句經由邏輯運算子（Logical operator）組合起來的。我們所依據的邏輯系統就是處理這些運算：包括一般的二值命題演算（Propositional Caculus）處理或，且，非，若則，若且唯若（$\vee$，$\wedge$，$\sim$，　，　）及量化素論（Quatipication, Theory）包含量化素存在（$\exists x$）對於所有（$\forall x$）。藉量化素可以把語句中的變元分成兩種。那些同時也出現在語句所附量化素中的變元叫束縛變元（bound vmiablle），否則叫自由變元（free variable）。

記敘此系統如下：

定義：若且唯若一個類是其它類的元素我們叫它集合。

定義：若A中每一元素均在B中則稱A為B的子類以$A \subset B$表之。

故集合（set）現在是有定義名詞。那些不是集合的類我們叫它眞類。此系統除處理集合外尚處理眞類（Proper Class）。

※相等公設：$\left\{ \begin{array}{l} = \text{是一種相等關係（反身，對稱，遞移）} \\ B = B_1 \text{，} A = A_1 \text{，若} B \in A \text{則} B_1 \in A_1 \end{array} \right.$

※外延公設：兩個類，似相等若且唯若它們有相同的元素。

此公設聯繫＝及∈，除以上而外的公設都關係到集合的存在。

※對元公設：對任二集合x，y存在一集合其元素正是x，y。以$\{x, y\}$表此集合。

由此公設我們可以定義n元有序對

定義：$(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$，$(x_1, x_2 \cdots x_n) = (x_1 (x_2 \cdots x_n))$

※類構成公設：若$P(x_1, x_2 \cdots x_n)$是一 p.p.f 其中集合變元是 $x_1, x_2 \cdots x_n$則存在一個類，其元素恰爲所有滿足$P(x_1, x_2 \cdots x_n)$的n元集合有序對。

以上敍述中的 p.p.f 是始基命題函數（Primitive Propositional function）的簡寫。它就是直覺的"性質"加以適當限制而精確定義來的。不過這是一個後設（Metamathematical）觀念不同於一般數學定義。

P.P.f 循廻定義（Recursive）如下：（爲免除麻煩故用較多符號）

(1) $A \in B$是P.P.f

(2) 如φ及ϕ是P.P.f 那麼$\sim\varphi$及$\varphi \wedge \phi$也是

(3) 如ϕ是P.P.f 那麼$(\exists x)\varphi$是P.P.f。不過在此x限於集合變元（値限於集合的變元）

(4) 唯有以上的才是P.P.f.

由邏輯運算子的關係可以導出（若φ，ϕ是P.P.f）$\varphi \Rightarrow 4$，$\varphi \vee \phi$，$(\forall x)\varphi$（x是1集合變元）也是P.P.f。由此可導出$A = B$也是P.P.f.。我們可以由以上過程看出任一P.P.f.的變元都只有有限個。而整個定義的關鍵在類變元不能被束縛。這個類構成公設是集合論中最重要的。它使我們能形成所有具某一性質集合的類，現在我們用它來建構一些類。以一般用的形式$\{(x_1, x_2, \cdots x_n) \mid P(x_1, x_2 \cdots\cdots x_n)\}$表這樣造成的類。

空類$\phi = \{x \mid (x \neq x)\}$　　　　宇類$U = \{x \mid x = x\}$

對兩個類A，B我們進一步建構：$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$，$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$，$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

對任一類A可形成它的"絕對"餘類$A' = \{x \mid x \notin A\}$

對任一集合A可以形成其後繼集合$A^+ = \{x \mid x \in A \vee x = A\}$，除了宇類之外還可形成$M = \{x \mid x \notin x\}$這是一個類，由Russell的推理可證明其不可能是集合。而是眞類。但不會發生矛盾。

定義：$f \subset A \times B$，若一$a \in A$，存在唯一$b \in B$滿足$(a, b) \in f$則稱f爲函數，A爲其定義域，B爲餘定義域，以$f: A \to B$表示。所有滿足$(a, b) \in f$的B元素B之集合稱爲此函數值域。函數可以存在兩個眞類間。

還有很多在通常集合論中不成問題的問題：若A，B爲集合$A \cup B$及$A \times B$是否是集合？對任一集合是否存在其冪集（Power set）？（由以上公設可證明對任何類存在冪類）集合的子類是否集合？集合在函數下的值域是否是集合？集合間的函數是否是集合？對這些問題答案當然是肯定的不過在此我不打算討論使這些合理之公設。」

最後若G爲一集合，O爲$G \times G \to G$之函數滿足群公設，因而O爲一集合（$G \times G \times G$之子集），於是(G, O)也是一集合，一個群就可以定義爲一個這樣的集合，於是我們可形成一眞類，包含所有群，這樣的眞類可以使下節的範疇論（Theory of Category）穩固的建立在此系統上。

※無限公設：存在有一集合，包含ϕ，並包含其每一元素的後繼集合。

在所有滿足此條件的集合交集N上我們定義一函數$A \to A^+$。就可以證明這個集合加上這個函數滿足Peano公設。然後運用集合論的公設可以進一步從$N \times N$建立起整數系I，從$I \times I$建立起有理數系Q。再由$P(Q) \times P(Q)$建立起R（$P(Q)$是Q的冪集）再由$R \times R \times R$建立歐氏空間。這就是何以在此系統中不須要個體觀念（Individual）的主要原因之一。固然有一些集合論公設系統有個體的觀念：有那種只能是元素不能是集合的東西。但是我們不要它也可以建立所有數學上須要的研究對象。

選擇公設：若x爲一集合其元素爲非空集合，那麼存在一個集合y，y和x中每個元素的交集均只有一個元素。

※連續集假設：沒有一個基數β滿足$a < \beta < C$

a是自然數集合的基數，而C是實數集合的基數，由Cantor基數理論2^a（$P(N)$的基數）$= C$，$a < C$。於是Cantor就提出了以上的著名假設。由此假設可以導出選擇公設。

數學家曾經很懷疑這兩個敍述是否和其它公設矛盾，或者是否可由其它集合論公設證出。它們都有些怪，在集合論中它們過去的地位如同非歐幾何沒發現前平行公設在歐氏幾何中的地位。如果一數學定理靠它們證出了數學家總是企圖再找不須它們的證明。不過這些疑惑今天已經被澄清了。有趣的是澄清後它們在集合論中的地位仍然和澄清幾何公設後

運算均爲同態的函數。研究一般代數系統的性質就是廣代數（Universal Algebra）的目的。

由代數系統構成的範疇尙包括群範疇，環範疇，半群範疇，向量空間範疇等。（佈於實數體的向量空間就是一個具有無限多一元運算及一二元運算，一0元運算的代數系統。因爲一個實數正好產生一個一元運算$\vec{x} \to r\vec{x}$。而實數有無限多）。

我們再回頭來看範疇，任一個範疇所有物元的同態的集合M實在很像代數系統，只差一點：不是任二個同態都可運算（結合）。換句話說這是一個"部份代數系統"。數學各部門中還有這類部份的代數系統的例子。如所有佈於某一交換環的矩陣（matrix）集合（包含所有各階）。相對於乘法這個集合就是一個"部份代數系統"。不是任二矩陣都可乘是我們熟知的事實。另一方面在拓撲群論中我們常考慮一類局部群（Localgroup），具有一個有單位元素且滿足結合律甚至還有一些元素有反元素的「部份二元運算」。

値得注意的是由M即所有同態的集合可以從頭建立起原來的範疇，我們先定義一個部份二元運算系統滿足適當的公設即可證明此系統爲某一範疇的同態集合。

〔練習：嘗試自己下這個無物元的範疇定義。關鍵在物元和單位同態間的一一對應。〕

剛才所有佈於某一體矩陣的集合在此情形下就構成了一個小範疇，其物元集合是自然數集合N。Hom(n, m)是所有$n \times m$矩陣的集合。這是一個値得注意的例子。它的同態（即矩陣）並非從n到m的函數，它和以上所提過的範疇全不一樣。在範疇的公設中我們並沒有要求同態是函數，只要求了它們的"形式"行爲所以才會有這樣的範疇出現。像先前那樣的範疇（其物元都是特殊集合而且同態都是這些集合上的特殊函數）我們叫它實際範疇（Concrete Category）。矩陣形成了一個非一實際範疇的例子。

在"部份代數系統"中那些只包含可以互相運算元素的子集當然自成了代數系統。如範疇同態中Hom(x, x)相對於同態的結合就是一個有單位元素的半群。因而"本質"上一個具單位元素的半群就是單物元小範疇。這是値得注意的事實：所有有單位元素的半群加上他們的同態可以構成一個範疇，而每一個有單位元素的半質自身也是一個範疇。我們推想一下可知對群環體等情形也是一樣。此外任一部份有序集合（Partial Ordered set）也可"視"爲一個小範疇，其任二物元間最多有一個同態，且對任二物元A，B若Hom$(A, B) \neq \phi$，則Hom$(B, A) = \phi$。〔若X爲一部份有序集合，我們可從X建立一個範疇x：其物元爲所有x的元素，若$A \in x$，$B \in x$且$A \leq B$則定義Hom$(A, B) = \{\phi\}$否則定義Hom$(A, B) = \phi$。經由部份有序集合的反對稱性（Antisymmetry）$A < B$　$B \nless A$，故Hom$(A, B) \neq \phi$　Hom$(B, A) = \phi$〕。這些觀察顯示，範疇不僅僅是一"大"的概念而已，實在是一"巨細靡遺"的概念。

在範疇間"保持"結構的函數就是函子（functor），函子有兩種：一種"保持"同態的方向，一種"逆轉"同態的方向。在定義函子之前我們先來談談交換圖表（Commutative Diagrame）的概念（當然這是可以被嚴格定義的）。在數學中我們常一齊考慮一組物元及它們的一些同態。非正式的說，把這樣的一組物元及同態用"端點"及"箭頭"（其方向指同態方向）表示就叫做圖表。箭頭連起來叫途徑（Path），一個途徑表示一個合成同態。當一個圖表中任何二個具有相同起點及終點的途徑所表示的合成函數都相等時就叫此圖表爲交換圖表。交換圖表在範疇論中是很有用的東西，一方面因爲範疇論中的敍述多半只關係到同態結合，即敍述某種合成和另一種合成相等。故一個交換圖表可以一下子表達出很多這樣的敍述及它們間的聯繫。另一方面對交換圖表可以提供我們一種"局部"上對函子的觀察。

〔練習：嘗試從每一"有限"交換圖表建立一個小範疇。〕

定義：若X及X'爲兩個範疇。從X到X'的一個諧變函子F（Covariant functor）是一對函數：物元函數（Object function）把X中的每一物元x對應一個x'的物元$F(x)$，映像函數（Mapping function）把X的每一同態$x \xrightarrow{f} y$對應X'的同態$F(x) \xrightarrow{F(f)} F(x)$。

滿足以下的條件：

對於X中每一單位同態I_x，$F(I_x) = I_{F(x)}$

對於X中的合成同態$g \circ f$，$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

從X到X'的逆變函子C（Contravariant functor）的映像函數把$x \xrightarrow{f} y$對應$C(x) \xrightarrow{C(f)} C(x)$。

雖然對I_x行爲同於諧變函子可是對合成同態$g \circ f$則滿足：$C(g \circ f) = C(g) \circ C(f)$

$$\begin{tikzcd}
F(x) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(g\circ f)"'] & F(y) \arrow[loop above, "I_{F(y)}"] \arrow[d, "F(g)"] & & x \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & y \arrow[loop above, "I_y"] \arrow[d, "g"] & & C(x) \arrow[r, "C(f)"] \arrow[dr, "C(g\circ f)"'] & C(y) \arrow[loop above, "I_{C(y)}"] \arrow[d, "C(g)"] \\
& F(z) & \arrow[l, phantom, ""] & & z \arrow[l, shorten <=3em, shorten >=3em] \arrow[r, shorten <=3em, shorten >=3em] & & & C(z)
\end{tikzcd}$$

諧變函子把中央的交換圖形變到左邊，逆變則變到右邊。

顯然函子可以結合：把物元函數結合物元函數，映像函數結合映像函數，所得仍爲函子。在此結合之下每一範疇都具有單位函子即由相等函數（Identity function）形成的函子。二諧變函子合成後仍是諧變函子但二逆變函子合成後就得諧變函子，因爲“逆逆得諧”。如果集合論容許我們考慮包含所有類的類，那麼以範疇爲物元以諧變函子爲同態我們就可以建立包含所有範疇的宇範疇。不過這樣做的話Russell矛盾又來了。因而我們只能建立包含所有小範疇的範疇（試自證明）。

以下我們看看各種函子的例子：

⑴一個有單位元素半群到另一個的運算同態就“是”函子，當我們將這些半群視爲含單一物元範疇時。實際上函子就“是”我們談到過的代數同態，只差它是作用在“部份代數系統上”而已。另外我們還可以證明部份有序集合所成範疇的函子就是它們間的單調函數（Monotonic function）一而單調函數就是它們間的同態。（在以上情形中什麼是物元及映像函數？）。

⑵我們如把任一範疇時X的每一同態的方向都反轉就得到了一個新範疇：它的對範疇X_a（Dual Category）。物元都不變，把（x，y）的同態集合Hom（y，x）改成（y，x）的，換句話說每一$x\xrightarrow{f}y$產生一個$y\xrightarrow{fa}x$在對範疇中。因而若$g\circ f$是g，f在X中的合成則把$fa\circ g_a$定義爲$g\circ f$所產生的（$g\circ f$）$_a$。顯然從X到X_a有一自然逆變函子D：物元函數$x\rightarrow X$映像函數$f\rightarrow fa$。X_a再反轉就得回X因而此種逆變函子結合就成了相等函子。如果C是從Y到X的逆變函子。$D\circ C$就成了從Y到X_a的諧變函子，更有甚者，此造成了從Y到X的逆變函子與Y到X_d諧變函子間的一一對應。

⑶在集合範疇中有一些很“熟悉”的函子。我們知道每一個集合都有一個冪集，有一個從x到y的函數f（x，y爲集合）把X的子集對應y子集，：若$A\subset X$，$f_0(A)=\{b \mid b\in y,\ \exists\, a\in X,\ f(a)=b\}\subset y$。這樣就形成了諧變函子。若用從$P(y)$到$P(x)$的函數$f^{-1}$則形成逆變函子。（$f^{-1}(B)=\{a \mid a\in x,\ f(a)\in B\}\subset X$。

諧變冪函子

$$x \xrightarrow{\text{物元函數}} P(x)$$

$$(x\xrightarrow{f}y)\xrightarrow{\text{映像函數}}(P(x)\xrightarrow{f_0}P(y))$$

逆變冪函子

$$x \xrightarrow{\text{物元函數}} P(x)$$

$$(x\xrightarrow{f}y)\xrightarrow{\text{映像函數}}(P(y)\xrightarrow{f^{-1}}P(x))$$

如果我們利用子集，子群，子空間等對同態的“反應”，在抽象範疇中定義子物元的概念，以上這樣的函子就可推廣而存在於一般的範疇內。例如在群中我們把群的同態視爲把子群對應子群的函數就可建立相似的函子。

另外一種函子是積函子。同樣是可以存在於其它很多範疇內（即從一個範疇自身到自身），只要我們適當的定義物元積（Product of objects）。從集合範疇到集合範疇時它是先取一固定集合X，然後把每一集合S對應$X\times S$，每一$S\xrightarrow{f}T$對應$X\times S\xrightarrow{I\times f}X\times T$，定義$1\times f(a,s)=(a,f(s))\in X\times T$。用不同的$X$得到不同函子。

積函子

$$S \xrightarrow{\text{物元函數}} X\times S$$

$$(S\xrightarrow{f}T)\ \text{映像函數}\ (X\times S\xrightarrow{1\times f}X\times T)$$

⑷有一種從實際範疇到集合範疇的函子；把每一物元對應其自身集合，同態則對應它們所等於的函數。因這種函子“忘掉”實際範疇每一物元自身的結構，故稱之爲健忘函子（Forgetfulfunctor）。如果一實際範疇有很多“層”結構，它可以一層層的來忘，例如對內積向量空間的範疇（佈於任意體）（Inner product space），首先“忘掉”它們物元的內積而成爲普通向量空間，再把所有佈在的體及純量乘向量“忘掉”就成了交換群，最後把向量加法“忘掉”就成了單純集合。這就“忘”到底了。在數學中任何系統都不能“忘掉”它是集合。（自證忘掉函子確實是諧變函子）。

⑸在普通拓撲學（General Topology）中有一些函子的例子。我們知道每一距離空間（Metric Space）的所有開集（Open Set）滿足拓撲空間的公設，而由ε，δ定義的連續函數就成爲所產生拓撲空間的連續函數。這就是一個函子：從距離空間及連續函數的範疇到拓撲空間範疇。此外我們知道有幾種相等（Equivalent）的方式定義拓撲空間；用開集定義拓撲空間，用鄰集（Neighbor hood）定義鄰集空間，用封閉運算子（Closure Operaeor）在其冪集上定義特殊一元運算而成封閉空間等等。從範疇的角度來解釋以上的“相等”是：一種方式形成一種範疇，但在形成的幾種範疇間有“自然”的一一對應函子（其物元函數及映像函數均爲一一對應）。我們可以稱任二存在一一對應函子的範疇爲同構範疇。那麼剛才的“相等”就是指範疇同構。

⑹在一範疇X中取一物元A，對其它物元就存在集合Hom（A，x）（即在從（x，y）到Hom（x，y）函數定義域

平行公設在幾何中的地位一樣。1930年K. Godel 由集合論的其它公設建了一個模型(Model)。然後在其上證明了選擇公設及連續物假設。經由此種方式他使任一包含此二公設的系統內的矛盾轉移成不包含此二公設的公設間的矛盾。而數學家們一直相信這些公設間沒有矛盾。1963年P.Cohen 又把這兩個公設的否定加入一套不矛盾的系統內，再證明了它們加入後的公設系統也沒有矛盾。簡而言之，Godel證明了此二公設的在系統內的一致性(Consistency)，而Cohen 證明了獨立性(Independence)。如同平行公設在歐氏幾何系統內也是和其它公設一致而又獨立於其它公設的所謂一個公設獨立於其它公設是指它不能由其它公設導出。

今天數學家對所有要靠此二公設的數學定理仍然企圖尋找不須此二公設的證明，不過已經不必擔心此二公設會影響它們的"對""錯"，而是想知道數學家是否有選擇的餘地。如果一定理不須此二公設也可證出。那就表示數學家目前對此定理的正反兩面沒有可選擇的。反之對必須依賴此公設才能證出的結果數學家就有了選擇，那些結果既可對也可錯，這要看各人選那一個系統發展了。就好像我們可以發展歐氏幾何也可發展Lobechevskian幾何。

B. 範疇及函子(Categories and Functors)

在數學之中我們遇到各式各樣的數學系統，集合，群，拓樸空間，拓樸群等。當我們研究它們時我們不只是研究單一系統本身，同時也研究從一個同種系統到一個同種系統而能保持結構的函數。〔例如對拓樸空間我們研究連續函數，對集合研究普通函數，對群研究群的同態(homomorpbism)對拓樸群則研究連續同態(Continuons homomorphism)。〕如果我們把這些同種系統再加上那些函數視爲一個"整體"就可以發現這些"整體"在形式上的行爲(Formal behavionr)有很多相似的地方。例如函數合成在每一個這樣的整體中都成了"內運算"，而且滿足結合律，所不同於一般代數系統的是它在整體中並不是任二個此種函數都可合成。另一方面，對應於每一個系統都有一個相等函數。相對於合成此函數有單位元素的表現。

基於以上的認識我們可以抽象出一種"大"的結構，就是我們的主題一範疇，「定義：一個範疇是一個類X在其中定義有二個函數，X中的元素特稱之爲物元(Object)。

(1)第一個函數把任一物元對(x，y)對應一個集合，此集合我們以Hom(x，y)表示。而對於其中元素$f\in$Hom(x，y) 我們叫它從x到y的同態，x，y分別稱爲它的定義域及餘定義域，通常以$x\xrightarrow{f}y$表同態(morphism)。

(2)第二個函數把一三元物元有序對(x，y，z)對應一個函數以Hom(y，z)×Hom(x，y)爲定義域以Hom(x，z)爲餘定義域。

〔即Hom(y，z)×Hom(x，y)→Hom(x，z)〕對於任二同態$y\xrightarrow{g}z$，$x\xrightarrow{f}y$(g，f)在此函數下的值以$g\circ f$表之稱之為g，f的合成。

這兩個函數滿足下列條件。

結合律：對於$z\xrightarrow{h}W$，$y\xrightarrow{g}z$，$x\xrightarrow{f}y$

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$$

單位元素：對於任一物元，存在一同態$I_y\in$Hom(y，y)滿足

$$x\xrightarrow{f}y\Rightarrow I_y\circ f=f \quad ， \quad y\xrightarrow{y}z\Rightarrow g\circ I_y=g$$

由I_y的存在可以證明其唯一(試自證)。由一個範疇我們可以建構其所有同態的集合$M=U_{(x,y)\in X\times X}$Hom(x，y)這是一個類。除非X是集合，M不會是集合(試從集合論公設證明)，當X是集合時我們叫它小範疇。前面已提到的兩個例子，所有集合及其間函數，所有群及群同態，所有拓撲空間及連續函數，所有拓撲群及拓撲同態，就是四個範疇。而且都不是小範疇。它們的物元就是一個個的集合，群，拓撲空間，拓撲群。群是一類大範疇(代數範疇)中的一個特殊例子，代數範疇的物元都是單一類代數系統。

一個代數系統是一個集合定義有任意數目(可以無限)個代數運算。定義：一個n元代數運算是一個從$A\times A\cdots\times A\rightarrow A$的函數$\varphi$，一個0元代數運算是一個從{0}→$A$的函數。其定義域之唯一元素0就是整數中的0，不過換任一其它元素也一樣，主要是因爲這樣的一個0元運算其値不須依賴A中任一或一組元素，而n元運算是須依賴A中元素的n有元序對。換句話說一個0元運算就是A中"武斷"的挑出一個元素而已。例如每一個群都有一個0元運算卽挑出群單位元素的過程。

n元運算的同態就是一般代數同態的推廣，$(a_1,a_2,\cdots a_n)\varphi=(a_1\varphi)(a_2\varphi)(a_3\varphi)\cdots(a_n\varphi)$而0元代數運算的同態，就是把挑出元素對挑出元素的函數，而一個代數系統到另一代數的系統的同態，就是對此種代數系統中任一

上固定一變元）。每一個同態 $x \xrightarrow{f} y$ 可以和 $t \in \mathrm{Hom}(A, x)$ 組合而成 $f \circ t \in \mathrm{Hom}(A, y)$， 換句話說一個同態產生一個 $\mathrm{Hom}(A, x)$ 到 $\mathrm{Hom}(A, y)$ 的函數 $f_0 = f \circ t$ 。這樣就形成一個從 X 到集合範疇的諧變同態函子（Co-variant Morphism functor）。假如把物元値由 $\mathrm{Hom}(A, x)$ 改成 $\mathrm{Hom}(x, A)$，同態值改成 $t \circ g$ ($y \xrightarrow{g} x$) 就形成逆變同態函子（Contravaiant morphism functor）。

由線性代數我們知道每一個佈於實數 R 的有限維向量空間 V 有一個對偶向量空間——即在 $\mathrm{Hom}(V, R)$ 定義自然運算而得。每一個線性變換（向量空間同態）產生一個從其餘定義的對偶到定義域對偶的線性變換，我們稱之爲對偶變換。這就是一個佈於實數系有限維向量空間所成範疇到自身的“逆同構”函子。這個函子和健忘函子結合就是在此範疇內取 $A = R$ 所得之逆變同態函子（試自證明）。

(7)最後我們來看幾個代數拓撲學（Algebraic Topology）中的著名函子。藉著這些函子我們可以用代數結構有效的“反映”拓撲結構。

先看一個標準的建構新範疇方式：在一範疇中取一數列物元及任二項間的一同態（如下圖表）作爲新物元。

$x^0 \to x^1 \to \cdots\cdots \to x^n \to \cdots\cdots$ 以 $\{x_i\}$ 表之

然後取一數列同態 $\{f_i\}$，每一項同態由 x_i，且能使下圖形成爲交換圖表：

$$\begin{array}{ccccccc}
x^0 & \to & x^1 & \to \cdots\cdots \to & x^n & \to & \cdots\cdots \\
\downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & \cdots\cdots & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \cdots\cdots \\
y_0 & \to & y_1 & \to \cdots\cdots \to & y_n & \to & \cdots\cdots
\end{array}$$

若定義滿足上條件的數列 $\{f_i\}$ 爲 $\{x_i\}$ 到 $\{y_i\}$ 的同態。我們就可以得到一個新範疇。（試自證）。此種建構方式可以由上面的數列圖表推廣到任意交換圖表。

同調函子就是從拓撲空間範疇到由交換群範疇所建的“數列”範疇的函子。共輒同調函子（Cohorwlogy functor）則是到一“反向”數列範疇的函子。前者是諧變，後者是逆變。

Presheaf 也是到這種數列範疇的函子。不過其“定義域”不是所有拓撲空間的範疇而是單一拓撲空間——在單一拓撲空間內取開集爲物元，它們間的大小次序（即嵌入函數）作爲同態，就成了一個小範疇。

前面實際只介紹了範疇及函子的定義。範疇及函子的觀念是二十多年前由S.Mac Lane及S.Eilenberg定義的，現在它們已成爲數學中最重要觀念之一，它們可以有系統的組織數學中的各部份不論代數，幾何，拓撲或分析。

（參 考 資 料）

(一) P.R Halmos Naive Set Theory, 1960

E.Mendelson Introduction to Mathematical Logic 1964.

K.Godel The consistency of Axiom of Choice and Generalized Continuum Hypochesis. Annals of Mathematics Studiey No.2 1940.

A.Tarski 邏輯及演譯科學方法論概論，商務印書館 1967.

(二) S. Mac Lane and G.Birkhoff Algebra 1967.

A.G.Kurosh Lectureson General Algebra 1963. Euglish translation 1965.

B.Mitchell Theoy of Categories 1965.

(三) 以範疇及函子爲基本語言發展理論的書：

S.Lang Introduction to Differentiable Manifolds 1963.

D.G.Northcott Introduction to Homological Algebra 1960

E.H.Spanier Algebraic Topology 1966.

幻方與羣的研究

數一　季大明

序

～0～

這篇論文裏主要的構思，大約是從去年五月間開始研究的，我把它零星地記在日記中，後來因爲聯考期近，不得已就停了下來。近來聽說系刊徵稿，我覺得機會難得，因此就花了一番功夫重加研究、整理，寫了出來。

～1～

論文裏主要是把傳統塡連續正整數的幻方予以抽象研究，値得討論的是 Def.2.；如果我們不管群不群的話，則至少有兩點需要說明，一是我認爲所取的n^2個元素可以相同，也許有些人不同意，我的理由是因爲這樣可以避免一些偏狹，由於連續正整數的平方並不連續，因此非要取不同的元素對於有限群會有尷尬的場面。其次是交換不交換的問題，單從2階幻方就可以明白這一條件的須要，如果我們硬是不理會的話，那麼在討論多階幻方時，行列的運算還要顧慮到方向，這會使問題變得非常複雜。

～2～

據古籍相傳，大禹治水成功後，有神龜負洛書於背，其上“爲數至九，戴九履一，左三右七，二四爲肩，六八爲足，而五居中”。又曰“洪範九疇，皇極居五，以一御八，居中制外，亦一中而已”。其實這就是最簡單的九宮幻方。按洛書的出現，當屬古人的牽強附會。不過其一般塡法的奧妙，常使人著迷其間！歐洲中古的星士皆信幻方之性質神妙莫測，且刻在銀版上當避疫符籙！（見人人文庫，初等算學史，P. 234 美卡納黎原著）。

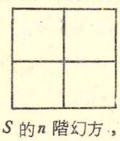
～3～

文中所討論的問題，不單在如何求出一幻方，以解決某些條件不夠的群方程式，最重要的是對幻方群（$\mathcal{S}_n$）之分析（我只做了一點，還嫌不夠，希能拋磚引玉），意外的是在Permutation 上也有些收獲，此外我還發現它和群的structure 有些神秘的關係，以及auto distribute的現象。不過這一領域我還沒觸到核心，可以說是在一種雛思與草稿紙上的階段，歡迎有興趣的同學一起來研究。文中大部份的名詞是我自定的，不過它們都有明確的定義說明。又筆者學淺，完全就興趣新創了一個數學“系統”，其中錯誤在所難免，歡迎同學隨時指正，我將感激不盡。

～4～

謝謝數四的老大哥陳炎坤同學在百忙中給予校正，使錯誤減少了許多。

Def.1. 等分一正方形爲n^2（$n \in N$，N爲正整數系且$n < 2$）個子正方形或保持原形，則稱其圖形爲一n^2幻方格或單位幻方格。如下圖即爲一4幻方格之例，餘可類推。



Def.2. 設$< S ; + >$爲一交換群，則佈於S的n階幻方，就是在S中任取n^2個元素（(i) $n \in N$，(ii) 可相同）塡於一n^2幻方格中（一格塡一個）使其每一行，每一列及兩對角線上諸元素分別在“＋”運算下有相同的結果，但當$n=1$時，則單位幻方格與其內之任一S中元素亦視爲一幻方。佈於S的n階幻方記爲S_n。

如複數系加法群爲一交換群，則下圖顯然爲一佈於複數系之3階幻方，其每一行、每一列及兩對角線上諸元素相加皆等於$-\dfrac{3}{2}+3i$

$1+\frac{5}{2}i$	$-\frac{5}{2}-i$	$\frac{3}{2}i$
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}+i$	$\frac{1}{2}+2i$
$-1+\frac{1}{2}i$	$\frac{3}{2}+3i$	$-2-\frac{1}{2}i$

爲簡便計，以後均略爲

$$\left\{\begin{matrix} 1+\frac{5}{2}i & -\frac{5}{2}-i & \frac{3}{2}i \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}+i & \frac{1}{2}+2i \\ -1+\frac{1}{2}i & \frac{3}{2}+3i & -2-\frac{1}{2}i \end{matrix}\right\}$$

一般 n^2 個元素構成的幻方簡記為 $\{a_{ij}\}_n$，n 為 $\{a_{ij}\}_n$ 的階數；其內的元素以兩個足碼（i，j）分別表示其在此幻方格中的第 i 列（左至右）及第 j 行（上至下）。

Def. 3. 設 S_p，S_q 為佈於 S 的任二 p，q 階幻方，$S_p = S_q \Longleftrightarrow$ (i) $p = q$，(ii) 對應位置的元素皆相等。
顯然此關係為一 equivalence relation。

Def. 4. 設 $S_n = \begin{Bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{Bmatrix}$，根據 Def. 2. 知相對於 S_n 的必有一元素，而其為 S_n 中任一行、任一列及任一對角線上元素相運算後之結果；稱其為 S_n 的母數。一般而言，S_n 的母數記為 $|S_n|$，根據 Def. 2. 可知 $|S_n| = a_{11} + \cdots + a_{1n} = \sum_{j=i}^{n} a_{ij}$ 或 $\sum_{i=1}^{n} a_{i1}$ 或 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$，餘可類推。

Theorem 1. 對任意交換群 S 及任意 $n \in N$ 而言，至少存在一 S_n。

proof：S 為一交換群，故必存在一單位元素 $e \in S$。設於一 n^2 幻方格中以 n^2 個 e 填入，其必構成一佈於 S 的 n 階幻方，故原定理得證。

Def. 5. 設 $\mathscr{S}_n$ 表佈於 S 中之一切 n 階幻方，定義一運算"★"，其定義為：

$$\forall S_n, 'S_n \in \mathscr{S}_n \text{ 若 } S_n = \begin{Bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{Bmatrix}, \quad 'S_n = \begin{Bmatrix} 'a_{11} \cdots 'a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ 'a_{n1} \cdots 'a_{nn} \end{Bmatrix}$$

$$S_n + 'S_n = \begin{Bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{Bmatrix} \star \begin{Bmatrix} 'a_{11} \cdots 'a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ 'a_{n1} \cdots 'a_{nn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11} + 'a_{11} \cdots\cdots a_{1n} + 'a_{nn} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} + 'a_{n1} \cdots\cdots a_{nn} + 'a_{1n} \end{Bmatrix}$$

Theorem 2. "★"為 $\mathscr{S}_n$ 中之內運算。

proof：$\forall S_n$，$'S_n \in \mathscr{S}_n$，（$S_n \star S_n$）中第一行諸元素在"＋"運算下為 $\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + 'a_{ij}) = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}) + (\sum_{j=1}^{n} 'a_{ij}) = |S_n| + |'S_n|$，同理其它行、列及兩對角線上諸元素在"＋"運算下亦為同一結果。

Theorem 3. $\forall S_n$，$'S_n \in \mathscr{S}_n$，則 $|S_n| + |'S_n| = |S_n \star 'S_n|$

proof：$|S_n| + |'S_n| = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}) + (\sum_{j=1}^{n} 'a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + 'a_{ij}) = |S_n + 'S_n|$

故得證。

Theorem 4. $\forall S_n$，$'S_n$，$''S_n \in \mathscr{S}_n$，則 $(S_n \star 'S_n) \star ''S_n = S_n \star ('S_n \star ''S_n)$

proof：設 $S_n = \{a_{ij}\}_n$，$'S_n = \{'a_{ij}\}_n$，$''S_n = \{''a_{ij}\}_n$

$(S_n \star 'S_n) \star ''S_n = (\{a_{ij}\}_n \star \{a_{ij}\}_n) \star \{''a_{ij}\}_n$

$= \{a_{ij} + 'a_{ij}\}_n \star \{''a_{ij}\}_n$

$= \{(a_{ij} + 'a_{ij}) + ''a_{ij}\}_n$

$= \{a_{ij} + ('a_{ij} + ''a_{ij})\}_n$

$= \{a_{ij}\}_n \star \{'a_{ij} + ''a_{ij}\}_n$

$= S_n \star ('S_n \star ''S_n)$ 　故得證。

Theorem 5. $\forall S_n$，$'S_n \in \mathscr{S}_n$，則 $S_n \star 'S_n = 'S_n \star S_n$

proof：命 $S_n = \{a_{ij}\}_n$，$'S_n = \{'a_{ij}\}_n$

$S_n \star 'S_n = \{a_{ij}\}_n \star \{'a_{ij}\}_n = \{a_{ij} + 'a_{ij}\}_n$

$= \{'a_{ij} + a_{ij}\}_n = \{'a_{ij}\}_n \star \{a_{ij}\}_n = 'S_n \star S_n$

Theorem 6. $\exists\ S_n \in \mathscr{S}_n$ s.t.（suchthat）$\forall\ 'S_n \in \mathscr{S}_n$

$S_n + 'S_n = 'S_n + S_n = 'S_n$

proof：命 S_n 表由 n^2 個 S 中之單位元素構成之 n 階幻方，則 $\forall\ 'S_n \in \mathscr{S}_n$ 且 $'S_n = \{'a_{ij}\}_n$ 那麼 $S_n \star 'S_n$

$= \{ e + a_{ij} \}_n = \{ a_{ij} \}_n = {}'S_n \star S_n$ 故原定理得證，以後 $\mathscr{S}_n$ 中的單位元素記爲 O_n。

Theorem 7. $\forall S_n \in \mathscr{S}_n \quad S_n^{-1} \in \mathscr{S}_n \quad s.t.$

$S_n \star S_n^{-1} = S_n^{-1} \star S_n = O_n$

proof：設 $S_n = \begin{Bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{Bmatrix}$，則可於一 n^2 幻方格中第 i 列第 j 行塡入 a_{ij} 之反元素 $-a_{ij}$，此一幻方格可構成一幻方否？試觀其第一列諸元素 $(-a_{11}) + \cdots\cdots + (-a_{1n}) = -(a_{11} + \cdots\cdots + a_{1n}) = -|S_n|$。同理，其它行，列及兩對角線上諸元素在"＋"運算下亦有同一結果，故此 n^2 幻方格爲 $\mathscr{S}_n$ 中一元素，命其爲 S_n^{-1}。其次，$S_n \star S_n^{-1} = S_n^{-1} \star S_n = \{a_{ij}\}_n \star \{-a_{ij}\}_n = \{a_{ij} - a_{ij}\}_n = O_n$，故原定理得證。

Theorem 8. $< \mathscr{S}_n ; \star >$ 爲一交換群。

proof：可由 Theorem 2. 4. 5. 6. 7. 得知。

設可於 $< S ; + >$ 中再定義一運算"・"使 $< S ; + , \cdot >$ 爲一體。據體之定義知"・"對"＋"有分配性。

Def.6. 定義一運算從 $S \times \mathscr{S}_n$ 映至 $\mathscr{S}_n$ 的部份集合，對任一 $a \in S$，$S_n \in \mathscr{S}_n$ 則 aS_n 爲 $\mathscr{S}_n$ 中之唯一元素，其定義如下：

$$設\ S_n = \begin{Bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{Bmatrix} \in \mathscr{S}_n ,\ a \in S \ 則\ aS_n = \begin{Bmatrix} a \cdot a_{11} \cdots\cdots a \cdot a_{1n} \\ \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \\ a \cdot a_{1n} \cdots\cdots a \cdot a_{nn} \end{Bmatrix}$$

因爲在 aS_n 中每一行，每一列及兩對角線上諸元素經"＋"運算後均只比 $|S_n|$ 多乘一 a 故 $aS_n \in \mathscr{S}_n$ 爲 $\mathscr{S}_n$ 中唯一元素。

Theorem 9. $|aS_n| = a \cdot |S_n| \qquad \forall a \in S ,\ S_n \in \mathscr{S}_n$

proof：設 $S_n = \{a_{ij}\}_n$ 則 $|aS_n| = |\{a \cdot a_{ij}\}_n| = a \cdot (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}) = a \cdot |S_n|$ 故原定理得證。

Theorem 10. $\forall p , q \in S ,\ S_n \in \mathscr{S}_n$ 則 $(p+q)S_n = (pS_n) \star (qS_n)$

proof：設 $S_n = \{a_{ij}\}_n$ 則 $(p+q)S_n = (p+q)\{a_{ij}\}_n = \{(p+q) \cdot a_{ij}\}_n = \{(p \cdot a_{ij}) + (q \cdot a_{ij})\}_n = \{p \cdot a_{ij}\}_n \star \{p \cdot a_{ij}\}_n = (pS_n) \star q(S_n)$ 故原定理得證。

Theorem 11. $\forall p \in S ,\ S_n ,\ {}'S_n \in \mathscr{S}_n$ 則 $p(S_n \star S_n) = (pS_n) \star (q\ {}'S_n)$

proof：設 $S_n = \{a_{ij}\}_n$，${}'S_n = \{{}'a_{ij}\}_n$

$p(S_n \star {}'S_n) = p(\{a_{ij}\}_n \star \{a_{ij}\}_n) = p(\{a_{ij} + {}'a_{ij}\}_n)$

$= \{p \cdot (a_{ij} + {}'a_{ij})\}_n = \{(p \cdot a_{ij}) + (p \cdot {}'a_{ij})\}_n$

$= \{p \cdot a_{ij}\}_n \star \{p \cdot {}'a_{ij}\}_n$

$= (pS_n) \star (pS_n)$ 故原定理得證。

Theorem 12. $\forall p , q \in S ,\ S_n \in \mathscr{S}_n$ 則 $(p \cdot q)S_n = p(qS_n)$。

proof：設 $S_n = \{a_{ij}\}_n$

$(p \cdot q)S_n = (p \cdot q)\{a_{ij}\}_n = \{(p \cdot q) \cdot a_{ij}\}_n$

$= \{p \cdot (q \cdot a_{ij})\}_n = p\{q \cdot a_{ij}\}_n = p(qS_n)$

故原定理得證。

Theorem 13. 設 I 爲 $< S ; + , \cdot >$ 中"・"運算的單位元素則 $IS_n = S_n$

proof：設 $S_n = \{a_{ij}\}_n$ 則 $IS_n = I\{a_{ij}\}_n = \{I \cdot a_{ij}\}_n$

$= \{a_{ij}\}_n = S_n$ 故原定理得證。

Theorem 14. $< \mathscr{S} ; \star >$ 爲佈於 $< S ; + , \cdot >$ 之一向量空間。

proof：根據 Def. 6.及 Theorem 10. 11. 12. 13. 即得。

以上對幻方的種種抽象結論討論，不但在理論上屬必要，而且在實際構製幻方時也有極大的價値，見後。

觀察下一函數：

$G:\{S_n \mid n\in N\}\to S$，其定義為 $\forall\ 'S_n\in\{S_n\mid n\in N\}$，$G('S_n)=|'S_n|$

(i) G 非一對一函數，試觀下列即知：

$$\left\|\begin{matrix}\frac{5}{2} & \frac{5}{2}\\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2}\end{matrix}\right\|=15 \qquad \left\|\begin{matrix}\frac{35-3\sqrt{2}}{4} & \sqrt{2} & \frac{25-\sqrt{2}}{4}\\ \frac{5+\sqrt{2}}{2} & 5 & \frac{15-\sqrt{2}}{2}\\ \frac{15+\sqrt{2}}{4} & 10-\sqrt{2} & \frac{5+3\sqrt{2}}{4}\end{matrix}\right\|=15$$

(ii) G 是否為映成（ onto ）函數？

當 $n=1$ 時 $\forall\ a\in S$ 必存在一 $\{a\}\in\{S_n\mid n\in N\}$ 而 $G(\{a\})=|\{a\}|=a$，故 G 為映成函數。

現在將函數 G 改為：對於某一 $n\in N$，$G_n:\mathscr{S}_n\to S$ 定義為 $\forall\ S_n\in\mathscr{S}_n$，$G_n(S_n)=|S_n|$，以討論當 $n\neq 1$ 時之情形。

為了討論的方便，我們用一permutation 以表示某一元素在一幻方格中的位置，例如 permutation （1 2 3）表示某一元素在一9 幻方格中的坐標為（1，2），（2，3）及（3，1），（因 1-2，2→3，3→1）。

Theorem 15. 設 $n=2S+1$ 為大於或等於5的奇數且 a 為 S 中任一元素，在一 n^2 幻方格中凡由（$1,\cdots,S-1$）（$S+1,\cdots\cdots,2S+1$）所定的坐標塡以 a，而於其它坐標皆塡入單位元素 e，則此 n^2 幻方格即構成一佈於 S 的 n 階幻方且其母數為 a。

proof： (i) 因 permutation（$1,\cdots\cdots,S-1$）（$S+1,\cdots\cdots,2S+1$）為一對一且映成，而其定義域為 $\{x\mid x\leq n,\ x\in N\}$ 值域亦為 $\{x\mid x\leq n,\ x\in N\}$。因其定義域管列，值域管行，故此 n^2 幻方格的每行及每列均僅含一個 a，讀者可實際繪圖試驗之。

(ii) 此 n^2 幻方格中的兩對角線中亦分別僅含一個 a：

首先我們先觀察此 n^2 幻方格中的右斜對角線（即左上角到右下角）。此右斜對角線上僅有一個 a 的條件為，僅存一 $P\in N$ 且 $P\leq n$，（P,P）。已知 $n=2S+1\geq 5$，故 $n\geq 3$，因此 permutation（$1,\cdots\cdots,S-1$）（$S+1,\cdots\cdots,2S+1$）中絕不會有一數字對應到本身，除了 $S\to S$（蓋 $1\to 2$，$2\to 3$，$\cdots$，$S-1\to 1$，$S+1\to S+2$，$\cdots\cdots$，$2S+1\to S+1$）。（S,S）在右斜對角線上且為唯一，故此 n^2 幻方格的右斜對角線僅有一個 a。

其次，我們再觀察此 n^2 幻方格中的左斜對角線（即右上角到左下角）。它要僅存一個 a 的條件為：恰存在二 p，$q\in N$，$p\leq n$，$q\leq n$，$p+q=(2S-1)+1=2S$；（p,q）。在 permutation（$1,\cdots\cdots,S-1$）（$S+1,\cdots\cdots,2S+1$）中 $S\to S$ 且 $S+S=2S$，故此二數是存在的。又凡比 S 小的諸數亦對應到一比 S 小的數（$1\to 2$，$2\to 3$，$\cdots\cdots$，$S-1\to 1$），故其中任一數與其函數值之和小於 $2S$；同理在比 S 大的諸數亦對應一比 S 大的數（$S+1\to S+2$，$\cdots\cdots$，$2S\to 1\to S+1$），故其中任一數與其函數值之和亦恒大於 $2S$，S 的唯一性得證。

綜合 (i) (ii) 可知此幻方格經此一塡即成一佈於 S 之 n 階幻方，且其母數為 a，故 Theorem 15. 得證。

如命 $n=5$ 時即如下圖

e	a	e	e	e
a	e	e	e	e
e	e	a	e	e
e	e	e	e	a
e	e	e	a	e

由 Theorem 15. 可引出下一重要定理：

Theorem 16. 設 n 爲大於或等於 5 的奇數，則函數 G_n ： $\mathscr{G}_n \to S$ 爲映成函數。

proof ： 可按 Theorem 15. 之法構製得。

Theorem 17. 設 $n = 2S$ 爲大於或等於 6 的偶數且 a 爲 S 中任一元素，在一 n^2 幻方格中凡由（ 2 ，……， S ）（ $S+2$ ，……， $2S-1$ ， 1 ， $2S$ ）所定之坐標塡以 a ，而於其它坐標皆塡入單位元素 e ，則此 n^2 幻方格即構成一佈於 S 的 n 階幻方且其母數爲 a 。

proof ： (i) 它的每一行及每一列均僅含一個 a ，其理由同 Theorem 15. 的證明中 (i) 不再贅述。

(ii) 再證明此 n^2 幻方格中的兩對角線上亦分別僅含一個 a 。

首先觀察它的右斜對角線，在 permutation （ 2 ，……， S ）（ $S+2$ ，……， $2S-1$ ， 1 ， $2S$ ）中 $1 \to 2S$ 非本身映到本身的對應（ $S \neq 1/2$ ），又 $2S \geqq 6$ 故 $S \geqq 3$ 。因（ $2S$ ）－（ $S+2$ ）$= S-2 \geqq 1$ 故 permutation （ $S+2$ ，……， $2S-1$ ， 1 ， $2S$ ）不會有本身映到本身的數存在。同理於（ 2 ，……， S ）中亦是，故 $S+1 \to S+1$ 爲唯一，其右斜對角線上僅存在一個 a 。其次 $1 \to 2S$ 而（ 1 ， $2S$ ）恰在左斜對角線上有一 a 。又 permutation （ 2 ，……， S ）中顯然無一數可與其函數值相加爲 $2S+1$ ，同理 $S+1 \to S+1$ ，（ $S+1$ ）＋（ $S+1$ ）$= 2S+2 \neq 2S+1$ 亦是。permutation （ $S+2$ ，……， $2S-1$ ， 1 ， $2S$ ）除 $2S-1 \to 1$ 外其餘諸數與其函數值之和恒大於

$2(S+1) = 2S+2 \neq 2S+1$ ，而 $2S-1 \to 1$ 中（ $2S-1$ ）$+1 = 2S \neq 2S+1$ ，

故其唯一性亦得證。

綜合 (i)(ii) Theorem 17. 成立。

如令 $n = 6$ 即如下圖：

e	e	e	e	e	a
e	e	a	e	e	e
e	a	e	e	e	e
e	e	e	a	e	e
a	e	e	e	e	e
e	e	e	e	a	e

由 Theorem 16. 可引出下一重要定理。

Theorem 18. 設 n 爲大於或等於 6 的偶數，則函數 G_n ： $\mathscr{G}_n \to S$ 爲映成函數。

proof ： 可按 Theorem 17. 之法構製。

其次將討論當 $n = 4$ ， $n = 2$ 及 $n = 3$ 的情形。

1. 若 $n = 4$ ，則可仿下圖構製得

e	e	a	e
a	e	e	e
e	a	e	e
e	e	e	a

Theorem 19. G_4 ： $\mathscr{G}_4 \to S$ 爲映成函數。

2. 若 $n = 2$ 時，設已塡好如右： $\begin{Bmatrix} A & C \\ B & D \end{Bmatrix}$ ，則由 Def. 2. 得 $A \star C = C \star B = C \star D = A \star D = B \star D = A \star B$ ，

化簡得 $A = B = C = D$ 。

故 $\left\| \begin{Bmatrix} A & C \\ B & D \end{Bmatrix} \right\| = \left\| \begin{Bmatrix} A & A \\ A & A \end{Bmatrix} \right\| = A + A = 2A$

顯然函數 G_2 ： $_2 \to S$ 非一定爲映成函數，必須改爲：

$'G_2 : \mathscr{G}_2 \to {'S} = \{ x \mid x \in S ,\ \exists\, y \in S ,\ s.t.\ y^2 = x \}$ ，若 $S = {'S}$ ， G_2 方爲一映成函數，如在有理數的加法群即具此性質。

Theorom 20. $G_2 : \mathscr{G}_2 \to S$ 為映成函數 $\Longleftrightarrow$ $S = \{x \mid x \in S, \exists y \in S \ s.t.\ y^2 = x\}$

3. 當 $n = 3$ 時

(i) 假如於一體 $< S ; + , \cdot >$ 中：

設 I 爲體 S 中的乘法單位元素，若 $3I \neq 0$ 對任一 $P \in S$ 可構製如下的兩種3階幻方而其母數爲 P（對任一 $a \in S$，a^{-1} 表其乘法反元素）。

$$(3I)^{-1} P \begin{Bmatrix} 4I & -3I & 2I \\ -I & I & 3I \\ 0 & 5I & -2I \end{Bmatrix} \qquad (3I)^{-1} \begin{Bmatrix} P & P & P \\ P & P & P \\ P & P & P \end{Bmatrix}$$

至於當 $3I = 0$ 的情況如何？則見 (ii)。

舉例如下：

$\dfrac{1}{(\bmod 5)}$ 因5爲 prime 故 $< \dfrac{1}{(\bmod 5)} ; + , \cdot >$ 爲一體，其運算表如下：

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$3I = 3 \neq 0$ 故可按上述的方法構成兩佈於 $\dfrac{I}{(\bmod 5)}$ 的3階幻方且其母數爲3，其圖如下：

4	2	2
4	1	3
0	0	3

1	1	1
1	1	1
1	1	1

(ii) 假如於一群 $< S ; + >$ 中：

我們先觀察下面的一體 $F = \{a , b , c\}$

+	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

·	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

$< F ; + >$ 爲一3階交換群，因所有的3階群爲 isomorphic，故 $< F ; + >$ 可做一代表。在任一交換群 S 中若對某一 $a \in S$ 而其階爲3者，我們可利用來構製一幻方母數爲 a 者所利用的元素僅有三個，即 a°，a' 及 a^2；非常不幸，它並不能構成我們所須要的幻方，同理這樣也證明了至少有一體（$< F ; + >$ 中 $3I = 0$），$G_3 : \mathscr{G}_3 \to F$ 不爲映成函數。

proof： 在 a°，a' 及 a^2 中任取三元素經“+”運算結果爲 a 者共有三組，即 a°，a°，a^1；a^2，a^1，a^1；a^2，a^2，a°。

在下面的諸表中標羅馬數字者爲先固定了幻方中的第一列第一行的元素，它共有三組可能即 a°，a' 或 a^2；然後再分別的按以上三組求一切可能的第二列諸元素，然後求出其第一列第三行的元素，再依第三行已得的兩元素決定第三列第三行的元素，如此一來，每一3幻方格的右斜對角線諸元素在“+”運算下皆等於 $a^{\circ} \neq a^1$，故原敍述得證。

I 第一列第一行爲0者

(i) 第一行順次爲 0 1 0 者（由上至下，下同）

$$\textcircled{1}\ \begin{matrix}0&x&x\\1&1&2\\0&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}0&x&0\\1&1&2\\0&x&2\end{matrix},\quad \textcircled{2}\ \begin{matrix}0&x&x\\1&2&1\\0&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}0&x&2\\1&2&1\\0&x&1\end{matrix},\quad \textcircled{3}\ \begin{matrix}0&x&x\\1&0&0\\0&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}0&x&1\\1&0&0\\0&x&0\end{matrix}$$

(ii) 第一行順次爲0 0 1者

$$\textcircled{1}\ \begin{matrix}0&x&x\\0&1&0\\1&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}0&x&2\\0&1&0\\1&x&2\end{matrix},\quad \textcircled{2}\ \begin{matrix}0&x&x\\0&0&1\\1&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}0&x&0\\0&0&1\\1&x&0\end{matrix},\quad \textcircled{3}\ \begin{matrix}0&x&x\\0&2&2\\1&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}0&x&1\\0&2&2\\1&x&1\end{matrix}$$

(iii) 第一行順次爲0 2 2者

$$\textcircled{1}\ \begin{matrix}0&x&x\\2&2&0\\2&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}0&x&0\\2&2&0\\2&x&1\end{matrix},\quad \textcircled{2}\ \begin{matrix}0&x&x\\2&0&2\\2&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}0&x&2\\2&0&2\\2&x&0\end{matrix},\quad \textcircled{3}\ \begin{matrix}0&x&x\\2&1&1\\2&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}0&x&1\\2&1&1\\2&x&2\end{matrix}$$

II 第一列第一行爲1者

(i) 第一行順次爲1 0 0者

$$\textcircled{1}\ \begin{matrix}1&x&x\\0&1&0\\0&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}1&x&0\\0&1&0\\0&x&1\end{matrix},\quad \textcircled{2}\ \begin{matrix}1&x&x\\0&0&1\\0&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}1&x&2\\0&2&2\\0&x&0\end{matrix},\quad \textcircled{3}\ \begin{matrix}1&x&x\\0&2&2\\0&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}1&x&2\\0&2&2\\0&x&0\end{matrix}$$

(ii) 第一行順次爲1 1 2者

$$\textcircled{1}\ \begin{matrix}1&x&x\\1&0&0\\2&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}1&x&2\\1&0&0\\2&x&2\end{matrix},\quad \textcircled{2}\ \begin{matrix}1&x&x\\1&2&1\\2&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}1&x&0\\1&2&1\\2&x&0\end{matrix},\quad \textcircled{3}\ \begin{matrix}1&x&x\\1&1&2\\2&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}1&x&1\\1&1&2\\2&x&1\end{matrix}$$

(iii) 第一行順次爲1 2 1者

$$\textcircled{1}\ \begin{matrix}1&x&x\\2&2&0\\1&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}1&x&1\\2&2&0\\1&x&0\end{matrix},\quad \textcircled{2}\ \begin{matrix}1&x&x\\2&0&2\\1&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}1&x&0\\2&0&2\\1&x&2\end{matrix},\quad \textcircled{3}\ \begin{matrix}1&x&x\\2&1&1\\1&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}1&x&2\\2&1&1\\1&x&1\end{matrix}$$

III 第一行第一列爲2者

(i) 第一行順次爲2 2 0者

$$\textcircled{1}\ \begin{matrix}2&x&x\\2&2&0\\0&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}2&x&2\\2&2&0\\0&x&2\end{matrix},\quad \textcircled{2}\ \begin{matrix}2&x&x\\2&1&1\\0&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}2&x&0\\2&1&1\\0&x&0\end{matrix},\quad \textcircled{3}\ \begin{matrix}2&x&x\\2&0&2\\0&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}2&x&1\\2&0&2\\0&x&1\end{matrix}$$

(ii) 第一行順次爲2 1 1者

$$\textcircled{1}\ \begin{matrix}2&x&x\\1&1&2\\1&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}2&x&2\\1&1&2\\1&x&0\end{matrix},\quad \textcircled{2}\ \begin{matrix}2&x&x\\1&2&1\\1&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}2&x&1\\1&2&1\\1&x&2\end{matrix},\quad \textcircled{3}\ \begin{matrix}2&x&x\\1&0&0\\1&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}2&x&0\\1&0&0\\1&x&1\end{matrix}$$

(iii) 第一行順次爲2 0 2者

$$\textcircled{1}\ \begin{matrix}2&x&x\\0&2&2\\2&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}2&x&0\\0&2&2\\2&x&2\end{matrix},\quad \textcircled{2}\ \begin{matrix}2&x&x\\0&1&0\\2&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}2&x&1\\0&1&0\\2&x&0\end{matrix},\quad \textcircled{3}\ \begin{matrix}2&x&x\\0&0&1\\2&x&x\end{matrix}\to\begin{matrix}2&x&2\\0&0&1\\2&x&1\end{matrix}$$

Therem 21. G'_3 : $\mathscr{G}_s \longrightarrow S$ 不恒爲一映成函數。當 $S=3$ 時，G_3 不是一映成函數。

以上種種塡幻方的方法不免單調，其原因乃爲我們可以利用的元素僅有單位元素 e 及已知的母數。下面筆者將出示一法使它變得多彩多姿，而且對於構製高階幻方有極大的用處。

Def. 7. 設 $<S\ ;\ +>$ 爲一交換群，於 S 中任取 n^2 個元素（$n \in N$，$n \geq 2$）塡於一 n^2 幻方格中，使其每行及每列諸元素在"★"運算下有相同的結果，則稱其爲一佈於 S 的 n 階行列幻方。

佈於 S 的 1 階幻方亦稱爲 1 階行列幻方。

上面所說的"相同結果"亦稱爲其行列幻方的母數，記法同幻方。

Def. 8. 設 R_n 爲佈於交換群 $<S\ ;\ +>$ 的一行列幻方，若其右斜（左斜）對角線上諸元素在"＋"運算下亦爲 $|R_n|$，則稱 R_n 爲一右斜（左斜）幻方。

佈於 S 的 1 階幻方亦同爲右斜或左斜幻方。

$|R_n|$ 爲右斜（左斜）幻方 R_n 的母數。

Theorem 22. 設 K_n 表佈於 S 之一切 n 階行列幻方，則對於某一 $n \in N - \{2\}$ $f_n : K_n \to S$ 其定義爲 $\forall R_n \in K_n$，$f_n(R_n) = |R_n|$，那麼 f_n 爲映成函數。

proof：因任一幻方皆爲行列幻方，故根據 Theorem 16.，Theorem 18. 及 Theorem 19. 即可知當 $n \in N - \{2, 3\}$，f_n 爲映成函數。若 $n = 3$ 時則可令由 permntation（1 2 3）所定之坐標塡入 S 中之一元素，而於其它坐標塡入單位元素 e，此即構成一佈於 S 的 3 階幻方而其母數可爲 S 中之任一元素，故 Theorem 22. 得證。

Theorem 23. 設 $'K_n$ 表佈於 S 的一切右斜（左斜）n 階幻方，對於任一 $n \in N - \{2\}$ 則 $'f_n : 'K_n \to S$ 其定義爲 $\forall R_n \in 'K_n$，$f(R_n) = |R_n|$，那麼 $'f_n$ 爲映成函數。

proof：因任一幻方皆爲行列幻方，故根據 Theorem 16.，Theorem 18. 及 Theorem 19. 即可知當 $n \in \{2, 3\}$，f_n 爲映成函數。$n = 3$ 時若 $'K_n$ 爲左斜幻方則可令凡坐標爲（1，1），（2，2），（3，3）皆塡入 S 中之某一元素而於其它坐標皆塡入單位元素，此即構成一佈於 S 之一左斜幻方，而母數爲 S 中之任一元素。若 R 爲右斜幻方可令凡由 permntation（13）所定之坐標塡入 S 中之某一元素而於其它坐標皆塡入單位元素，此即構成一佈於 S 之一右斜幻方，而母數爲 S 中之任一元素。

綜合以上討論，即知若 $n \in N - \{2\}$，則 $'f_n$ 爲映成函數。

設 S_n 爲佈於 S 的 n 階幻方，規定以 $S_n{}^\circ$ 表示其中按序排列的元素，則顯然 $\begin{Bmatrix} S_n^\circ & S_n^\circ \\ S_n^\circ & S_n^\circ \end{Bmatrix}$ 爲一佈於 S 的 2^n 階幻方。同理可構製一 np 階幻方如下：

於一 $(np)^2$ 階幻方格中皆塡入 S_n° 的數 $\begin{Bmatrix} S_n^\circ \cdots\cdots S_n^\circ \\ \vdots \qquad \vdots \\ S_n^\circ \cdots\cdots S_n^\circ \end{Bmatrix}$

仔細觀察此構製中，使我們想到是否能將一多階幻方分成一小塊一小塊的幻方格來………

茲舉一例以討論：

設 $<\{a, b, c, d, e\}\ ;\ \star>$ 成群，其運算表如下：

+	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c
e	e	a	b	c	d

構製一佈於 $\{a, b, c, d, e\}$ 的 5 階幻方如右：

$$\begin{Bmatrix} d & c & b & a & e \\ c & b & a & e & d \\ b & a & e & d & c \\ a & e & d & c & b \\ e & d & c & b & a \end{Bmatrix}$$

（怎麼塡出來的？）

其母數為 a 。現於一 15^2 幻方格中，它必可分為一 5^2 幻方格，此於下圖中以粗線分出 。現在我們就將此一 15^2 幻方格當作 5^2 幻方格；例如坐標為（ 3 ，2 ）者在上面已塡好的 5^2 幻方格中其元素為 a ，那麼我們就以一 3 階幻方母數為 a 者塡到 15^2 幻方格中坐標為（ 3 ，2 ）（ 對其中 5^2 幻方格 ）者，餘可類比。如此一來，即可得一佈於 $\{a, b, c, d, e\}$ 的 15^2 階幻方，其原理只須稍思考一二即知 。不過讀者將不難發現在下圖中所塡入的並非全為 3 階幻方，不過這是無關緊要的，例如只要不在此 15^2 幻方格兩對角線上的只須塡入行列幻方即可（ Why ？），又如在此 15^2 幻方格右斜對角線上只須塡入右右斜幻方即可（ Why ？），同理在左斜對角線上亦類似。

e	c	c	c	a	a	a	a	b	a	a	a	c	b	b
e	b	d	a	c	a	a	b	a	a	a	a	c	d	e
a	a	d	a	a	c	b	a	a	a	a	a	a	a	e
c	a	a	d	e	e	a	a	a	b	e	e	a	a	d
a	c	a	d	c	b	a	a	a	b	d	a	a	d	a
a	a	c	a	a	b	a	a	a	c	c	a	d	a	a
a	a	b	a	a	a	e	a	a	a	a	d	c	a	a
a	b	a	a	a	a	e	d	c	a	d	a	a	c	a
b	a	a	a	a	a	b	b	c	d	a	a	a	a	c
a	a	a	a	c	c	a	a	d	b	d	d	a	a	b
a	a	a	a	d	b	a	d	a	b	e	c	a	b	a
a	a	a	e	e	b	d	a	a	a	a	c	b	a	a
c	b	b	a	a	d	c	a	a	a	a	b	a	a	a
c	d	e	a	d	a	a	c	a	a	b	a	a	a	a
a	a	e	d	a	a	a	a	c	b	a	a	a	a	a

由以上的討論,可以得到下一重要定理：

Theorem 24. 擴製幻方基本定理：

設 S_p 為佈於交換群 S 的 P 階幻方，若其中第 i 列第 j 行之元素為 k 則

(i) 若 $i = j$ 則可以一佈於 S 的 q 階右斜幻方母數為 k 者代之。

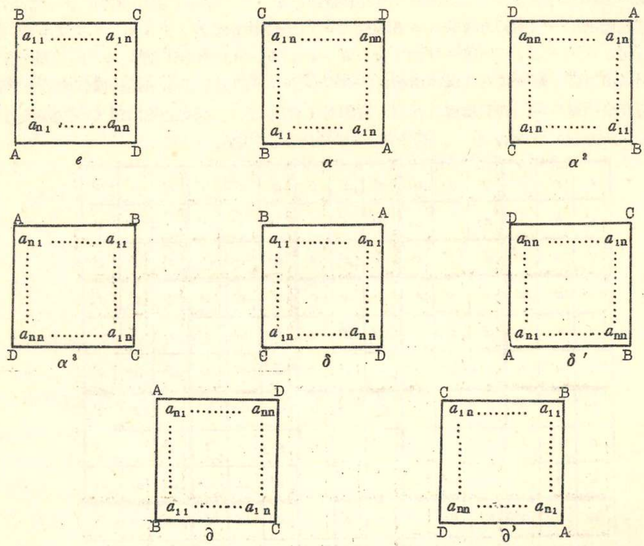
(ii) 若 $i + j = n + 1$ 則可以一佈於 S 的 q 階左斜幻方母數為 k 者代之。

(iii) 若 $i \neq j$ 且 $i + j \neq n + 1$ 則可以一佈於 S 的 q 階行列幻方母數為 k 者代之。

據 (i) (ii) (iii) 即可得一佈於 S 的 pq 階幻方。

此為一重要定理，其原理可參看前之說明，不再加詳證。

如果已經構製成一佈於 S 的 n 階幻方，是否可直接經過轉、翻等運動而得另一佈於 S 的 n 階幻方？由群之理論，我們知道一正方形在空間的一切 rigid motions 構成一群（特稱為 octic group ），它的八個元素分別是：



又由觀察可易知，若S_n 為佈於S的n 階幻方則 S_n 經過上述八種 rigid motions 的任一種 motion 乃得一佈於 S 的 n 階幻方，且母數相同，故我們得到下一定理：

Theorem 25. 設 S_n 為佈於S的n 階幻方，則將S_n 經任一 rigid motion （如上定義）乃得一佈於S的 n 階幻方且同母數。（註：將敘述中的幻方改為行列幻方則亦成立，又改為右斜幻方或左斜幻方呢？）

對於任意交換群G其$\mathscr{E}_n$ 如何求出？其結構如何？我將在下面的幾個定理中討論；當然我對於這些發現並不滿意，因為它還無法確切地求出$\mathscr{E}_n$ 中的元素，歡迎有興趣者繼續研究。

Theorem 26. (i) 命 $K_n=\left\{\begin{Bmatrix} a\cdots a \\ \vdots \quad \vdots \\ a\cdots a\end{Bmatrix}=k_n \mid k_n\right.$ 為佈於體 $\langle S\,;\,+\,,\,\circ\rangle$ 之n階幻方，$\left.a\in S\right\}$ 則 $\langle K_n\,;\,\star\rangle$ 為 $\langle\mathscr{E}_n\,;\,\star\rangle$ 之 normal subgroup 且 $\langle K_n\,;\,\star\rangle$ 為 $\mathscr{E}_n$ 佈於S之子空間。

(ii) $\langle K_n\,;\,\star\rangle$ 與 $\langle S\,;\,\star\rangle$ 同構。

proof： (i) 因 $S\neq\phi$ 故 $K_n\neq\phi$，任二 k_n ，$'k_n\in K_n$ 命 $k_n=\{p\}_n$ $'k_n=\{q\}_n$其中 p ，$q\in S$ 則 $k_n\star(-'k_n)=\{p\}_n\star\{q\}_n=\{p-q\}_n$ ，因 p ，$q\in S$ 故 $p-q\in S$ 因此 $\{p-q\}_n\in K_n$ ，$\langle K_n\,;\,\star\rangle$為$\mathscr{E}_n$ 之子群，又因 $\langle S\,;\,+\rangle$ 為交換群故 $\langle K_n\,;\,\star\rangle$ 為 $\mathscr{E}_n$ 之 normal subgroup。

因 $\langle K_n\,;\,\star\rangle$ 為 $\mathscr{E}_n$ 之子群，又任一 $a\in S$ 則 $akn=a\{p\}_n=\{a\cdot p\}_n$ 而 $a\cdot p\in S$ 故 $akn\in K_n$，故 $\langle K_n\,;\,\star\rangle$ 為 $\langle\mathscr{E}_n\,;\,\star\rangle$ 之子空間。

(ii) 作函數 $f:K_n\to S$ ，$\forall k_n\in K_n$ 則 $f(k_n)=f(\{p\}_n)=p$ ，此函數顯然為一對一且映成，又任任 k_n ，$'k_n\in K_n$ 則 $f(k_n\star{}'k_n)=f(\{p\}_n\star\{p\}_n)=f(\{p+q\}_n)=p+q=f(\{p\}_n)+f(\{q\}_n)$ 故 $\langle K_n\,;\,\star\rangle$ 與 $\langle S\,;\,+\rangle$同構。

Theorom 26.1　如果S爲有限群則$|\mathcal{S}_n| \geq |G|$

Corollary.　$<K^2 ; \bigstar> \cong <\mathcal{S}_2 ; \bigstar> \cong <S ; \bigstar>$

Theorem 27.　設H爲S之子群，則一切佈於H之n階幻方亦爲$\mathcal{S}_n$之子群。

Proof：設一切佈於H之n階幻方集合爲$'\mathcal{S}_n$，則因$H \fallingdotseq \phi$故$'\mathcal{S}_n \fallingdotseq \phi$，任二$kn$，$'kn \in {'\mathcal{S}_n}$命$kn = \{a_{ij}\}_n$，$'kn = \{a_{ij}\}_n$則

$kn \bigstar (-'kn) = \{a_{ij}\}_n \bigstar \} - 'a_{ij}\}_n = \{a_{ij} - 'a_{ij}\}_n$。因$kn$，$'kn$皆爲佈於$H$之$n$階幻方故$a_{ij}$，$'a_{ij} \in H \ \forall_{ij}$，$1 \leq i$，$j \leq n$，於是$a_{ij} - 'a_{ij} \in H$故$\{a_{ij} - 'a_{ij}\}_n \in \mathcal{S}_n$即$k_n \bigstar (-'k_n) \in {'\mathcal{S}_n}$，又$'\mathcal{S}_n \subset \mathcal{S}_n$故$<'\mathcal{S}_n ; \bigstar>$爲$<\mathcal{S}_n ; \bigstar>$之子群。

Theorem 28.　命$T_{p(n)} = \{S_n \mid |S_n| = P$ for some fixed $P \in S\}$且$T_{p(n)} \fallingdotseq \phi$則

$<T_{p(n)}; \bigstar>$爲$<\mathcal{S}_n ; \bigstar>$之子群$\Longleftrightarrow P$爲群$S$中之單位元素。

Proof：(i)　$<T_{p(n)}; \bigstar>$爲$<\mathcal{S}_n ; \bigstar>$之子群$\Longrightarrow P = e$，$e$爲$S$之單位元素。

因$<T_{p(n)}; \bigstar>$爲$<\mathcal{S}_n ; \bigstar>$之子群，故任二$S_n$，$'S_n \in T_{p\ n}$

則$S_n \bigstar (-'S_n) \in T_{p(n)}$。設$''S_n = S_n \bigstar (-'S_n)$故

$|''S_n| = |S_n \bigstar (-'S_n)|$，因$''S_n \in T_{p(n)}$故$|''S_n| = P$

由Theorem 3. 可知$|S_n + (-'S_n)| = e$；故得$P = e$

(ii)　$P = e \Longrightarrow <T_{p(n)}; \bigstar>$爲$<\mathcal{S}_n ; \bigstar>$之子群

任二S_n，$'S_n \in T_{p(n)}$則命$''S_n = S_n \bigstar (-'S_n)$故$|''S_n| = |S_n + (-'S_n)|$

$= e$故$|''S_n| \in T_{p(n)}$即$<T_{p(n)}$；即$<T_{p(n)}; \bigstar>$爲$<\mathcal{S}_n ; \bigstar>$之子群。

綜合(i)(ii)Theorem 28.得證。

Theorem 29.　$\forall_{p,q} \in S$，$p \fallingdotseq q$　$T_{p(n)} \fallingdotseq T_{q(n)}$

Proof：(i)　$p \fallingdotseq q$　$T_{p(n)} \fallingdotseq T_{q(n)}$：

設$T_{p(n)} = T_{q(n)}$則$\forall S_n \in T_{p(n)}$　$S_n \in T_{q(n)}$

因$S_n \in T_{p(n)}$故$|S_n| = P$同理$|S_n| = q$故$p = q$

(ii)　$T_{p(n)} \fallingdotseq T_{q(n)}$　$p \fallingdotseq q$

設$p = q$即得$T_{p(n)} = T_{q(n)}$。綜合(i)(ii) Theorem 29得證。

Theorem 30.　對於某一$n \in N$則$\bigcup_{p \in S} T_{p(n)} = \mathcal{S}_n$

Proof：(i)　$\bigcup_{p \in S} T_{p(n)} \subset \mathcal{S}_n$

$T_{p(n)} = \{S_n \mid |S_n| = P$　for Some　$P \in S\}$故$T_{p(n)} \subset \mathcal{S}_n$於是

$\bigcup_{p \in S} T_{p(n)} \subset \mathcal{S}_n$

(ii)　$\mathcal{S}_n \subset \bigcup_{p \in S} T_{p(n)}$

$\forall S_n \in \mathcal{S}_n$必有$|S_n| = q$而$q \in S$故$S_n \in T_{q(n)}$

而$T_{q(n)} \subset \bigcup_{p \in S} T_{p(n)}$　故$S_n \in \bigcup_{p \in S} T_{p(n)}$於是

$\mathcal{S}_n \subset \bigcup_{p = S} T_{p(n)}$

綜合(i)(ii) Theorem 30得證。

在Theorem 28.中有一條件爲$T_{p(n)} \fallingdotseq \phi$，根據以前的定理，我們知道當$n \in N - \{2, 3\}$則$T_{p\ n}$恆不等空集合，因此Theorem 28. Theorem 29. 及Theorem 30. 得出一重要結果，即我們可以把群$\mathcal{S}_n$($n \in N - \{2, 3\}$中的元素來分成一塊一塊地，每一塊與每一塊都無相同元素；其中以S中單位元素e分出來的子集恰爲$\mathcal{S}_n$的子群，其它的均不是。

Theorem 31.　設S_n爲佈於有限S的n階幻方，$\forall p$，$q \in S$且$p \fallingdotseq 0$，$q \fallingdotseq 0$則$|T_{p(n)}| = |T_{q(n)}|$

Proof：　顯然$T_{p(n)}$及$T_{q(n)}$皆爲有限集合，定義一函數$f : T_{p(n)} \rightarrow T_{q(n)}$爲$\forall S_n \in T_{p(n)}$，$f(S_n) = (p^{-1}q)$

S_n （因｜$(p^{-1}\cdot q)S_n$｜＝$(p^{-1}\cdot q)$｜S_n｜＝q，故$(p^{-1}\cdot q)S_n\in T_{q(n)}$）

(i) f為一對一：

設$S_n\neq{}'S_n$ 則$f(S_n)=(p^{-1}\cdot q)S_n$，$f('S_n)=(p^{-1}\cdot q)'S_n$

那麼若$(p^{-1}\cdot q)S_n=(p^{-1}\cdot q)'S_n$ 則因$p^{-1}\cdot q\neq 0$故根據Vectorspace之理論得出

$S_n={}'S_n$ 矛盾故f為一對一。

(ii) f為映成：

$\forall S_n\in T_{p(n)}$ 則可得一$(q^{-1}\cdot p)S_n$ 而因｜$(q^{-1}\cdot p)S_n$｜＝$(q^{-1}\cdot p)$｜S_n｜

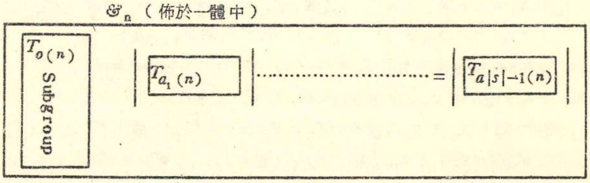
$=p$ 故$(q^{-1}\cdot p)S_n\in T_{p(n)}$，又$f((q^{-1}\cdot p)S_n)=(p^{-1}\cdot q)[(q^{-1}\cdot p)S_n]$

$=S_n$ 故f為映成。

綜合(i)(ii)得出｜$T_{p(n)}$｜＝｜$T_{q(n)}$｜如果$p\neq 0$且$q\neq 0$

Theorem 31. 說明如果於一有限體中的話，則所分出來一塊一塊非0為母數者，其中元素的個數都相等，這是一個很surprise 的結果！圖之如下：

$\mathscr{S}_n$（佈於一體中）



函數G_n：$\mathscr{S}_n\to S$ 其定義為$\forall S_n\in\mathscr{S}_n$，$G_n(S_n)=|S_n|$，又由Theorem 3 知$G_n(S_n\star{}'S_n)$
$=|S_n\star{}'S_n|=|S_n|+|{}'S_n|$ 故函數G_n為一 homomorphism，由homomorphism之理論可得下一定理：

Theorem 32. 設$K_n=\{p\mid p=|S_n|,\ S_n\in\mathscr{S}_n\}$ 則$\langle K_n\ ;+\rangle$為S之子群

注意：(i) 由Theorem 16. Theorem 18. Theorem 19. 及顯然的$K_1=S$即可得若$n\in N-\{2,3\}$則$K_n=S$，當然亦$K_n\subset S$。

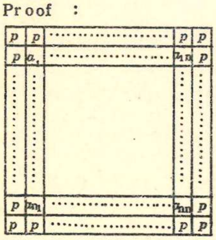
(ii) 特別是$K_2\subset S$及$K_3\subset S$。

下面將敍述兩個有趣的定理：

Theorem 33. 幻方加層定理：

設S_n為佈於S的n階幻方，設存在一$p\in S$ s.t. $np=|S_n|$ 則吾人可於此S_n的n^2 幻方格四邊四角再擴充一格，使變為$(n+2)^2$幻方格且均於加建的空格內填入P，則此$(n+2)^2$幻格格即為一佈於S的$n+2$階幻方，且母數為$(n+2)P$

Proof ：



參看左圖，試觀其加建後的第一列共含$n+2$個P，故經運算後的結果為$(n+2)P$同理第$n+2$列第一行，第$n+2$行亦皆為$(n+2)P$。而於其它的行列由左圖可看出均為$|S_n|+2P=nP+2P=(n+2)P$，故Theorem 33 得證。

至於一般的幻方加建法則很繁，而且應用價值少，故予略去。

Theorem 33.1. 設$'S_n$表按Theorem 33之方法所構製得的加建幻方則$'S_n$之四邊四角可任意加建m層（$m\in N$），且於空格內皆填入P（其定義同上）則亦得一佈於S之$(n+2)+2m$階幻方。

Proof ：(i) 設$m=1$因$P^{n+2}=|S_{n+2}|=|{}'S_n|$ 故由Theorem33得知$m=1$成立。

(ii) 設$m=k$成立，故$P^{(n+2)+2(k-1)}=|S_{(n+2)+2(k-1)}|$且$|S_{(n+2)+2k}|=|S_{(n+2)+2(k-1)}|\cdot P^2$

(iii) 當$n=k+1$時 $P^{(n+2)+2k}=P^{(n+2)+2(k-1)}\cdot P^2=|S_{(n+2)+2(k-1)}|\cdot P^2=|S_{(n+2)+2k}|$

由(i)(ii)(iii)得知$\forall m \in N$ Theorem33．1成立。

Theorem 34． 幻方減層定理

設S_n爲佈於S的n階幻方且$n \geq 3$若其第一列，第n列，第一行，第n行皆爲某元素P，則可將上述諸行去掉而成一佈於S_n的$n-2$階幻方。

下面的一系列定理將討論到運算表與幻方的關係，對於某一特定階的幻方提供出簡捷的求法，其中的奧妙敬請讀者細細玩味。

一般的運算表如下，其橫線上的元素$a_1 \cdots\cdots a_n$與直線左側的元素$a_1 \cdots\cdots a_n$順序是相同的，不過在以下的討論中，並不要求這種特性。有一有限群G的運算表中其橫直線內的元素恰有n^2（$n=|G|$）個，我們可將其按原順序填入一n^2幻方格中，這樣填好後的n^2幻方格以記號 $T(G)$表之。

$S=\{a_1 \cdots\cdots a_n\}$

$\circ$	$a_1 \cdots\cdots$	a_n
a_1	$a_1a_1 \cdots\cdots$	a_1a_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_n	$a_na_1 \cdots\cdots$	a_na_n

Lemma：設$<S;+>$爲一有限交換群，則 $T(S)$爲佈於S的$|S|$階行列幻方。

Proof： 由群之消去性知此n^2幻方格中每列及每行所含的元素皆爲S中相異的$|S|$個。又由S具交換性，故此n^2幻方格的每行，每列諸元素經運算後皆爲定值。

Theorem 35 設$<S;+>$爲一有限交換群且$S=\{a_1, \cdots\cdots, a_n\}$恰含$n$個相異之元素，則 $T(s)$ 爲佈於S的n階幻方 $\Longleftrightarrow$ $p=a_1+\cdots\cdots+a_n$爲S中之單位元素。

Proof: (i)設$P=a_1+\cdots+a_n$爲S中之單位元素。

由Lemma 知 $T(S)$爲一行列幻方且其母數爲$P=a_1+\cdots+a_n$。

又在此n^2幻方格中的右斜對角線上諸元素，恰爲在原運算表中的橫線上方諸元素每個取一次及直線左方諸元素每個亦取一次的運算和，故其爲 $2(a_1+\cdots+a_n)=2P$，因P爲S中之單位元素，故$2P=P$， $T(S)$爲一右斜幻方。

同理在左斜對角線上與右斜對角線上情況相同，其諸元素的運算和亦爲P，故 $T(S)$爲佈於S的n階幻方。

(ii)設 $T(S)$爲佈於S的n階幻方。

觀察此n階幻方格中每行及每列的諸元素經"＋"運算的結果均爲定值$a_1+\cdots+a_n=P$；又其右斜及左斜對角線上之元素經"＋"運算的結果爲$2(a_1+\cdots+a_n)=2P$

已知此n^2幻方格爲一幻方故 $P=2P \Longrightarrow P$爲S中之單位元素。

綜合(i)(ii) Theorem 35 得證。

Theorem 35．1． 設 $T(S)$爲佈於S的n階幻方，則互調其任兩列或兩行亦得一佈於S的n階幻方。

Proof ： 諸者可自行繪圖觀察。

由Theorem 35．1 可以很簡單地把凡型如Theorem35中所述的幻方予以變換，其法共有$n!\times n!$種，不過這並不代表我們可以得到$n!\times n!$個不同的幻方，乃因其中有重複之故。

由Theorem 35可推得下面一重要定理：

Theorem 36． 設$<S;+>$爲一有限群且$|S|$爲不等於2的素數，則 $T(S)$爲一佈於S的$|S|$階幻方。

Proof ： 由Lagrange定理知任一素數order的群皆爲cyclic group，當然也爲一交換群。設任一$a\in S$且a不爲S中之單位元素。則$S=\{a^n | n\in I\}$， $P=a^0+\cdots+a^{n-1}=$

$=a^{\frac{(|s|-1)|s|}{2}}$。因$|S|$爲不等於2的素數，故$|S|$亦爲奇數，命$|S|=2r+1$（$r\in N$），

$P=a^{\frac{(|s|-1)|s|}{2}}=a^{r\cdot|s|}$ 因$r\cdot|s|$(mod$|s|$)故$a^{r\cdot|s|}=a^0$爲S中之單位元素，根據Theorem35即得 $T(S)$爲佈於S的$|S|$階幻方。

Theorem 35.1 中所用的對調法使我們懷疑在一般的幻方中如何？下面的一系列定理即討論它的一般調換法則，其技巧是極具趣味的。

Theorem 37. 設 S_n 爲佈於交換群 S 的 n 階行列幻方，則任互調其兩列或兩行乃得一佈於 S 的 n 階幻方，且其母數相同。

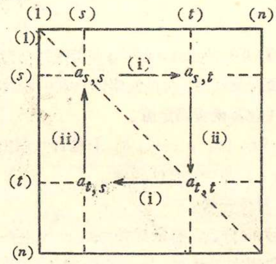
Proof： 甚明，證略。

Theorem 38. 設 S_n 爲佈於 S 的 n 階右斜幻方，若我們按下列 (i)(ii)（或 (ii)(i)）的順序調換 S_n 中的行列，則所得的乃爲一佈於 S_n 的同母數 n 階右斜幻方。

(i) 互調第 s 行與第 t 行

(ii) 互調第 s 列與第 t 列

Proof: 由 Theorem 37 知任一右斜幻方經 (i)(ii)（或 (ii)(i)）手續後仍得一佈於 s 的同母數 n 階幻方，至此我們所欲證的僅爲在兩對線上的情況如何？下圖表明在 (i)(ii) 手續中右斜對角線上兩個受到"波及" a 及 a 的遷移情況，結果它們正好對調了位置，因此右斜對角線上的結果不因 (i)(ii) 手續而變，Theorem 38 得證。

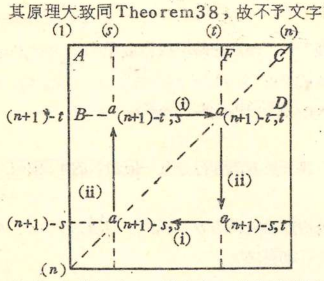


Theorem 39. 設 S_n 爲佈於 S 的 n 階左斜幻方，若我們按下列 (i)(ii)（或 (ii)(i) 之順序調換 S_n 中的行列，則所得的乃爲一佈於 S_n 同母數的 n 階幻方。

(i) 設任一第 s 行與第 t 行互換

(ii) 第（$n+1$）$-s$ 列與第（$n+1$）$-t$ 列互換。

Proof: 其原理大致同 Theorem 38，故不予文字說明僅以下圖表之，



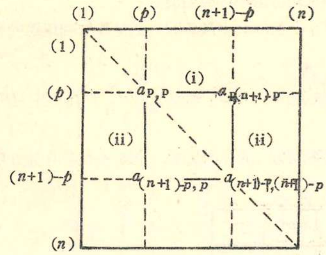
注意 $AB=CD=CF$ 是（$n+1$）$-t$ 的來源（WHY？）。

Theorem 40. 設 S_n 爲佈於 S 的 n 階幻方，若我們按下列 (i)(ii)（或 (ii),(i)）之順序調換 S_n 中之行列，則所得的乃得的乃爲一佈於 S_n 的同母數 n 階幻方。

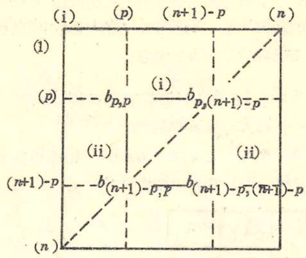
(i) 將第 p 行與第（$n+1$）$-p$ 行互換

(ii) 將第 p 列與第（$n+1$）$-p$ 列互換

Proof: 原理大致同上，僅以兩圖證明之，其中第一圖表在右斜對角線上兩個受到波及的元素 a 與 $\boldsymbol{a}$；第二圖則表明左斜對角線上兩個受到波及的元素 b 與 $\boldsymbol{b}$。又，第 p 列與第（$n+1$）$-p$ 列有何關係？第 p 行與第（$n+1$）$-p$ 行有何關係？



第　一　圖



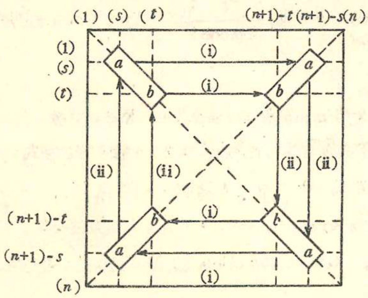
第　二　圖

Theorem 41.　設 S_n 爲佈於 S 的 n 階幻方，若我們按下列 (i)(ii)（或 (ii)(i)）之順序調換 S_n 中的行列，則所得的乃爲一佈於 S 的同母數幻方。

(i) 連續第 s ,…, t 行且 $t\leq\frac{n}{2}$ 將第 s 行與第 $(n+1)-s$ 行互換，…，將第 t 行與第 $(n+1)-t$ 行互換。

(ii) 將第 s 列與第 $(n+1)-s$ 列互換；…，將第 t 行與第 $(n+1)-t$ 行互換。

Proof:



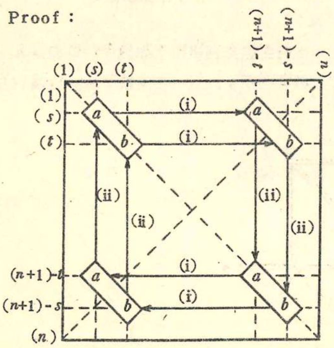
←表右斜對角線。左斜對角線時只須將圖中之箭頭方向相反，並將套紅處改在右斜對角線之上方。

Theorem 42.　設 S_n 爲佈於 S 的 n 階幻方，若我們按下列 (i)(ii)（或 (ii)(i)）之順序調換 S_n 中的行列，則所得的乃爲一佈於 S 的同母數 n 階幻方。

(i) 連續第 s ,…, t 行且 $t\leq\frac{n}{2}$ 將第 s 行與第 $(n+1)-t$ 行互換，…，將第 t 行與第 $(n+1)-t$ 行互換。

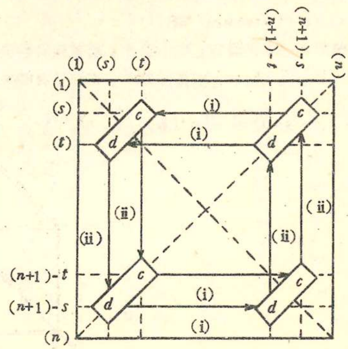
(ii) 將第 s 列與第 $(n+1)-t$ 列互換，…，將第 t 列與第 $(n+1)-s$ 列互換。

Proof:



↑

表右斜對角線



↑

表左斜對角線

得了以上的“利器”，我們就可以對任一已知的幻方予以變換，而使求幻方的步驟節省很多。

傳統連續正整數的幻方塡法，對抽象幻方的構製亦提供了簡捷的方法，下面本文中最後的一個定理即利用這些豐富的結果，筆者假定讀者已具有這方面的基礎。

Theorem 43. 設 $\{a_{ij}\}_n$ 爲佈於整數系加法群的幻方，則對於任一交換群 S 內的元素 p，$\{P_{ij}^{a_{ij}}\}_n$ 爲一佈於 S 的 n 階幻方，且其母數爲 $P^{|\{a_{ij}\}_n|}$。

Proof： 今舉一例說明之，如下左圖爲一最簡單的3階連續正整數幻方，則右圖即爲一佈於交換群 S 的3階幻方而 $P\in S$；顯然其母數爲 P^{15}。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

P^8	P^1	P^6
P^3	P^5	P^7
P^4	P^9	P^2

末了我附有幾個研究問題，給有興趣的同學做做看：

(1) 設 S 爲 finite abeliangroup，若 $|S|$ 爲偶數則存在一 $a\in s$，$a\neq e$ 而 $a^2=e$。這一事實對於固定母數構製一佈於 S 的奇數（不爲3）階幻方有何便利？試把它推廣之。

(2) $\dfrac{I}{(\bmod n)}$ 對加法成群，試證若 n 爲奇數（$n\neq 1$，why？）則 $T\left(\dfrac{I}{(\bmod n)}\right)$ 爲一幻方。又當 n 爲偶數或改爲乘法群時 $T\left(\dfrac{I}{(\bmod n)}\right)$ 是否爲一幻方？

(3) 設群 S 的階爲不等於2的素數，則我們可於一 $|S|^2$ 幻方格中的第一行均塡入某一 S 中的元素 a_1，………，第 $|s|$ 行皆塡入 S 中的元素 $a_{|s|}$；試證它可構成一幻方，且其所有的行列調換共有 $2n!$ 個不同的型式。

(4) 證明若 abelian group S 的 order 爲不等於2的素數則 $|\mathscr{S}_{|s|+2}|\geqq|s|\cdot|\mathscr{S}_{|s|}|$

(5) 證明 $|T_{e(n+2)}|\geqq|T_{e(n)}|$ for any abelian group S and $n\in N$，e 爲單位元素。

(6) 同(5)證明 $|T_{e(n+1)}|\geqq|T_{e(n)}|$ 若 n 爲偶數。（Hint：Theorem 33 是不夠用的，想想看在偶數行列的中間怎樣加一個）。

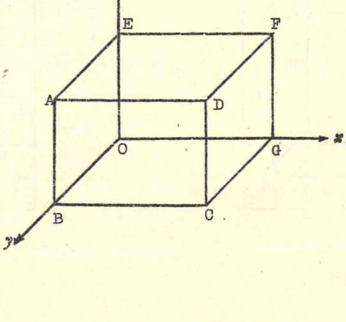
(7) 推廣(6)，當 n 爲奇數時。

(8) 試最多在20分鐘內找出所有佈於 group $S=\{a,b,c\}\mathscr{S}_3$ 的元素。（Hint：共有27個）。

(9) permutation $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&2&4&1&5\end{pmatrix}$ 中有兩個特性，即(i)僅有一個元素映到其本身，(ii)僅有一個元素與其函數値之和爲 $6+1=7$；如果將其結合 $(25)(31)$ 則此特性乃保持不變，其原因何在？試推廣之。
（Hint：利用Theorem 38）

(10) 如果我們要塡一立體幻方（如下圖），則首先要解決的是：立體上對角線的坐標如何表出？如圖中的 OD 是 a_{ijk}，$i=j=k$，試求出其它對角線 BF，EC，AG 坐標的表示法。（有興趣的話，試於一二元群中塡一立體幻方）。

(11) 證明：$|T_{p^s}(sn)|\geqq|T_p(n)|^{|s|^2}$，$s\in N$。



聽我細訴

·影·

××：

首先我要告訴你的，我們的一切總算是過去了，往事已如一縷縷的輕烟飄逝在天際，已如一陣陣的清風，吹過無際的原野，過去的就讓它過去了吧！請你放心；我也不會怨恨你的，因爲我們過去的只是一場夢而已，如今我的夢已經醒了。你有你的抉擇，只願你的抉擇是正確的，因爲她是一箇有智慧的女人，而且，她更年青美麗。所以我也就沒有什麼感到哀傷的地方—雖然我知道過一生歡笑將永離我而遠去。

請你原諒我，我不是有意挑起你的囘憶，假如你沒有忘掉那些日子的話，幾年來的友情，也許還有許多地方值得囘憶。囘憶，雖然可以給人帶來少許的快慰，但又何嘗不是給人帶來無限的痛苦與煩惱呢？

今天，我雖然不願思念，但思念却離不開我的心頭；我雖然不要哀傷，但往事却又促成我無限的哀傷；但是，只要你能夠快樂的話，我什麼的痛苦都願意承受；你也不必擔心，我會珍重着自己的。

人生的旅途，本來就像在演戲一般，有的是扮演喜劇的主角，有的是扮演悲劇的主角；只不過現在你扮演的是喜劇的角色，而我扮演的是悲劇的角色而已，但是相信你也知道，當劇終人散時，我們又有什麼不同呢？正因爲如此，我還有什麼企求呢？

我自己也深深知道，一箇人如果要以痛苦的心情囘憶過去，不如以快樂的心情憧憬將來；但是一箇曾經在河裏失足的人，就是看到一滴水也會感到心驚胆顫的；啊！感謝幾年來你所給予我的太多了。多少個甜蜜月夜相伴，不知你還否記住那似眞似假的海誓山盟（在一年前也許還是眞的），但是那一切的一切，都已經離我而遠去；如今，只有那夜來的殘灯，伴着的孤影。從此，我再也看不見你的倩影，再也聽不到你的笑聲和那悅耳的歌聲……

人生本來就是一場夢，但如今，我的夢畢竟是醒了；當我夢醒之後，我是如何的痛苦，也許你是不會知道的。「春蠶到死絲方盡」，早知如此，悔不當初。

自從一年前我知道了你和那位小姐的消息之後，悲愁就襲上了我的心頭，這些日子來的每一個夜裏，我都失眠了；每當輾轉反側無法入眠時，就讓我想起了幾年來的情與愛；我曾想嘗試着去忘掉你，可是你的影子却已深深地嵌在我的心底處使我無法抹煞掉—因爲你是我愛的第一人。可是；世事的變化太大了，如今；却失去了你，從此我也就失去了一切……但是，我又有什麼話能向誰訴說？

幾許的甜酸苦辣，讓我去咀嚼、忍受、低徊和囘憶；囘首前塵，這是我廿年來最痛苦的一段時間。因爲廿年來，只有你給我留下美麗的憶念，然而却是這般的苦楚。多少年來，我只有這個夢，可是如今我已經不取渴望夢的重溫與再現；僅僅的一次夢足夠使我滿足了；足以我在的心炙底處銘刻下美麗的雕像。

在現在一切都已經太遲了，但是我要祈求你，忘記那已經結束了的往事吧！像忘記那雨後七彩繽紛的長虹，黃昏的雲霞，只是落日的殘疊，仲夏的飛絮；不過像眼前輕渺的幻影，陽春匆匆離去，留下那殘紅片點，忘掉它吧，只要我不忘記你，而讓我經常去懷念你也就夠了。

別了，但願你因離開我而快樂，我也因遠離你而寧靜；原諒我對你 吐出哀衷，我也不敢苟求你永遠忘得我，只要你能偶而憶起有着對你癡情的朋友—曾爲你支付出她的情感，那我就會心滿意足了，別了……永別了！彼此各自珍重前程吧！祝

快樂

爲你祝福的人留筆

我以爲在各種科學的領域裏，科學家僅管在闡釋眞理的方式互異，然就追求永恆的原則則一。只不過在數學上顯得較爲直接和具體罷了。同時我也常常猜測是否可以利用數學的同構性質投射到其他不同的科學上去，尋求宇宙統一和諧的美，那種境界，也許便是我夢寐良久的。

「喜歡思考」，構成我何以學數學的最有力理由，另外也與我所定義的幸福有關，我知道這種看法是相當低調的，但若知道我先則滿腹秉善之誠（其實不夠成熟），繼則險因迷於數學之客觀性及非人格性而作遁世之想，最後則以不可知論者終便不復驚訝了。

這個環境最令我感到滿意的是它提供了可觀的閒暇，這些閒暇使我得以從容不迫地在其他各款書籍中與古人和智慧人物建交，僅管我的收穫也不過是虛幻的滿足感而巳，可是它却充分地滿足了我對很多事物的好奇心和神秘感，這分滿足一直有力地支持我的勇氣和信念。

註一：「學歷無用論」：協志叢書。

註二：「朱利安赫胥黎」語。

焦點

佚名

她是班上的光與火。光，溫暖了你、我、他的心靈；火，灼傷了你、我、他的友情。猜忌、漠視、苦笑……存在你、我、他之間，她却含著勝利的微笑。

初徵、立解、四書、敎概、英文……拋棄了，帶來的祇是歌廳、電影院、校園、撞球場、圖書館……落寞的影子。

懊悔、惆悵、分離……激進了成熟。墮落、上進、活躍降臨在你、我、他之間，而她却徬徨了。

年青無知……換來的該是夢醒與諒解。何年？何月？何日？僵持將逝去，洋溢著，祇是那馥馨的同窗之情。

科學新知

墨友

※光線挖掘隧道：

一種強光線，可以像一把熱刀鎔化牛酪一樣鎔化岩石，現正由西屋公司的科學家蘇馬徹博士（Dr. B. W. Schumacher）在發展中。儀器射出一道狹窄的，幾英吋長的電子光，看來像一根白熱針一樣，當該裝置距離表面四吋時，光線即迅速刺入岩石深達四吋，它的用途呢？蘇馬徹博士說可以挖掘隧道，石坑，石礦。他認爲，靜悄悄地挖掘市街，可能是特別好。

從這貝氬射器（Argon laser）射出的雷射光，可把訊號送入一顆測地學研究衛星，美國航空太空計劃爲未來長矩離發展通訊系統的部份。

※探測地下廢墟的儀器

耶魯大學人類學敎授柯氏（Michnel. D. Coe）；使用一具重量很輕的鉋磁力計，在墨西哥的奧爾梅克廢上，在幾天之內挖出了四座突出的紀念碑。該儀器指出有多達伍百具以上的紀念碑，仍然藏匿在奧爾梅克文化的政治中心，桑洛倫梭（San Lorenzo）的地面下，在使用該磁力計之時，柯敎授估計只有幾百件紀念物殘留下來。

新的發現物中包括一塊光滑直豎的儀式用的板石，從一顆花崗石人頭取下來的一頂盔甲的後部，一塊十噸重的橢圓形巨塊，還有柯敎授所稱之爲：「在聖洛倫梭發現的最完美的彫像，奧爾梅克雨神」這蹲三呎高的彫像，除開其後部是空虛的之外，都是完整的。這些被埋在數百噸與雪花岩成分不同的岩石之下，磁力計毫無困難地區別雪花岩和指明其位置。

數學系一年

洪海

我喜歡思、喜歡想，對於發生在我週遭的人情世故，我都有研究的興趣。許多無謂的爭端常常起於人類的不肯「三思」。只要當事人肯多想一點，我們在這星球上便會活得更愉快。我深信利用教育和人事制度可以逐步達到這個目標。可是目前的教育不教人思想，不教人尋求眞理。我們習於安逸，熱情隱藏，變得小心翼翼，變得非常理智，他變得非常庸俗。

在很多種類型的人中，我獨喜略帶傻氣而不耽於幻想的人。除此之外，過於實際和竟日幻想的常常是一丘之貉，遲早他們都會由此（極）端渡向彼端，或由彼端渡向此端，陰晴不定，其實是一種性格的反映而已。這種人常常把這世界批評得烏煙瘴氣，一無是處，彷彿活着的都成了他的礙眼物，奇怪的是：爲何他活得那麼有興緻？略帶傻氣，可以使他們對這世界充滿着好奇心和探究的勇氣，這構成他們從事建設性工作的起步。不耽於幻想，可以使他們腳踏實地，埋頭苦幹，不輕易不滿現實，竭力尋求改造現實的最佳方式，逐步地向目標前進。

對於未來，我是一個不可知論者，世界是否一如泰戈爾所預言的「未來的一定比現在好」，這始終是我所深感困惑的。近代工業的集體化制度已造成一種可怕的趨勢　否定個人價值。於是學歷可以無用（註一），人可以拿十萬美金年薪然後跳樓自殺；科學家可以僅僅爲了研究的環境和方便而甘願爲虎作倀？難道像愛因斯坦那種具有世紀眼光的科學家已經繼起無人？或者他們是在準備有一天坐在登月小艇上憐憫鄙棄他的同類。每天你所接觸到的現代化的字眼背後，你似乎很容易想像一個這樣的世界：「如果你所需的睡眠七個鐘頭又五十九秒已夠，你便不能多睡或多躺一秒鐘，否則背部肌肉便會腐爛 0.1cc 你血壓的多寡和血管的硬度叫你僅可吃五塊肉，假如你多吃半塊，血壓便上升 10^{-9}cm，你最好不要去拜訪朋友，因爲話匣子一開，可能使你的喉嚨破損 10^{-30}，或則那麼一天人類已經找到心理學上所謂的快感中心，於是反正動則得咎，乾脆學豬一樣，竟日躺着站着，終其一生。一群愛思考的人，被醫生認爲勢必腦充血而提早死亡，經多次勸誡不聽，竟因「撲滅瘟疫之名被捕入精神分析中心電療研究等等。……」近代人飽受工業文明洗禮和戰爭之摧殘後，尙有海明威的「失落的一代」可以喘息，沙特的「存在哲學」供以避難，如果世界眞變成了那個樣子，一旦人有了無可奈何之情緒時，他們該如何排遣呢？

截至目前，人類在科學上的成就已能有效地控制貧窮，一直被視爲引起戰爭的主要因素—飢餓—已經可以消滅，然而人類今日依然喘息在戰爭的陰影下，難道人類在知識領域的擴展反而使智慧的成長相形失色？科學的成就和人類的愚昧無知已替野心家扮演了兩場人類史上空前的大悲劇。今日傀儡還在，冷戰方酣，偏見仍熾。人類是否一如朱利安赫胥黎所說的：「我相信人類未來的歷史也會延長到像過去那樣長：也就是說如果由類人猿變成人類需要十億年，那麼人類與他的後裔之間至少也要有相當的十億年。」十億年對人類而言是相當奢侈的，除非他們明智且謹愼地選擇生存的方式，否則便難擔保捱過這個冬天。

物質文明發展到極致行將建立起來的烏托邦和對這一文明的反動可能產生的毀滅同是本世紀人類精神的危機，而共同的罪魁乃是思想的偏激和武斷。在這兩種惡勢力的冲擊之下，我始終在祈求寧靜和諧的生活態度—也許這正是我所謂的幸福。「我不以爲人在宇宙中或生存期間一定有什麼天賦的目標要去實現，也不認爲人非要達成某種令人滿意的目標不可，我只是相信這種目標可以被某些人所達成」（註二）。作爲一個不可知論者，我從未考慮到在未來的史家筆下，自己到底是怎樣的角色，雖則悲劇色彩的凝重常使我猶豫，但自始未嘗影響我的穩定和寧靜。在可預見的未來，「淨化」將是我人生的主要歷程，我極不想在未成熟之前汲汲於創造之途。這種頑固的態度使我不易受外來壓力的干擾，那股壓力是一種求新求變的學術壓力。我預料必須冒着「落伍」的危險，但依然堅持。

事實上以詩人著名，他被公認爲布洛克以後本世紀最偉大的俄國詩人。

當瑞典科學院於一九五八年十月二十三日通知巴斯特納克得獎的消息時，他在回電中曾以六個英文字「無限的謝意，感動，驕傲，慚愧」來表示他內心的感受，但是共黨頭目們却對他大加誣衊，並威脅他如果去領獎則不許他再回國，使得他不能親自領獎，就在他得到諾貝爾獎後的二年，巴斯特納克不幸因肺癌於一九六〇年五月三十日病逝！享年七十。

「齊瓦哥醫生」這本書的內容是以一位俄國富商之子尤利爲主，敍述他一生的遭遇，尤利的父親生活荒唐，在外另結新歡，棄家不顧，在母親早死後，尤利被寄養在一位大學教授葛羅米柯家，尤利喜愛文學和哲學，但是選擇了醫生作爲職業，葛羅米柯的女兒東妮亞，聰慧美麗，與尤利志趣相合，兩人相戀結婚，尤利也就是齊瓦哥醫生，於大革命後，寄望於新政權所曾許諾的諾言，所以未曾逃離祖國，誰知連年的內戰，民不聊生，當權者一旦擁有了他們所追求的權力後，便將人民拋在腦後了。尤利逐漸瞭解到這批人的本質了，但爲時已晚，幸好東妮亞的外祖父在西伯利亞瓦列基諾地方擁有大片礦產，雖然不知革命後仍屬於他們否，但由於尤利的異母兄弟——一個神秘的布爾什維克黨人的建議，他們一家還是決定搬到那兒了，爲的是在那兒可以避免黨的控制，以及改善生活環境。在瓦利吉諾的生活雖然清苦，但很自由，尤利於日常耕作之餘，重提起筆來寫詩，誰知有一天當尤利去附近城裏的圖書館借書的時候，看到了舊日的同事——護士拉若莎，她的丈夫現已成爲紅軍的司令員，可是他並不知道，夫婦倆已失去聯絡，兩人一見舊情復燃，此後尤利即常託辭前往拉若莎處，不幸一天當他策馬回家時，爲附近森林中的游擊隊擄去，因爲他們知道尤利是位醫生，而他們需要這樣的人，就這樣尤利連家中的妻子都未能通知，被迫隨著游擊隊東征西討，這時尤利思親心切，終於利用機會回到了家中，誰知人去樓空。東妮亞在尤利失蹤後，苦等不到，就和父親子女回莫斯科了，尤利後又回到莫斯科找尋他的妻子，不巧又是遲了一步；岳父和東妮亞已經帶著孩子離開俄國到巴黎去了，尤利雖然愛他的妻子兒女，但是對於祖國也有深厚的感情，幾經考慮後他留下來了，並與昔日門房的女兒結婚，又有了孩子，而東妮亞幾次來信促他出國團聚，他却始終未能成行，他猜想東妮亞已經改嫁了，雖然她來信並未提過，最後，尤利因心臟病突發而死了，死在他所愛的祖國，可憐死時沒有一個親人在身邊。

這故事發生的背景是一九一七年十月革命前，到二次世界大戰這一段時期的俄國，故事的發展用第三人稱，平敍法。這一段時間也是俄國社會變動得最大的時期，舊有的秩序被推翻，價值觀念被否定，個人的地位完全被抹殺，這故事的主角尤利是一個知識份子，標準的上流社會份子，但他並沒有躲在象牙塔裏，而是對於貧苦的百姓懷有深切地同情與關懷，所以他對於善於僞裝宣傳的解放者——布爾什維克黨人最初倘抱著很大的希望，革命後，尤利並不像其他上流社會人一樣逃往國外，而仍舊留下來，但親眼目睹的結果，使他逐漸認淸了他們本來的面目，藉著齊瓦哥醫生在革命前後精神與物質生活的比較，不禁使人懷疑這場革命是否值得，『在革命期中，你們曾看到，就像我們在前線所見的一樣，生活是終止了，全無人味，除去殘殺和死亡——世界上沒有其他活動。如果我們長命，能活到有機會讀這時期的編年史和回憶錄，我們會領悟到，在這五年或十年之中，我們所經驗的比其他民族在一百年中所經驗的還多。我不知道，人民是否會自己站起來，自動自發地前進宛如潮湧，或者，一切只是假人民之名行事。』這也就是本書被共黨頭目們攻擊的原因，因爲他暴露了他們醜陋的面目。

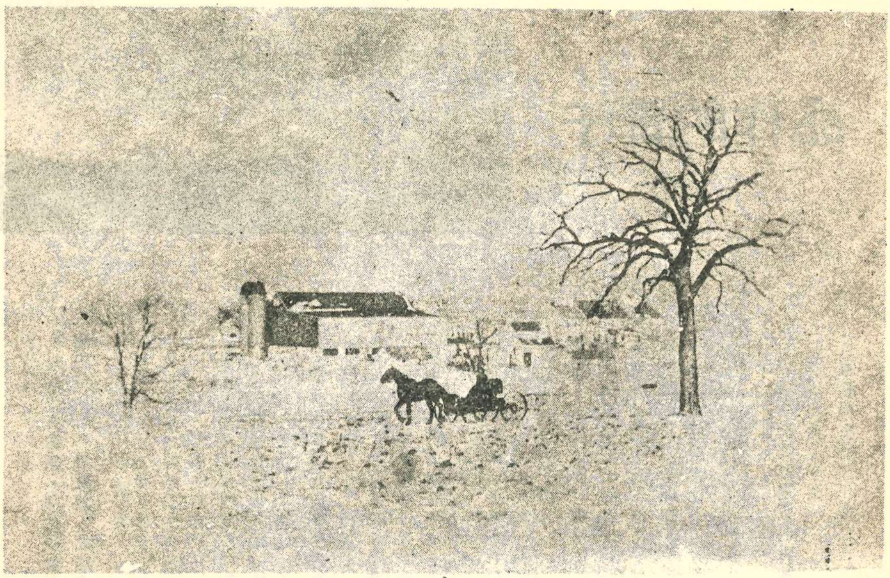
尤利的思想，無疑地是受到他舅舅的舅舅尼古拉·尼古拉也維支的影響，我們可以由他舅舅的一段話中，反映出尤利的人生觀，他說：「團體總是庸材的庇護所，只有個人才追求眞理，因而他們摒棄那些最不要眞理的人。世界上有多少事物值得我們盡忠呢？事實上少得很！我認爲一個人應當忠於不朽，那是生命的另一個說法，更有力的說法。」

書中的兩位女主角——拉若莎和尤利的妻子東妮亞，是二位截然不同的女性，雖然他們都熱愛家庭生活，都在不同的時期分享尤利的愛，然而她們二人在性格上却是完全相反的，在東妮亞寫給尤利的信中，我們可以瞭解這點：「她的性格恰恰和我對立，我生來就是要使生活簡單，尋求理智的解決；而她，把生活弄複雜，製造混亂。」

這本書不但故事動人，而且文筆非常優美，書中對於大自然的景色和季節的更迭都有著非常細膩的描寫，而且對話雋永，耐人尋味，每當我回想起書中的故事時，彷彿那一望無際的大草原，那夏日遍地金黃的麥田，以及冬天雪橇在冰上奔馳的叮噹鈴聲，都在我的眼前出現，而書中人物也像眞人般的具有個性，不禁使我對作者的寫作才華發出由衷的敬佩。

對於任何一部偉大的作品要作簡要的介紹，相信讀者看了是不會滿足的，因此我還是希望讀者們能親自欣賞原著的偉大之處。

最後，我有一個感觸，爲什麼別國的作家們能由動亂的時代中寫出周圍人們的心聲，使得全世界的讀者都能被書中的人物所感動，與他們同哭、同笑！而我們民族雖然比任何國家所遭受的苦難要深，却很少有作家從其中找尋題材，而公式化的「新鴛鴦蝴蝶派」又在大行其道，不知道戕害多少青少年的身心，難道現時中國沒有偉大的作品嗎？這是很值得我們加以探討研究的課題。



介紹一部偉大的作品

齊瓦哥醫生

寶長寧

當我第一次看完了「齊瓦哥醫生」這本書的時候，不禁對作者感到莫大的歉意，因爲這麼一部偉大的作品，以前却因我對他的偏見而始終未曾翻閱過。我以爲他之所以能獲得諾貝爾文學獎不過是評審委員們見著他的宣傳價值罷了。可是當我閱讀他的時候，才發現我以前的看法是多麼淺薄可笑，「齊瓦哥醫生」這本書的價值決不在此。我相信像我以前懷著同樣偏見的人不少，因此作爲一個忠實的讀者，我有義務將他介紹出來。

「齊瓦哥醫生」，全書約四十五萬字。原著於一九五七年在義大利出版，並獲得一九五八年諾貝爾文學獎，成爲二十世紀第二位獲得文學獎的俄國作家。

作者巴斯特納克（Boris Leonidovich Pasternak 1890-1960）一八九〇年生於莫斯科，父親名李奧，巴斯特納克（Leonid Osipouich Pasternak），是一名畫家，母名羅莎・考芙曼（Rosa Kaufman），是一名鋼琴演奏家。巴斯特納克生於這樣一個藝術家庭，有志於藝術創作本是極自然的事，他初習作曲，後入莫斯科大學及德國馬爾堡大學（Marhurg）修習哲學，第一次世界大戰時在烏拉山的一個工廠工作，革命後在教育部設於莫斯科的圖書館工作，他早年即開始寫詩，並於一九二一年出版了他的第一本詩集（Above the Barriers）此後又寫了幾部詩集及小說，當史大林執政時，因對作家們的控制日嚴，於是轉而埋頭翻譯，莎士比亞，歌德：等人的作品，如此一直達三十年之久，也就是這段時期內孕育了他那部震撼世界的鉅著——「齊瓦哥醫生」，在該書未出版前他

于青的作品

二、歸園—時間踏過去的古樓

（借友遊歸園，那是偏處在台南縣歸仁鄉的一處古蹟，惜久失修，業已殘破，
瞻古望今，不勝慨然，故誌之。）

被時代放逐之後，你便成爲時間的囚犯時時被鞭打着
直到再也不能忍受的痛苦，你於是垂滴了你的淚影
　剝落你的容顏
便像那小養女似的流落在被棄的棧道旁
　彼此和現代文明絕緣。

（而偶而拋下來的文明的青睞，你已病得連咳嗽都感痛苦）

風聞那高士尋尋覓覓的腳跡，你在高士的筆尖下誕生
（二郎君啊！你好！天氣晴朗麼！）
而復有誰再惦憶起那高士的筆跡
（二郎君，我那小女孩病了）（我就去，）
在他那美妍的小妾的絲絨鞋下
（二郎君，晚有大宴，一定去，一定去。）
那座小橋已經疲憊，
（啊！我已疲憊，我終於行於此。）
泉水的嗚咽業已泣入被遺忘了的貝殼碎了的軀體裏
唯若葉嘆息，流水不再（在拱門上抑首天空的二郎君不再）
我的身影投不出映像，只在
夕陽的輕描淡寫之下，匆匆完成了素描
我便要歸去，

惦惦着　時間踏過去的古樓，我輕輕舉起右手。望着
我的腦子將要手來，
去撥動那座陳放在時間之上很老很老的琴了。

一九六九・四

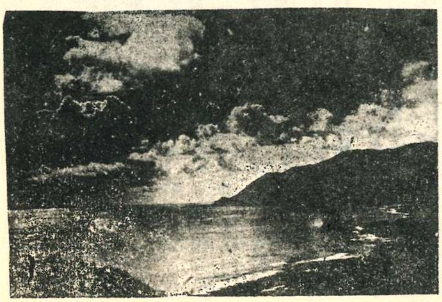
一、沒有空間的女人

（他們把她吊死，然後又罰她的屍體走路）

把臉容給所有喜歡她的人
其實在明天便忘記她的名字的男人
今夜她說她騙人的故事給他聽
他也說一些冒險的謊話給她聽
他們在一萬條刺劍繡成的街道上走
陽光也憤怒他們，所有與她同種的男人都悲傷的走過
所有與他同種的女子都昂着鼻走過
他們踩着不同的鞋音走過

她因爲一笑，所以帶色的舞會便舞着她
因爲她的一笑，十字架在她胸前便飢了質，
在她的兩個乳房之間的耶穌便懊惱的哭着
終於哭成了情人們的心的那種形狀
而偷心的人恰從她的胸口中走出
成一縷輕烟。而抱着酒瓶的那漢子走過來的時候，
他便確實醉倒了

僅管她眞的將空間疊合在一起，即使她的衷言也可以
塔成一條船，但是那個白色的水手，還是爬上那
戴着他來的時候的那條船，很滿足地從她變成的
梧棲港漸漸駛離…………



于青的作品

迷途的羔羊—驚醒吧

數三乙　胡明宏

（今天＝過去＋兩個明天）

「咱說眞的，要是時光倒流，我一定好好讀書，不再窮泡女孩，不打司洛克，不………」

「不再幹家敎，不磨地板、不睡覺了是不？見你的大頭鬼，誰信這邪來！甭說了吧！」

「哼，想當年………到如今………唉！」

「我說呀老兄，您省省吧，還是現實要緊，別自個兒沒聊了！」

× × × × × ×

每年，當薰風吹紅了杜鵑，而夏之火焰燃燒在椰子樹尖時，總有一股無形的嘆息與怨恨籠罩在我們周圍，是一群待畢業的學子，所流露出來的感觸　懊悔他們「一片空白」的大學生活，編織他們「假如我還是大一生」的夢…，夢醒時徒呼負負！

不錯，過往的雲煙值得反省和回味，人是有歷史觀念的動物，誰能否定人們的過去？誰能禁止他們鑑往知來呢？而且，人類也是有感情的動物，我們不得不承認，在生命中尙需些許回憶和幻夢來點綴，因此世人的許多精力都是消耗在追懷過去與幻想將來中；然而我們爲什麼對逝去的要寄予那麼多的思念，爲什麼對失落的永遠不能忘懷？何不把握現在，珍惜擁有的呢？

誠然，回憶是首美麗的詩篇，它可使我們回到已去的遙遠，覓得短暫的甜蜜與慰藉，但是對於我們年青人說來，我們毋須及早陷入回憶的漩渦。回憶過去，往往令人產生一種自我憐惜的情愫，飄飄茫茫，似乎很美，但美得無奈而淒涼，何必陶醉於褪了色的舊夢中呢？値得我們尋找的東西多著哩。年紀輕輕的，豈可就此沉入消極、退思，露出那不該屬於我們的頹然與落寞！

縱使，你有光彩的過去，你有黯淡的往昔，你曾失敗、受創，你曾得意、驕傲，但那又算什麼呢？你可曾想到，不將現在的生命充實，而只徒然切切地去回憶往昔，將來你又憑什麼使目前値得回憶呢？青年不是回憶的時期，而是創造回憶的時期，金玉盟中說過：「年青的時候多創造回憶，到老年才不會感到寂寞。」你該明白了吧，朋友！

生命對於會思想的人是喜劇，對於只會感覺的人是悲劇；且記著，青春有限，盛年無多，勿以爲來日方長而冀待來日，「明天」尙在不可知的渺茫中，「未來」對於年青人恰似一股誘惑，時有幻想，時有美夢，但誰敢保證：隔夕不會煙消雲散，場場落空呢？即使最長的一日，也有黯淡的黃昏，最美麗的花朵也會有枯萎的日子；假使年青時習慣於沉鬱與懊喪，那麼一輩子將成爲悲劇性的人物。朗費羅說過：「過去的永不再來，未來的不足信賴，唯有憑著良知，順著眞理，把握瞬息將逝的現在！」

是的，昨日的玫瑰雖美，但在今晨她畢竟是枯萎了，惆悵飄逝的日子是不必的；明日的憧憬雖好，但尙得有今朝的創造，空待渺茫的將來也是不必的。人生有低潮，生命有雨季，痛苦、失意原屬尋常，失敗的意義乃暗示成功的不遠，何必因爲些微挫折而否定自己的存在呢？

奮起吧！不要再費心灌漑那凋零的落花，且去吻遍地芬芳的青草，願以華德渥斯的話互勉：「雖然過去的光彩曾經非常燦爛，但它永遠消失在我的眼簾；如今，誰也不能讓時光倒流，草原欣榮，花卉再放，不要傷感過去——情願在殘留的部分再尋找力量！」再尋找力量‼

之賓，熟諳上層社會的儀節典制，而貝多芬孤高比雲月，焉能受那庸俗的枷鎖，兩人自是不歡而別，貝多芬大大訓他一頓：安能摧眉折腰事權貴，使我不得開心顏，請引壺觴以自酌，眄庭柯以怡情。第八第七交響曲便是這時代的作品，一是節奏的大祭樂，一是詼諧的曲調，有如歸去來兮，又有如夢遊天姥吟留別，快樂狂亂的激動，使德國北部流行著一種說調，說第七交響曲是一個酒徒的作品—但是它也是一個力加天才的產物。第八交響曲更有著滑稽剛强與任性的意味。

一八一四可算是他幸運的頂點。維也納會議中他幾乎是親王致敬的偶像。他也寫了一些點綴應時的作品。但在此光榮的時間過後，接踵而來的是最悲慘的時期。首先一七九八年起他的耳朵即開始有毛病，一八〇〇年要坐在前排才能聽見，以後每況愈下，大聲喊才能聽到，到一八一六完全與聲音世界隔絕矣！他也步入了所謂背叛時期，深得音樂的奧秘，打破傳統的枷鎖。除了耳聾帶給他心坎的創傷外，還有老友盡去、快樂青春轉眼過的哀痛。

斯時意大利歌劇作家羅西尼（一七九八—一八六八）崛起，他厭倦當時奔放燦爛的浪漫派，以衛道者的姿態，替正在消逝的古典時代開出鮮艷的花朵。年少得志，風尙所趨，維也納也感染到了，竟謂「莫札特與貝多芬是老學究，只有荒謬的上一代才贊成他們，羅西尼出現，才知道何謂旋律。」老友之去與耳聾，使他感到「沒有朋友，孤零零地在世界上」的悽楚。一八一六他開始用談話手册。各種憂慮，瑣碎煩惱貧困，使他在一八一六至一八二一年五年間只寫了三支鋼琴曲，大家以爲他是江郎才盡，沈默斯文。

但他只是潛龍勿用罷了，他在用心索取一偉大的題材，幾年的搜求探察，他發現早期構想的人聲加入，竟有其躊躇，一八二二完成部分，以合唱作爲結束，一八三三他又想以器樂取代之不成，該歡樂頌遂保留，而取代之曲遂用於另一四重奏內。譜成之餘，奧境全在洛西尼與意大利歌劇的勢力籠罩之下，憂鬱頹喪的他正想渡海至倫敦去演出。但幾個高貴的朋友眞切懇摯地要求他留下來，他被感動了，一八二四年五月七日在維也納舉行D調彌撒曲和第九交響曲的第一次演奏會，情況之熱烈幾乎排山倒海，繞樑三月，終於戰勝了群衆的庸俗，維也納的意風被他振感激盪。他也戰勝了他的命運，他的痛苦。這個作品正要流露這些歡樂心境。第一樂章暗示著主觀的歡樂，青春的活力。第二樂章表示那世俗循環式的歡樂。第四樂章他開始尋求那種和平的，有保證的，神聖的愛。第四樂章他利用席勤的詩歌快樂頌爲媒介，儘量地讚美他所得到的快樂。先是器樂及男中音降B調四三拍子的朗誦調，爲快樂頌的前奏，再來是那狂暴不協合的音響，漸漸引入那主題去。忽然有一段終止靜默，在期待盼望著，使人有入翳天聽，祈求神聖的假想。當主題過渡到人聲上時，低音帶著嚴肅受迫的情調，漸而那歡樂的主題出現，男中音降B調四四拍的呼喚竟齊起讚高號，進行曲的節奏，有如浩浩蕩蕩的軍隊，沸騰夾雜熱情與快樂，那四重唱和合唱輪交錯，逡巡在高山大澤，奔逐在田野荒郊，親嘗他的呼息，感受他的興奮。接而宗教的醉意，主題的變化重現，曲調點綴以對位式的伴奏。整個人類張著手臂，把歡樂擁抱在懷裏。但他在樂隊中，只看譜打拍，未看觀衆，直到一個女歌唱員牽著他的手，把他面對著群衆時，他才突然看見全場起立，揮舞帽子，向他鼓掌，他手指臉龐的抽搐激動，眞令人感動。

斯時歐洲國際情勢沸沸，奧相特梅涅集俄、英、普諸大頭開維也納會議以恢復舊秩序，重新瓜分歐洲爲的，他在國際固是炙手可熱，然在國內却極力厭制，爲民權革命的一大反動勢力。文字是被束縛了，但聲音還是自由的。貝多芬晚期言論輕視反對這些加於人民的權威，他要給予人類勇氣，要喚醒他們的迷夢。一八二六年前完成的許多作品，有著輕快的結果，有的是戰勝了痛苦後的微笑。一八二六年十一月底他得了肋膜炎性的感冒，在維也納病倒。幾經醫治，一八二七年三月二十六日，在大風雨中，一聲雷響，爲死神所帶走。其所預寫之第十，十一交響曲等亦隨之修文赴召。一世英豪於焉消隱後啓著待何以續力哉？後記：系刊初徵之際，吾殆淡視之。何？不在其位不謀其政一也，文筆本疎佶屈嗷牙二也，課業多荒K之不暇三也。迨友「桌球」一文改定，忽興「初做羹湯」之想，而[illegible]材之選費心勞神。氏之一八〇四年前資料廣搜博採，得以提要鉤玄，而後則欲振乏力，墜緒茫茫旁搜遠紹而不得，只得就一羅曼羅蘭中翻錄，剪裁欠工多瑕疵。紕謬短缺，潦草以竟。事畢有如偃苗助長者之芒芒然不逮之處並望見諒，心有餘力，塡「聲聲慢」詞一，以供解頤：

「翻翻、看看、寫寫、抄抄、嘻嘻、哈哈、嗯嗯。斷簡浮篇材料，最難續文。七强八頁稿紙，怎述他一生事鬧？鐘敲也、正昏然已是殘月半輪。半截長壽霧淡，倏爾熄，盒內已無煙新。提著筆兒，凝他窗外夜沈！涼風更彙微星，迫黎明陣陣頻頻，這時候，怎一聲喚得阿門！

一九六九、五、十一

重，自要發生對：宗教的衝突。宗教改革應運而生，經濟的需求，促成地理的發現，以及對日常生活的進一步要求，在器械的製作上也欲窮千里目更上一層樓，樂器的進展乃大爲精良。

中古時代，音樂家只是把生命迷糊地交給上帝或教會，或者處於封建的情勢下，音樂家成爲帝王或貴族的裝飾物。

十八世紀初音樂才擺脫了這些桎梏，成爲獨立的角色，此時由於樂器漸爲精製，表現的能力日益增大，那些附屬於宗教的聲樂遂成望塵莫及之勢。樂器演奏技巧的日續講求，使作曲的形式隨而改進，由宗教的復調音樂轉而爲純客觀的主調音樂，這就是所謂古典派的音樂。古典派音樂特性如下：一是注重形式，章法、結構要求嚴格，二是發揮客觀抽象的美，只在節奏曲調和聲等求其眞善美。可以之比擬於南北朝及隋唐初期、唯美派文學，只講平仄音律字眼結構的完整而忽視表達感情，明理達義的要求，雕琢推敲的結果喪失了精神，而到杜甫方得大展工筆，感激豪宕沈鬱頓挫，內容實質並重，慘澹經營達於高峯。於音樂之古典派亦然，分爲前古典派：哈巴、韓德爾屬之，後古典派：海頓，莫札特，貝多芬屬之。彷彿杜甫於詩律的功力般，貝多芬把古典派音樂發揮到最高峯。但他那若行者的心靈，沒有一處森林，一處草原，一處沼澤可以使他駐足旁觀，貝多芬開始輕視刻板的條規，討厭藐視自我，開始折散傳統的樊籠，步入第二時期，所謂「蛻變」時期。

一七八九年的法國革命激盪了歐洲的國際情勢，奧普諸國的對法之戰，崛起了一世怪傑拿破崙，越過阿爾卑斯山，大敗奧薩聯軍，遠渡地中海，征服埃及。法國中央的督政府受到英、俄、奧的侵襲，抵抗失利，促使拿氏的政變發動成功，當了執政，對外打敗歐洲各國第二次的聯軍揭發蘗民權修定的法案。眼看著數年來大家所渴望的人類自由平等原則將付諸實現時，貝多芬心情是何等的歡悅呢？對這位鄰國的怪傑多少產生了相惜的同情，於是著手至一八〇三年譜成英雄交響曲，也是他拋棄只重形式的古典式而開始創立新宗派以來前期的大作品。但到一八〇四年拿氏竟稱帝，成立專制政體，貝多芬是多麼傷心與憤恨，種種嘔心瀝血的歌頌竟只換得這麼一個後果？於是將該曲原稿撕毀，嚷道：他不過是一個凡夫俗子而已。不復斯言後經友人勸說而重寫，追求歌頌那理想的英雄。我們聆聽之，是否可覺出那是他本人的幻想，是的，他足配稱英雄，一個開來繼往，承先啓後的橋樑，不撓不屈睥睨千古的偶像。彷彿我們又看出了他以世紀病者的姿態，努力在希望與失望，愛戀與憎惡，矛盾與痛苦中，堅毅狂熱的追求悲憫人的英雄理想。

此期作品多矣！奏鳴曲十四首，包括「月光」「熱情」在內。對熱情奏鳴曲俾斯麥曾說：「這是整整一個人生的紛爭與嚎動。倘我常常聽到它，我的勇氣將永遠不竭。」它是一澎湃洶湧的浪潮。

先是一七九六年時於維也納，貝多芬邂逅了丹蘭士特勃侖斯維克及其一家。有一段時期他似乎鍾情於丹蘭士姊妹，約瑟芬。然丹蘭士自貝氏初卜居奧京與其兄法朗梭阿伯爵從遊時，小姑年少，跟著貝氏學鋼琴，即風靡於他。迨一八〇六，貝氏復作客匈牙利，二人才相愛起來，五月訂婚。這段幸福的日子裏，他們沈醉醞釀著甜美的醇膏她說：「一個星期日的晚上，用過了晚餐，月光下貝多芬坐在鋼琴前面，先是他放平著手指在鍵盤上來回撫弄，隨後彈了幾個低音和絃，接著，慢慢地，他用一種神秘的莊嚴的氣氛，奏著一首古代的情歌「若願素心相贈，無妨悄悄相傳，兩情脈脈勿爲人知」他對我說「我從沒有到過這般崇高境界，一切都是光明和純潔。」這就是月光奏鳴曲。

同年所作第四交響曲，所用時間是一氣呵成，但令人感受得有如菡萏清發，不知醞藉幾多時，但見包藏無限意。

淵源於愛情的妥協精神，生出了好的興緻，心靈活躍，彬彬有禮，神情風雅，有如第四交響曲幻夢與柔美的情調，深邃的和平，使他的天才產生了完美的果實。作品是六首交響曲，兩首鋼琴協奏曲，十四首奏鳴曲，小提琴協奏曲，彌撒曲，神劇、歌劇等。歷一戰爭的反應，使得它們大部夾著狂風暴雨的呼嘯，炫耀技巧的壯烈，彷彿千軍萬馬的奔騰，蓋取源於莎翁作暴風雨。也有鍾毓古典悲劇意味的第五交響曲，也有那檢拾十里松陰百道泉」嬉遊野郊的第六（田園）交響曲。

但是天若有情天亦老，僅管他向她呼喚著：「我的不朽的戀人，我的思念一齊向你，永遠無人能再佔有我的心。在一八一〇年兩人却解除了婚約，什麼理由阻撓一對相愛人的幸福，財產地位的不同？將仲子兮的呼號？或許是他暴烈多病無形中使他不願牽累一顆眞摯的心？婚約毀了，然而兩人中間似乎沒有一個忘卻這段愛情，直到生命的最後一刻。丹蘭士曾把自己的肖像贈與貝多芬，題著「給稀有的天才，偉大的藝術家善良的人。T、B」，這幅肖像至今猶在波昂的貝多芬家。在他晚年時，一位朋友每意中撞見他獨自擁抱著這幅肖像，哭著高聲的自言自語著：「你這樣的美，這樣的偉大，和天使一樣！」朋友出去再進來，看見貝多芬在彈琴，他說「你今天好多了」貝多芬答道「因爲我的好天使來訪問過我了。」

在婚約解除後他又孤獨起來了，但盛年的英華正光芒的放射，他開始奔放那天上來的黃河之水，他開始流露那山原曠其盈視的粗獷獵風，邊幅不修，舉止放肆，他在砌造自己理想的宮園。哥德女友裴蒂娜對之極爲推崇，於其音樂亦有深刻了解，哥德遂設法要結識貝多芬，斯時哥德爲聲名玎瓏之詩人，官銜樞密參贊。一八一二年兩人在波希米亞的浴場托帕列茲相遇，哥德是皇室入幕

貝多芬事略簡介

呂子銘

一七七〇年，如果照星象學的詞語來說是：「靈氣群集於西方，異人生焉。」的年代。貝多芬、拿破崙、黑格爾先後於是年誕生，一爲劃分樂壇的屹石，一爲橫掃歐陸的狂，一爲震爍哲壇的宗匠。風雲際會，千古風流，常有「吾生也晚」，不得親嘗謦欬之歎。然而「天生我材必有用」，來日或大器晚成亦未可料，大無須有「不得與斯三者同時同地而並存」之想。而此中黑格爾所創辯證法，爲馬克斯等所纂，倒因爲果，加以費爾巴黑之唯物論，所成之唯物辯證法，經共產黨徒所濫用，不知流毒幾許，致令後來者於黑氏亦難免有微辭。

拿破崙之事迹亦已矣，所能做者僅能從他的故事典藉中去「遙想公瑾當年，小喬初嫁了」的，「英發雄姿」，當時耀人眼目的一顆慧星，也只是「青山依舊在，幾度夕陽紅」，供人追思笑談而已。

僅管經二世紀來，翻雲覆雨的世界情勢已昨非今是，然而貝多芬所留給後代子民的精神遺產，仍然是那麼生動富麗，雄偉深沈。際此他的兩百歲冥辰的將到來，我們能做些什麼來表示些什麼呢？幻想著在他生日那天，我們要在喜馬拉雅山的高峯上舉辦一個盛大的交響樂團演奏會，演奏他的九大交響曲，或者在馬里亞納海溝底演奏他的絃樂四重奏呢？想像他在生理殘缺後，猶能本其善良的天性與熱愛人類的情懷，爲全人類讚美祈禱，譜下更偉大的樂章，這已足以令人肅然起敬了，更何況於其作品本身的豐富與深刻，堪稱「登峯造極」呢！

貝多芬於一七七〇年十二月十六日生於萊茵河畔的波昂城，先代是比利時人，祖父於十八世紀前半葉由安特衞普遷至波昂，就任教廷音樂師，貝多芬的音樂天才和正直高尙的性格乃得自其遺傳。父親亦爲教廷男中音歌手，但因酗酒過度，終致損壞歌喉，家中遂陷於貧困不堪的境中。因風聞莫札特幼年所表現的一切，就強迫幼小的貝多芬練習彈琴，以便快點賺錢滿足他的慾望。四歲的貝多芬整日消磨於鍵盤，不得稍懈，有時還會遭到酒醉時的歐打，所以童年的歡樂是不會降臨他的身上的，也許他後日古怪的性情與此即有關係。在這樣嚴格的音樂技術訓練下，終能不負所望，八歲時舉行第一次「六歲小兒音樂會」，十歲時，開始練習作曲，十二歲時發表了一套變奏曲和三個奏鳴曲，配合著他高明的演奏技巧，開始引起人們的注意，又從宮廷風琴師尼費學習音樂，並做他的副手，擔任宮庭副風琴師。十三歲又改任鋼琴師。十五歲發表一首C大調絃樂四重奏，一七八七年春季首次旅行赴維也納，與莫札特會面，那時莫札特三十一歲正是黃金時代，前往登門求敎的人極多，方法是莫氏先彈一段，求敎者接著以下部分，貝多芬當然也照樣做了，可是並沒有受到特別稱讚，因爲來求敎者對該部分都練習得很純熟，於是貝氏就請莫氏另彈一首，莫氏就隨意另彈了一段，貝氏立刻就接下去，這時莫氏不得不對這位十七歲的少年天才大加賞識，說他將來一定會轟動樂壇的。那年夏天，母親去逝，家庭生活極度不快，不得續拜莫氏爲師，而此後乃携帶著貧困，痛苦與疾病踏上音樂的大路。

一七九二年乃父病故，是年十一月波昂大主教資送他到維也納師事海頓，並介紹他結識維也納許多王公貴族，此時海氏六十歲，已自王府樂隊中退休，老成膺重，對貝氏的技能並沒有特別垂青。這次是貝多芬的二次到維也納，當時他的鋼琴技巧已到爐火純青的地步，論者謂其爲前無古人的鋼琴家。海氏既「啓蒙」不多，貝多芬遂於一七九四年離開維也納到英國去，成爲貴族們的上賓。沒有從莫氏海氏獲取大益的貝多芬，常自己研究巴哈的作品，得利不少，以後曾說：「巴哈是我眞正的老師。」

一七九五年自英返回維也納，舉行首次音樂會，發表第一首C大調鋼琴協奏曲，自己彈獨奏部分，極爲成功，倍受讚揚。接著經過一段旅行演奏的生活，回到柏林去，在德王面前演奏，寵幸異常，回贈兩首鋼琴與大提琴合奏的奏鳴曲。並完成小提琴與大提琴的三重奏及三首鋼琴曲。一七九六年完成許多作品，包括第一、第二交響曲，以及一些絃樂曲，論者謂至此爲其第一時期。

這裏請恕雜些其他的敍述：十四世紀至十六世紀間，歐洲產生了「文藝復興運動」，它是歐洲文明的大轉變，思想上由出世觀念變爲入世觀念，建築上那尖頂翳入霄漢的哥德式被代以寬基厚柱圓 低窗的希羅式。雕刻、美術也由聖經取材爲主而向生活資料中去尋找題材，此外方言文學的廣泛運用也很特出，這些雖屬一時之盛，但此中影響尤大的是古希臘的科學又爲歐洲學者所重視，科學精神一旦爲衆人所膺服素

「重生」

衞高榮

「富人唯有病中才感到財富的無用。」

沒有死去實在非常幸運，我能復活也幾乎令人難以置信，當時我是雙手不停出血，臉及眼睛都有受傷，抬到醫院時，醫生說了句讓父親心碎的話：「他們說：「這個樣子，比死掉還難受。」死是人所不願的，然而我即將遭受比死更悲慘的命運—我的雙手和眼都有失去的可能。

民國五十五年光復節的第二天，因為差幾個零件就完成一部自造收音機，在零件未買前，閒來翻開「今日世界」內中有一篇文章報導馬來西亞學院的學生自己發射兩節火箭，當下想到實驗室有現成化學藥品，只要稍加研細混合，即可製成火箭固體燃料，也許命中註定有此差錯，任何藥品本該分開研碎，我竟忘了這一點，並且為了多製幾個試驗，大量將氯酸鉀 $KClo_3$ 和硫S混合，鎚沒幾下，突然驚天動地的一個巨響，我感到一陣陣巨痛的襲來，腦袋已因失血而呈半昏迷，內心感到多麼的無助，雙眼看不到東西，手的巨痛遠超過腳的流血，我是已在走向另一個世界的途中，這個世界好近，伸手可及。

我實在不願這樣死，從小我憧憬戰死戰場的光榮，但就這樣死，實在太不光榮，抬到台大醫院時已是奄奄一息，進入X光室，依稀聽到醫生說：「兩個手必須除去，眼睛一個要拿掉。」第一個鑽入腦中的想法是，如沒雙手那活著又有何意義呢？漸漸地我已因失血過多不省人事，那幾個痛苦的日子，完全在止痛針下度過。

差不多一個星期後，我的左手指有一個腐爛，因為眼睛仍未看到，在哄騙說是拆線下，在沒有麻醉之下活生生的被剪掉了，以前看過小說描寫剝人皮，將水銀從頭頂灌入的刑法，我所受和這個又有什麼不同？每兩天一次的換藥也是極端痛苦，石膏拆開，血像雨般落下，整個牀都是血，我流了不知多少的血，啊！人生最大的痛苦也不過如此，從開刀房出來我是被告知兩個手都完好的，可是半個月後第一次張開眼時，發現左手竟有短少，而且臉也黏上一層黑疤面目全非，當時悲傷程度非筆墨可形容的，然而最傷心的是我已不適於實驗室內工作，我所讀的電機也只有在理論上發展，否則只有轉讀數學系。

爸一生打過無數次的仗，負過多少次的傷，他都沒有流過一滴淚，在急診室時他老人家哭了，全身無力的坐在地上，辛辛苦苦栽培了二十年，眼看快要成功，經此重大打擊，臉形全變，我第一次睜開眼發現爸眼眶深陷而媽頭髮散亂，我要求媽快去燙頭髮，請爸爸不要為我操心，那時，我只能在模糊的視線下看東西，我要媽將玫瑰花拿給我看，我告訴媽我怕看到血，我問媽病房什麼樣子，距離太平間遠不遠？媽叫我不要胡想，可是我不能不想。

我去過台大醫院的太平間送朋友的女友，我知道那裏面的樣子屍體放在冰上，親人坐在屍旁，哭得死去活來，那個小女孩，在放榜考上北二女時，患腦炎死的。她，一個剛要開的花朵竟謝了，而我，一棵經過父母栽培二十年的小樹竟要倒了，還好，是倒了又重新生出芽來，值得一提的是台大醫院治好我雙手和眼的幾位大醫師，如台灣骨科權威陳漢延教授，眼科主任張燕飛教授，那邱玉先生，主治醫師韓毅雄先生和幾位輪值醫師等，藉此，向他們幾位表示謝意，假如將來本人有所成就，除父母外，我想這條命應該算是他們合力檢回來的。

朋友中如郎先生替我辦休學手續，最感動的是他和我一向最好強的人，怕我傷癒後受不了打擊，和爸商量請心理醫師，後來大家見我和傷前並沒多大改變，也就放心沒請醫師，還有我的同學朋友從各地趕來，乾哥從美國打電報來安慰，文堂在我病房照顧五天五夜才回台中上課，多年不曾謀面的彰化溪洲台糖小學同學，他們遠自各大學到醫院看望，有一次甚至來了十幾個，圍得病房水洩不通，還有一次女同學來得太多，把醫生嚇壞了，那麼多人看年青的實習醫師打針，令他不好意思，半開玩笑的說：「我好害羞，我好害羞。」針筒剛抽出便掉在地上，引起一陣哈哈大笑，我受傷地點在家裏，所以報上沒有刊載，同學來的固然很多，不知道的也不少，在我心理上覺得不知道我是誰比較好，事情總是過了，再來看反而引起我的傷感。

由於爸媽細心調養，我的傷也好得特別快，目前除右手尚有一根鐵釘未拔外，大體已算完全復原，在十一月復學前，沒事可做，看書餘暇，還教幾個學生，收入千餘元，弟曾打趣地說：「假如你在學校唸書就不能教那麼多學生，你現在可以賺那麼多錢，可謂因禍得福，並且可以一輩子不停唸書，真是塞翁失馬，焉知非福。」這使我聯想到聖經上那段話：「雖然無花果樹不發旺，葡萄不結果，橄欖樹也不效力，田地不出糧食，圈中結了羊，棚內也沒有牛，然而我要因耶和華而歡欣，因救我的神喜樂。」

情文並茂

殘而不廢，感人甚深

金門行

衛高榮

沒到過金門以前，早已嚮往，為得這裏是一座美麗的海上公園，然這個日益強壯的小島，非但處處呈現一片青翠秀麗，還有一股蓬勃朝氣——進取精神，所以有許多服役期滿的阿兵哥們，還願繼續留營，報效國家，是有道理的。

那是八二三砲戰五週年前夕，我們中華合唱團到金門前線勞軍，隨行的有國防部示範樂隊及聲樂家申學庸，林寬等幾位先生，由當時中央四組副主任楚崧秋先生領隊。一行浩浩蕩蕩，經一日夜的海上生活，安然抵達島上，阿兵哥們為我們講述料羅灣搶灘的英勇事蹟，氣焰如虹，說得我們個個精神抖擻，恨不得立即有機會披上征衣撕殺一場，那才痛快呢！

置身金門，有一股難以形容的喜悅，這裏周遭的景色，絲毫也看不出它是受過八十餘萬顆炮彈洗禮的前哨，遍地青葱樹木，花香四溢，凡台灣有的花卉，在這裏都可以看到。柏油公路平坦交錯，幾至無所不暢。空氣清新，幽靜甜適，所以稱金門為海上公園，確是恰如其分，有個名為金湯的公園，景色可以媲美陽明公園，題名金湯，更有歷史和時代的雙重意義。在公園遠眺料羅灣落潮後一根根豎立海邊的鋼柱，有如一列海上長城，固若金湯也，我們到達以後，即展開慰勞活動，先由國防部示範樂隊軍樂演奏，幾位聲樂家的獨唱，接著由中華合唱團表演，團長張世傑先說明大意，中華合唱團是以大漢天聲來喚醒國魂，把戰鬥曲由金門唱起，唱遍全世界，發揚團結精神——貢獻最高的貢獻，犧牲最大的犧牲。即時歡呼雷動，響徹雲霄。這熱烈的氣氛，證明台上台下，前方後方，已凝結在一起。申學庸教授在「金門頌」的歌聲裏，描述一個慈愛母親，由於經過共匪折磨，一待反攻同鄉相對，已是滿臉縐紋，形銷骨立了。歌聲中滲雜著血和熱淚，句句扣動心弦，這正是今日大陸上千千萬萬同胞的寫照。

我們去過各地演奏，看到金門那股令人振奮的精神，什麼疲勞都忘得乾乾淨淨，在金門，每個人都很忙碌，不管是那一角落，那一個人，大家都有按時定量的工作。在表面上，看這裡是安靜的，一片欣欣向榮的景象，但毫無疑問，從他們的精神上可以得知時時刻刻都在準備戰鬥，祇要有一點風吹草動，軍隊和人民會自動的連結起來，滙成一支鋼鐵般的強大隊伍，所以我們有自信，匪軍不來侵犯則已，要是冒險來犯，一定來多少消滅多少。

最後兩天的節目，是遊太武山及環島旅行，太武山公墓，建築宏偉、氣象萬千，面對忠烈，令人油然而生肅然起敬之感。我們登太武山，是向忠烈致敬，由楚總領隊主祭，團員們列隊廣場，哀樂奏起，大家默默靜哀數分鐘，對保國衛民的烈士致最深的敬意，此情此境，令我想起高中時代讀過的那篇國殤：「誠既勇兮又以武，終剛強兮不可淩，既死身兮神以靈，子魂魄兮為鬼雄。」公祭畢，副司令官講話，他說：「金門，這個戰鬥了十五年，愈戰愈強反攻最前哨，是無數軍民用血汗和眼淚建設起來的，它孕育了一種面對敵人堅強奮鬥的精神，在困難中推動建設的精神，在戰鬥中鎮定如常的精神。這就是金門精神，同時也正是我中華正氣，發揚這種精神，便是我們爭取最後勝利的保證。」

我們中華民族的聰明才智，實在說足以自豪，祇要時時留意，處處細心觀察，任何一個地方都可以找到證據，當我們參觀六一高地，仿如置身迷宮之中，古人有謂「鬼斧神工」，在這裏恐怕是有過之。當然，能完成這座偉大工程，是付出相當代價的，後來我們又去炮兵陣地，看到那些龐然大物，不由得驚奇而羨，女團員自動地為戰士們高歌，彼此打成一片。馬山望故鄉，久已聞名，大家爭著從望遠鏡向敵陣瞭望，此地距大陸僅二仟碼，豈知一條壯闊波濤，把人間隔成黑暗與光明兩個世界，而從望遠鏡中看隔海那邊，一草一木都能分辨，於是大家擠在石屋中都想多看一眼，從這點可以看出大家對于反攻大陸，解救同胞的心切！隨後又到金門廣播電台，電台設在石洞內，也就是前線心戰中心，瓦解敵人神經戰的機關。我們爭著放汽球，放，放……因大家都希望這一件禮物會帶到自己的故鄉，自己的家人。

最後一天是遊金門城。金門百姓都很和善，待人尤其誠懇。我買了金門高梁及一些紀念品，據說金門高梁可以治風濕，家母患有此症多年，乘便買幾瓶帶回去，讓母親高興一番。

專艦已靠岸等我們，但大夥眞希望能多呆幾天。那是不可能的。中國的諺語：「天下沒有不散筵席」，法國的那句「再美好的事也有終了。」我們是來此做客，儘管主人殷勤招待，終歸是要分別的，可不是嗎，副司令官送走了專機，又到碼頭送我們，我們在再會聲中，每個人都有說不出惆悵，馬達聲，再會聲，織成一片，船徐徐啓錠，別了，別了，直到視線模糊，我在心中禱祝：金門！金門三軍將士祝福你們，我永遠忘不了那句「我們大陸再會」的聲音，但我更希望能成為你們的伙伴，我們一起打回大陸去。

論中學數學敎育

數四 林蓮茹

近年來科學進步的迅速實非一般人所能料及的。然而我們敢大膽地說科學能進步得如此地快，多賴於數學發展的迅速而來。故乃有「數學乃科學之母」之稱，所以我們要發展科學必須特別注重數學敎育。而中學敎育是注重普遍的各科敎育，非注重某一專門學問之研究，但是它却是培養一個人將來從事研究專門學問研究之途徑之方向的階段，與奠定數學研究基礎之時期。所以要培養學生對數學有興趣必須從中學數學敎育上加強努力。

以往我們在中學中之數學敎育注重計算能力之訓練與孤立難題之解答技巧，但是對於數學上之基本概念則茫然無所知，給於學生思考與理解的機會很少，學生雖然學會了許多難題之解法，事實上乃無多少數學上之知識，且有許多學生把它背熟了事，對於未曾解過或老師未曾敎過之問題就全無信心而不知如何着手思考，甚至有些學生因平常敎師把題目，例題都過份週到地解給學生看，以致一些學生遇到沒敎過的問題即認爲「老師沒敎過即不重要」因而連思考都懶得思考了。或有些敎師太喜歡賣弄特殊的難題，喜以特殊之解法代替一般易於思考之解法，因而學生無法由自己着手思考去解題，結果學生對數學變成懼而遠之了，多少人之興趣因而大減。且以往所學的高中舊數學多與大學中所需之數學知識，如集合，極限等之關念無多大關連，大部分到了大學所需用時如在統計學或其他科學上所需用之微積分皆須從頭學起，因此在高中所費之心血成了一種浪費，就學生個人而言其浪費已不小，就整個國家而言更是一筆大損失。因而對於中學數學敎育之改革乃成爲世界潮流。且其改革之方向大致相同。如美國、日本、歐洲各國皆已實施數學敎育之大改革，其成果極爲輝煌，因而我國可用以借鏡，俾使改革更易成功以收預期之效果。

我國此次革命性之改革乃是採用大刀闊斧的急進式之改革，而不採用「漸近」式之改革，乃因爲「新數學」之關念、內容實與「舊數學」差得太遠了，且數學有它完整之體系，無法加以支解拼湊，又新敎材中有很多是近代的，不能勉強揷入舊敎材中同時敎學而舊的敎材注重運算之法則與解題之技巧很難改用啓發式數學法使學生在課程中發現什麼；舉個例說：一個有經驗之敎師把一些新之敎材如交換律、分配律、結合律等穿揷於舊敎材中敎學，但學生因只學會了這些名詞與含意而缺乏實際之使用，則學生學過後很快就忘了，故學了等於沒學。因之他必須敎學生證明之概念，如此行之不久則一個有能力之敎師就會體驗出來，他必須介紹一切有關有序體（ordered field）之性質，而「次序」（order）之學習則需不等式方面更深廣之知識。如此他會覺得舊課本上不曾介紹過這些必不可缺之性質，而書本上之習題也無法與這些增加進去之敎材相配合。總之；想要介紹一點新觀念則須把原課本中之敎材重新編排取捨才能適應需要。但一般敎員工作負擔皆很重、很煩忙，再加上需重編一部敎科書，那實在太困難了，故何不參照名家之意見，擬定一套方案，徹頭徹尾地做一番改革呢？

但我們皆知「萬事開頭難」，對於新敎材之實施上之困難主要在於敎師與學生方面不能一時完全擺脫舊數學之觀念而起。不過實行新敎材之敎法時不妨

從本學期起國中亦在實施新數學，因國中之學生參差不齊，且一般師資不如高中，其實可說師資太缺乏，太低了。所以實行之初亦是困難重重。但相信只要大家能努力去改進，相信亦可很快地收到良好之效果的。等到此批學生再進入高中時，他們對於新數學之學習將如同舊日之學生在學習舊數學時一樣地習慣，容易了。

以上漫談了一些有關我國中學之數學敎育，而此敎育之成功與否有賴於大家之共同努力，尤以我們從事數學敎學者之責任爲甚，故應奮自勉之。多試用些不同之敎學法，如自學輔導法，分組討論方式或問答法，思考數學法等，以求得更有效之敎學方式。在台北市立第一女子中學科學敎育實驗中心對於新數學做過「反應調查」，知道大部份學生對新數學之反應良好，學習得很有興趣。

現用之高中數學敎材共分六冊，其編排次序爲：第一冊注重幾何包括平面，立體幾何，第二冊多屬三角學之知識，第三冊起分社會組，自然組兩方面。其深淺程度頗有距離，第三第四冊多爲解析幾何與多項式等之介紹，第五、六冊則多爲極限、導來式、羣、環、矩陣等之介紹，其編排先後眞是恰到好處。吾人知現代之數學可說多以集合爲其基礎。所以第一冊之開始即予以介紹，因而在證明一些較煩的幾何定理時即可以集合觀念很快地證出。立體、平面幾何在學習中幾可成一獨立之系統，若不在第一冊中編入這些敎材，則因第三、四、五、六冊皆爲互相關連之敎材，那麼很難把這些敎材揷於其間。且幾何乃是一種較具體之敎材，其雖煩但乃然有圖形、模型、或現已存在生活中的圖樣可資參考。而第三、六冊之內容則多屬抽象之代數部分，所以較難思考，並且它常須應用到三角學之知識故若要學好第三、六冊之敎材，必須先學會三角學，因之編排次序上三角學須排在第三、第六冊中之敎材之前。故現已排編好之次序大致上稱得上恰到好處。

很顯然地，新數學所有敎材中以第一、四冊所含之敎材與舊數學之材料較爲相似，唯其說法上差得多一點，但第五、六冊中所含之敎材則幾乎全爲舊數學中所無，多半是大學裏微積分，代數等有關的。可謂之「新數學」而無愧。

以上談到的是有關敎材編排次序上之優點。但亦有不盡完好之處，如份量輕重上之分配則略有不當，如第三、四冊中敎材之份量似乎較輕，而第五、六冊之份量則過重，有許多地方如極限之觀念學生不易了解，若能設法把第五、六冊中過重之份量分配一些在較輕鬆的第三、四冊中則學生對數學之負擔或會覺得減輕一點，而可學得更好些。

新數學初實施之時，因學生在初中所學之數學亦屬舊數學，到了高中突然改學這種注重數學的結構與邏輯的推理的新數學，不能立刻適應，此乃必然之事。有許多學生認爲何必把初中所學之觀念與名詞拋棄，而改爲一些咬文咀字之名詞，以及一些複雜之證明法。其實這應由擔課敎師予以解釋，使之明瞭這些並非咬文咀字，標新立異，而是學習現代數學上所必學的。一般在初中時所學的說理、證明皆不很嚴密，學生誤以爲只要求出一個解答來即可何必如此麻煩地討論。事實上到了高中所要求的已非初中如此輕鬆了，是必須思考嚴密、周到。其實這乃是新敎材之主要目的之一：「訓練學生思考之能力」。有許多觀念比較複雜的，敎師可以用問答法來啓發學生之思考，以輔助學生思考之不周，且大可提高學生之學習興趣。且在學校之設備上應注重多多添置一些立體掛圖及模型以灌輸學生之立體觀念。可以常常舉行測驗以明瞭學生之學習結果，以做爲改進或補救敎學之指針。

課程標準之訂定，並非易事。要訂定課程標準，必需有廣泛的數學知識，對數學應有深刻的瞭解。只是，各人的看法不一樣，而知識亦隨着時間之消逝而進展，很難得有這些超越一般人的學者。在課程標準之訂立方面，就很不簡單了。可是，儘管如此，課程標準仍是要訂立的。而是不該作硬性之規定，非要照著標準走不可。因爲知識也受時間與空間的影嚮哩，所以，應該富有彈性才好。

課程標準訂定之後，隨着來的，應該是教材書的問題了。教科書之好壞，影嚮學生甚巨。好的教科書，應該要有明顯的教學目標。其內容與講述法，應順着世界潮流，配合國情。其文字以簡明語體文爲主。前面說過，數學是一種通俗的語言。如果教科書上文字艱深難懂，怎會通俗？更怎能激起學習者的興趣呢？並且，書中的形與數，儘量使之發生聯系。初中之取材，應求廣博，而高中則應求深入。因爲初中同學的生理心理發展，正是從少年邁向成年之過渡時期，大多還沒有獨立思考的能力。而高中學生則有相當的數學基礎，對理則的推理可以接受。好的教科書，不應着重於難題的解答，而應注重基本概念的明瞭，理則推理的訓練，以及形式的陶冶。同時，應配合日常生活需要及科學發展事實。就像現今電腦之普遍而初中數學教科書中，亦增加了以2爲底之記數法。其中以12爲底的記數法，雖曾遭到教者的批評；但是，我認爲在英制方面，12爲底或許有些用處，不然在我國目前來講，日常生活中所接觸到的問題，絕少與12有關，似乎可省去。以免徒然增加學生和老師的煩惱而沒其他大的好處。此外，教科書的編者，應以學生心理爲出發點，不應固守已往的傳統方式。否則，將很難得到改進了。

四、關於聯考問題與學生數學程度之高低

目前，學生人數在增加，而競爭就愈演愈烈。從初中升高中，從高中升大專院校，都得經過聯考的淘汰。學生的命運，可說受聯考的支配。而聯考的命題，就是一個重大關鍵。客觀的考題，大致都可得到客觀的評定。有時却也不免有不恰當之處。數學上難題很多，要是沒看過的話，在限定的時間內很可能會想不出解法。在學校裏，老師爲了「責任」問題，常怕聯考時難題會出出來，在教學時常在講授正課之後，抄了一大堆的特例與難題給學生；可是，有幾個眞正懂的？尤其是初中生。只好把難題一道道背下來了。於是，爲了應付聯考，消耗了幾許精力，甚或忽略了基本概念的認識。假如不把難題介紹給學生，萬一出了些難題，學生囘答不出來，又該誰負起這個責任呢？被責備、被抱怨的，自然是老師了。我個人認爲，難題並不適合來考學生，而是欣賞的好對象。要培養學生的欣賞能力，可從解難題着手。因爲有時在解題時所牽涉問題之廣，想法之妙，解法之巧，莫不令人贊歎！如果用來考學生，則失去其價値與意義。記得去年大專聯考的數學題，好像是些選擇題，那可算是很客觀了。但是，如果選項不多，則往往造成徼倖取巧，因此，可增加選項以選免此種情事之發生。

說到學生數學程度之高低，如何辨別呢？這問題各有各的看法。就一般來講，大多以考試方式來識別之。考試成績好的，就認爲其程度高；反之，若成績不好，則認爲其程度低了。看起來，這好像很有道理。不過，仔細想一想，却向有不合理的地方了。考試的題目，不見得是絕對的客觀。全都做了的，並不見得全懂，很可能有背得來的題目，而自己却不明瞭的。做不出來的同學，也不見得甚麼都不懂，可能有種種外在因素使他做不出。這樣，怎能就此辨別學生程度的高低呢？對數學的基本觀念是否清晰，是很重要的。假使光會背題而對基本概念却迷迷糊糊的，可稱爲數學程度高嗎？高在那兒？另一方面，有的對數學基本觀念有明確的認識，也會善加利用數學，更有欣賞的能力，却因爲在考試時考得不理想，那我們可說他們的數學程度低嗎？似乎不可統言之。何況，考試並不應該主用以評定學生的程度，而僅是達成敎學目的的一種手段。

總之，我認爲，我們要分辨學生數學程度之高低，不應單以考試結果來衡量，應從多方面來識別，例如前面所提到的數學基本觀念的認識，數學的欣賞能力與運用。此外，還有對數學的興趣濃淡，亦會影嚮其程度，或者，可以說興趣影嚮學習。大體上說，對某事有興趣，則其成就往往較大。學習也不例外，如果對數學有濃厚的興趣，則會時加研究探討，其得益自然多，進而更有欣賞數學的能力，程度自然也高了啊！

數學教育

數四 黃美玲

學生方面，就普通一般中學生而言，有人以爲數學不好，是資力不夠。然而，那雖然也是一個原因，主要的還是在於學生的興趣。在中學的階段，大家的智力相差無幾，只是各人的興趣不同。有的喜歡理科，對數學當然比較有興趣，在學習上，自然比較容易。偏愛文科的同學，對文學作品欣賞，對數學可能就沒多大的興趣，學習起來可能就不甚帶勁兒，自然不可能希望他們有很好的表現。再說，即使是反應不那麼靈活的人，只要他有興趣學習，還是一樣能有所表現的。所以，我認爲，學不好數學，並不是眞正因爲太笨的緣故。只是，怎樣使學生有興趣呢？又怎樣維持他們的興趣呢？這都有賴老師的幫助和輔導。

關於數學之教學，教師若能以自信及愉快之心情處之，自能有效地克服教學上之困難。要達成數學各項之目標及教育目的，在教學時，應該要充分準備教材，適當地選擇教學方法，對課室之活動要注意有效之指導，最重要的是心理問題之有效處理，還有就是教學結果之估量。現分別說明於下：

1. 教材之準備：教材之選取與組織及徹底瞭解，是最基本的。使教學有效，教材必須有適度之難易程度。怎樣使敍述的教材讓學生容易瞭解與消化吸收？這都是問題。無論如何，適宜的教科書，必須可資利用，若有教案之利用，則對教材之選擇較爲方便與詳盡。教學時，若爲權宜之計，有時亦可顚倒其順序或捨棄某些書中之教材，或補充適宜而生動之教材，但以不發生不銜接的問題爲原則。此外，老師亦可自編講義，而在教材組織方面，應該根據學生心理，作適當的處理。自然，我們不能期望中學生能充分瞭解與領會每一種數學的結構與組織；可是，學習認識某一課程基本概念，以及利用其知識而吸收之，却並非是不可能的。由重複的應用及與新教材的關係，此基本概念即可深刻地印之於心。這就得賴教材之選取及其適當之組織了。

2. 教學方法之適當選擇：教學法之適當與否，對教學之成敗，亦有甚大之影響。教學法也應該以學生爲重心而加以選擇。怎樣明晰地講解教材，使學生有興趣聽講呢？如何啓發他們的思想呢？都應該加以愼重考慮。記得在一片教學電影上看過，一位老師教數學時，不用任何課本，只是幫助學生發掘問題，指導他們如何去想，讓他們自己去找尋答案。這種教學法用得雖現不很廣；但是，也有其價値存在。不是嗎？學生如果對一個問題反復的思考，他一定有所獲益的。同時，設計教學法也可以用之於數學教學之實施。其實，教學法那麼多，那一種最好呢？這是說不上來的，只是要靠老師自己的經驗和學生的情形而決定使用什麼教法就是了。

3. 課室活動之有效指導：教學時課室活動，如能加以有效之指導，則教學效果自然好。介紹新教材時，重要的觀念可特別強調，更應使學生能獲得參加課室的問答，以趨向與之有關的教材之認識，以及其原理及其推廣之發展爲目標。所以，教師方面需要相當之能力與安排，以心理的方法補取教材，更要有控制及領導課室活動等的技術，以期指導有效。

4. 心理問題之有效處理：此卽學生個別懸殊之調節。我們不能希望兩個人的心智能力與興趣完全一樣。如何去適應學生的個別差異？是一個極其重要的問題。有的學生能力較低，對數學可能有畏怯心理。這時候，老師該如何設法使他們對數學有興趣呢？方法固然很多，主要的是要使他們明瞭數學並不如他們所想像的那麼艱澀，再慢慢設法改變教材內容，給他們較簡單的作業，使他們覺得有能力而產生自信心，很可能就激起他們的興趣。又文組的學生，大多不很喜歡數學而致放棄，作爲老師的，應使教材降至某一個限度，以保持其良好成績，則可以提高他們的興趣，不使他們感到太難。對於智力較高之學生，可使其有發揮能力的機會。因此，在教材方面，可以給與補充教材，使其對較難而與課程有關之有趣問題，亦有能力解決，則對其思考之幫助甚大。否則，如不設法給與補充教材或較難之作業，則可能會使他們失去對數學的興趣。

最後，說到教學結果之估量。在新教材介紹時，學生的反應就可大致顯示出來了。要是教學結果不理想，可作補救教學，以期收到預期的教學效果。

三、課程標準與教科書

漫談數學與

前言

自從數學與國語文同被列爲重要課程之後，數學教育遂爲一般人所重視。爲求普及數學教育，在教材及教法上都已力求改進。時代在演進，知識也隨着改變。爲了趕上世界潮流，配合國情，數學教育的改變最大。僅就我個人對數學與中學數學教育之膚淺見識，作一略述如下：

一、什麼是數學
二、數學教育之困難與幾個教學問題
三、課程標準與教科書
四、關於聯考問題與學生數學程度之高低

一、什麼是數學

無論是學習數學，或者是教數學，對數學有了基本上的瞭解，學習時可除去不知數學究竟是怎樣深奧難解之畏怯心理，教的時候，明白數學的特性，把握最中心的問題，則可增加教學效果。

究竟什麼是數學呢？我以爲，數學是一種科學，是一種藝術，是一種語言，更爲未定元及公設的系別。

大凡有組織，有系統的知識，就是科學。數學的知識特別富有系統與組織的特性，而其應用，無所不至：從抽象到實體的，從抽象到抽象的，以及生活中的事物，莫不受數學的控制。每種有成就的學問，其重要的結果，往往受一個數學公式的約束。不但自然科學依賴數學爲基本工具，社會科學以及藝術等，也不例外。只是，數學與實體科學却迥異其趣。數學是以抽象的不能觸及其存在的觀念爲研究的基礎；却可存於人之心。數學的形式，大體上是一種由假設到結論的學問，偏重在推理。不論假設有何意義，只管推理得合理不合理。所以，有人說數學只是一種思想的形式。

一般人都知道藝術講求的是眞、善與美。藝術家畢生追求眞，表揚善，表現美。藝術作品可供人以欣賞的滿足，使人自欣賞中陶冶人的性情，接近眞善美，數學的本質就在講究眞，隨時隨地，僞的隨時摒棄。數學家之意境，所謂冰清玉潔，不涉物慾功利之念，可謂至善至美。至於數學之應用所至，對造福人群貢獻，更可謂至善。數學中更有美的表現，函數之圖形，蘊蓄豐富，比自然界中能發現之圖形更多更美。能說數學不是藝術嗎？

數學，是一種通俗語言，不分地域人種，皆能懂得。而數學語言，是「言之意，意其所言。」所以，它是一種正確愼密的語言。數學中以未定元爲基礎，而任何其他事物皆有明確之定義，所以，數學語言具有其明確之特性。

最後，說到數學爲未定元及公設的系別。任何一種科學，必須有若干未定元作基礎，討論它們之間的關係，得到種種重要的結果成爲一種學問。數學是科學中典型的學問，更不能例外。數學中的未定元因數學的類別各有整套的未定元。未定元係無定義名詞，可以形容，可由意識領會。屬於抽象的，不易用定義說其究竟爲何物。公理公設係無需證明，或無法證明之理，所言之事，完全屬於意識中之虛構，可承認其存在，亦可不承認其存在，故羅素曾有有關於數學之名言：「關於數學，問題不在是否應該這樣說，而是不知道究竟數學講的是什麼？」

二、數學教育之困難與幾個教育問題

目前，就一般情形來說，數學教育仍有其困難，這一方面是學生的責任，另一方面也是老師的責任。

漫談數學教育

數四　戴樂生

自古以來，數學一直在人類思想中扮演非常重要的角色，十八世紀以後，由于先輩們的努力和天才，已經使數學居于人類思考的主流，今日似乎沒有一樣科學不和數學發生關連，而數學本身的發展更爲驚人，凡一切可邏輯地思考的東西都變成數學所討論的範圍。因此世界各國都感到過去的數學教育方法已經不適用了，紛紛按著他們自己的國情重新設計一套新的數學教育計畫。

在台灣，我們的教育界也深有此感，如今雖然已經重新編出一套新的課標準，但我希望那不是作爲以後的永恒標準。筆者在此僅以四年數學生涯的感想作一個簡短的報告，以表明筆者對數學教育的一些想法。

什麼是數學？歷來的數學家都發表過一些他們的意見，在此我不必重述。不過我常發覺有些人或初通數學的人，以爲數學祇是一種計算的工具，我承認數學在某些部分是需要計算的，但我相信一種無意義的計算，絕對沒有永恒學習的價值。好些年前，在美國曾經有一陣子提倡將數學教育放在生活中，凡是日常生活中可能遇到的數學問題都當作是數學來教授，于是學生們在這方面表現的很有興趣且成績也不錯，但到大學以後，甚至最簡單的推理問題也不會。這並非數學沒有學習遷移性，而是那種生活中的數學問題根本不是數學。

從近世數學的觀點來看，數學是一般化的，而非特殊性，數學的本身就是一種“思想的方法”，而一般所謂的計算祇不過是此種思想方法中的運算符號而已，而生活中的數學問題祇是數學的一些特例。因此當我們把 2 + 3 = 5 看作是一種計算時，牠所代表的意義僅止于此。但若從「思想的方法」來處理時，那我們所獲得的資料就多了，牠可以被看作一種自然數系對加法的封閉性，也可看作含二個元素的集合和含三個元素的集合合起來成爲單一含五個元素的集合。

數學是一種描述抽象觀念的符號，今天人類的推理能力完全要依靠數學符號或數學的意義才能令人理解，所以數學變成一種思想通訊的工具。數學有嚴格的邏輯法則從整數論的除法定理（ division　algorathm　）中，我們推出環論和體論中的一般性定理，這一切的推理都是邏輯的。

因此不論何種數學教育方式，一定要保留這種觀念，我們要教導學生從最淺近的例子中認識一般性的抽象觀念。于是這就牽涉到如何教的問題了。事實上一切的癥結就在于此，不過我們祇能原則性的說明一下吧！一位優秀的專業教師必須注意到人類學習心理。他必須尋求這些答案：人類的心智是如何開始知道數學是一種思想的方式，是一種通訊的媒介，是描述自然現象的方法。這些觀念的形成不是一朝一夕就可辦到的，在長期的數學教育過程中，從小學一直到大學，一定要有一套完整的詳細計畫。今天我們的教育制度是學美國的，因此一切都很方便，不必浪費大量的金錢去重新設計，但這不是永遠的打算。做爲一個中學教員也許永無機會參與這些籌劃的工作，因此我覺得還是少開口爲妙，但對于自己的本門似乎應該有點建議，一個優良的教師，最重要的是幫助學生能夠融會貫通整個教材，要達到此種目的，教師就不能完全依靠課本內的教材，選擇性的講述和補充是必須的。教材中有很多的東西學生自己可以看懂的，我們在教時，就應該設法用別的途徑也可以達到同樣的結論，譬如講向量空間時定義向量的內積就有好幾種方法，從不同的定義下，可以推出相同的定理來。要幫助學生如何去思考問題，這是很困難的一件工作，因爲你已經具備有推理的能力，而他才開始。但如果要教師能夠正確的教導學生如何思考，那他本身當然要具有相當的數學涵養。還有一些問題是有關于實際的教學問題，譬如說教本啦，上課時數啦等，也很重要最後似乎要提的是數學名詞的中譯問題，這也常見教學上的一個難題，但最好要讓學生瞭解名詞定義的眞正含義和使用的範圍，而不要讓學生死記那些名詞。

我覺得每一個數學教師都應該知道：『數學教育的基本目的是發展吾人的理解力和對量與空間關係的分析力，使吾人得以洞悉周遭的環境並進而鑑賞數學的結構美，養成正確思考並有效的利用此等能力改善吾人的生活。』

今天我們雖然知道數學的重要性，但我們並沒有好好在這方面努力。一次大戰後，波蘭人認爲要提高自己國家的學術地位，首先要從數學開始，因此他們在拓樸學方面很有成就，可惜二次大戰，使他們的國家再度受到摧殘。民國47年12月陳省身博士在台大法學院禮堂中作學術演講時提到台灣向這方面發展也是很好的，祇可惜我們的教育無法達到那種目標。因此我在想是否我能在教育下一代中，趨近這個目標。不過我自己感覺當我們所學愈來愈高深時，距離實際的生活圈子，也愈來愈遠。但這和我們原來的想法並不衝突，因爲數學祇是一種思想的方式，我們不斷的學習鑽研，所希望達到的就是更新的思想方式。因此我相信在中等數學教育過程中，建立這種接受新知的容量是必須的，然後他才能和大學教育連接。

五十七年度數學學會組織表

理事長：	陳江寧		
文教股長：	劉家興		
總務股長：	呂廸人		
康樂股長：	劉重志		
體育股長：	胡漢長		
衞生股長：	吳美瓊		
理事：	楊壬孝	陳國梁	鍾維澄
	陳忠貴	林福來	林江泉
	高月嬌	陳雙鯉	裘倘正
	林昭南	胡明宏	華秀英
	劉家興	張英傑	徐玉淞
	盧憲基	呂廸人	林美秀
	張自綸	黃鴻洲	羅淑媛
	師岱濤	高寶泰	
常務監事：：	張瑞欽		
監事：	林義埔	戴樂生	陳豐連
	王若萍	陳柏榮	季大明
	曾煥瑜		

師大數學系刊　3

發行人：康洪元
出版者：國立台灣師範大學數學學會
學會負責人：陳江寧
主編：張英傑
編輯：何聖宗　鄧玉儀
季大明　張自綸
封面設計：李明雄
印刷者：永明打字印刷廠
廠址：臺北市貴陽街二段一〇七號
師大訓課刊字一三〇號
中華民國五十七年六月二〇日出版