

# 國立臺灣師範大學數學系

## 106 學年度轉系、輔系、雙主修考試試題

### Part I 高中數學

#### 一、多重選擇題(共 4 題，每題 5 分；合計 20 分)

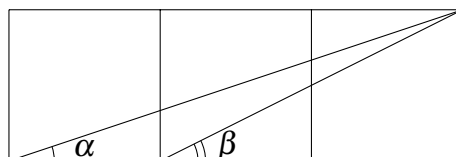
1. 多項式方程式  $2x^3 + 3x^2 - 12x - 3 = 0$  共有幾個相異實根？  
(A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 3                      (E) 4
2. 設  $a, b$  為兩個正實數，且已知  $\log_{10} a = 3.6$ 、 $\log_{10} b = 1.8$ 。請問  $\log_{10}(a+2b)$  之值最接近下列哪個選項？  
(A) 3.6                      (B) 4.5                      (C) 5.4                      (D) 6.3                      (E) 7.2
3. 設三角形  $ABC$  中， $\overline{AB} = 5$ ,  $\overline{AC} = 7$ ,  $\overline{BC} = 8$ 。令點  $I$  為  $\triangle ABC$  的內心，並且由  $I$  向  $BC$  邊引垂線，設垂足為點  $D$ 。則  $\overline{ID}$  的長度為何？  
(A) 1                      (B)  $\sqrt{2}$                       (C)  $\sqrt{3}$                       (D) 2                      (E)  $\sqrt{5}$
4. 坐標空間中有一點  $P$ ，其到  $xy$ -、 $yz$ -、 $zx$ -平面的距離分別為 10, 17,  $\sqrt{261}$ 。請問點  $P$  到原點  $O$  的距離為何？  
(A) 18                      (B)  $\sqrt{325}$                       (C) 19                      (D)  $\sqrt{389}$                       (E) 21

#### 二、填充題(共 4 題，每題 5 分；合計 20 分)

5. 「二元字串」指的是由 0, 1 兩種符號所形成的字串。在長度為 7 的二元字串中，沒有連續出現三個 0、也沒有連續出現三個 1 的字串有 \_\_\_\_\_ 個。
6. 設  $A, B$  為兩個二階方陣。已知  $A+B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $A-B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 。則  $A^2 - B^2 =$  \_\_\_\_\_。
7. 某零件製造公司在甲、乙、丙三間工廠生產相同規格的螺絲，三間工廠的產量比例分別是甲佔 25%、乙佔 40%、丙佔 35%。甲、乙、丙三間工廠所生產螺絲中，不良品的比例依序為 5%、8%、7%。今公司從所有生產出來的螺絲中抽檢出一個不良品，則該不良品係由甲工廠所生產的機率為 \_\_\_\_\_。
8. 盧卡斯數列 (Lucas sequence)  $\{L_n\}$  的定義是： $L_1 = 2, L_2 = 1; L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$  對所有的正整數  $n$  均成立。則極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} =$  \_\_\_\_\_。

#### 三、計算證明題(共 1 題 10 分)

9. 右圖是三個相同大小的正方形排列而成的圖形，試求角  $\alpha$  與角  $\beta$  之和。



## Part II 微積分

10. (10 pts) Solve the initial value problem

$$\begin{aligned}\mathbf{r}''(t) &= -3 \cos t \mathbf{i} - 3 \sin t \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}, \\ \mathbf{r}(0) &= 3 \mathbf{i} + 8 \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}'(0) = 3 \mathbf{j} + 6 \mathbf{k}.\end{aligned}$$

11. (a) (6 pts) Does the improper integral  $\int_0^{\infty} \ln t \, dt$  converge or diverge?

(b) (6 pts) Use the part (a) to find  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{1/x} (\ln t) e^{-2017/x} \, dt$ .

12. (12 pts) Find the interval of convergence for  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(\ln n)^3}$ .

13. (10 pts) Find the integral  $\int \sqrt{6+6t+t^2} \, dt$ .

14. (6 pts) Prove that the following inequality

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$$

holds for all real numbers  $x$  and  $y$ .