

# 國立台灣師範大學數學系

## 108 學年度大學申請入學指定項目甄試試題

### 筆試一 計算證明題

#### 說明與注意事項：

- (甲) 本試卷共五題 (共一頁)，合計 100 分。
- (乙) 作答時間 120 分鐘 (下午 1:20 ~ 3:20)。
- (丙) 請將計算或證明過程依序寫在答案本上，否則不予計分。
- (丁) 交卷時答案本與本試卷一併交回。

- 一、20 分 設  $p, q$  為實數使得  $x^3 + 3x^2 + px - q = 0$  的三根成等差數列，且同時使得  $x^3 + (2-p)x^2 - (q+3)x - 8 = 0$  的三根成等比數列，求  $p, q$  之值。
- 二、學校的交通車，欲載送 10 位學生，路途上會經過 5 個停靠站，車子有學生要下車才會停靠，假設每位學生必在此 5 個站的其中一站下車，而且在任何一站下車的機率皆為  $\frac{1}{5}$ ，每位學生的選擇彼此相互獨立。請問：
- (1) 5 分 車子在第二個站不停靠 (沒有學生要下車) 的機率為何？
  - (2) 15 分 此交通車在停靠站停車之次數的期望值為何？
- 三、在坐標平面上，已知點  $A$  之坐標為  $(5, 1)$ ，圓  $C$  方程式為  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 。若  $P$  為  $x$  軸上的一點， $Q$  為圓  $C$  上的一點，滿足  $\overline{PA} + \overline{PQ}$  為最小，試求：
- (1) 10 分  $\overline{PA} + \overline{PQ}$  之最小值。
  - (2) 10 分 點  $Q$  之坐標。
- 四、令  $\lambda_1, \lambda_2$  為非零實數且  $P$  為二階可逆方陣。假設  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  為一個二階方陣滿足
- $$AP = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}。$$
- (1) 5 分 試證  $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$ 。
  - (2) 15 分 試證  $a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$ 。
- 五、三邊長皆為正整數的三角形稱為 Diophantus 三角形，令  $a_n$  表示最大邊長為  $n$  的 Diophantus 三角形的個數。例如：
- 當  $n = 1$  時，三邊邊長為  $(1, 1, 1)$ ，只有 1 種，即  $a_1 = 1$ ；
- 當  $n = 2$  時，三邊邊長可以是  $(2, 2, 2), (2, 2, 1)$ ，共 2 種，即  $a_2 = 2$ ；
- 當  $n = 3$  時，三邊邊長可以是  $(3, 3, 3), (3, 3, 2), (3, 3, 1), (3, 2, 2)$ ，共 4 種，即  $a_3 = 4$ 。
- (1) 5 分 請問  $a_6 = ?$  (須說明理由。)
  - (2) 15 分 請問  $a_n = ?$  (Hint: 先猜測  $a_n$  的公式，並用數學歸納法證明之。)