國立台灣師範大學數學系

104 學年度大學申請入學指定項目甄試試題

筆試一　計算證明題

說明與注意事項：
(甲) 本試卷共五題 (共兩頁)，合計 100 分。
(乙) 作答時間 120 分鐘（下午 1：20 ～ 3：20）。
(丙) 請將計算或證明過程依序寫在答案本上，否則不予計分。
(丁) 交卷時答案本與本試卷一併交回。

一、 (1) 已知多項式 $x^4 - 4x^3 + 22x^2 - 36x + 81 = (f(x))^2$ ，求多項式 $f(x)$。(10 分)

(2) 找出讓

$$n^4 - 4n^3 + 22n^2 - 36n - 326$$

是完全平方數的所有可能的整數 n。 (10 分)

二、 證明：對所有的正整數 n ，不等式

$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right) \times \left(1+\frac{1}{2^3}\right) \times \left(1+\frac{1}{3^3}\right) \times \ldots \times \left(1+\frac{1}{n^3}\right) \leq 3 - \frac{1}{n}$$

恆成立。 (20 分)

三、 設有 34 個均不為 0 的相異實數，其中正數有 p 個、負數有 q 個。已知從這 34 個數中任取相異三數的乘積為正數的機率是 $\frac{1}{2}$。

(1) 試證：$C_3^p + pC_2^q = C_3^q + qC_2^p$，其中 $C_k^m = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$。 (10 分)

(2) 試求出所有可能的數對 (p, q)。 (10 分)

四、 設三角形 ABC 的面積為 S，$\overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b,\ \overline{AB}=c$，且對應於頂點 A,B,C 的中線長為 m_a,m_b,m_c。

(1) 證明：$a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{2}{\sqrt{3}}(a\,m_a+b\,m_b+c\,m_c)$。 (10 分)

(2) 證明：$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$。 (10 分)

五、 已知滿足方程組 $\begin{cases}x+y+z=8\\ ax+2y+6z=20\\ x-2y+bz=-13\end{cases}$ 的 (x,y,z) 為空間中的一條直線 L。

(1) 求 a 與 b 之值。 (10 分)

(2) 給定空間 $A(1,6,-1)$、$B(2,6,0)$ 兩點，已知直線 L 上可取 C、D 兩點使得 $ABCD$ 恰為正四面體的四個頂點，求 C、D 兩點的坐標。 (10 分)