國立台灣師範大學數學系

108 學年度大學申請入學指定項目甄試試題

筆試二　填充題

説明與注意事項：

(甲) 本試卷共十題（共兩頁），每題 10 分，合計 100 分。

(乙) 作答時間 90 分鐘（下午 3：30～5：00）。

(丙) 請將答案寫在答案本內，否則不予計分。

(丁) 答案需註明題號，但不需寫計算過程，答案若為分數請化為最簡分數。

(戊) 交卷時答案本與本試卷一併交回。

1. 已知向量 $\overrightarrow{a}=(\sqrt{2},1)$，$\overrightarrow{b}=(1,-\sqrt{2})$，若存在正數 k、t 使得向量 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+(t^2+1)\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{d}=-k\overrightarrow{a}+\dfrac{1}{t}\overrightarrow{b}$ 互相垂直，則 k 的最小值為__(一)__。

2. Fibonacci 數列 $\langle a_n \rangle$ 定義為 $a_1=a_2=1$，且 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geq 3)$。求 a_{2019} 的個位數為__(二)__。

3. 求無窮級數

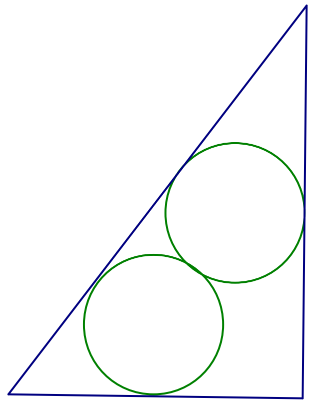
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3+5+7+\cdots+(2k+1)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3+5}+\frac{1}{3+5+7}+\cdots\cdots+\frac{1}{3+5+7+\cdots+(2k+1)}+\cdots\cdots$$

的和為__(三)__。

4. 在坐標平面上，設橢圓 $\Gamma: 4x^2+9y^2-8x-18y-23=0$。若點 A,B 的坐標分別為 $(0,5),(6,2)$，且 $P(x,y)$ 為橢圓 Γ 上一點，則 ΔABP 的最大面積為__(四)__。

5. 已知整係數多項式$h(x)=x^3+5x^2+nx+15$僅有一實根。若該實根為有理數，則所有可能的n所成的集合為__(五)__。

6. 如圖，在邊長為$3,4,5$的直角三角形中有兩個半徑相同的圓互相外切。若此兩圓都與斜邊相切，且兩圓分別與兩股相切，則圓的半徑為__(六)__。



7. 考慮$1,2,3,4,5$的排列，將此排列中的兩數碼交換位置，稱為一次動作。由排列σ出發，換到12345的最少動作次數稱為σ的距離，例如：31245的距離是2，因為$31245 \to 32145 \to 12345$至少需要2次動作。則距離是3的排列個數為__(七)__。

8. 令$f(x),g(x)$為整係數多項式。已知$f(x),g(x)$其中有一個的最高次項係數為32，且$f(x)+g(x)$為10次多項式。若$(f(x))^5+(g(x))^3$也是10次多項式，則$f(x)$和$g(x)$的最高次項依序為__(八)__。

9. 甲、乙兩人輪流投籃，甲先投，直到其中一位投進為止；已知甲的命中率為$\frac{3}{5}$，乙的命中率為$\frac{2}{5}$，若X表示甲投籃的次數，則機率$P\left(X=2\right)=$__(九)__

10. 若已知實數α,β滿足$\left(\sqrt{17}\right)^{\alpha}=\sqrt{17}-\alpha$以及$\log_{\sqrt{17}}\beta=\sqrt{17}-\beta$，則$(\alpha+\beta)^2-\sqrt{17}^{\alpha}-2\log_{17}\beta=$__(十)__。