

國立台灣師範大學數學系

102 學年度大學甄選入學指定項目甄試試題

筆試二 填充題

說明與注意事項：

- (甲) 本試卷共十題（分成三頁），每題 10 分，合計 100 分。
- (乙) 時間：90 分鐘（下午 3：30～5：00）。
- (丙) 請將答案寫在答案本內，否則不予記分。
- (丁) 答案需註明題號，但不需寫計算過程，答案若為分數請化為最簡分數。
- (戊) 交卷時答案本與本試卷一併交回。

1. 設 a 為實數。若對於所有實數 x ， $\left| \frac{x^2 + ax + 3}{x^2 + x + 2} \right| < 2$ 恆成立，則 a 的範圍為 (一)。
2. 若等比數列的第三項是 $1-i$ ，第五項是 $\frac{1}{16} + \frac{i}{16}$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，則此等比數列的公比為 (二)。(有兩解)
3. 從 1,2,3,4,5,6,7 等數字中選取三個排成三位數，數字不重複，則排出來的是 3 的倍數但不是 5 的倍數的整數有 (三) 個。
4. 桌上有十個骰子，當中有一個骰子出現 5 點的機率是 $\frac{1}{2}$ 、而出現其他點數的機率均等；其他九個都是均勻的骰子。用隨機的方式選取一個骰子來投擲。在出現 5 點的情況下，被選取的骰子是不均勻骰子的條件機率為 (四)。(答案若為分數，請化為最簡分數)

5. 在電腦裡有一公定的對照表 (ASCII), 將英文字母 A, B, ..., Z 及空格等字元分別對應至一整數, 其對應數字如下表所示:

| | | | | | | | | | |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 字母 | 空格 | A | B | C | D | E | F | G | H |
| ASCII 碼 | 32 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 |
| 字母 | I | J | K | L | M | N | O | P | Q |
| ASCII 碼 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 |
| 字母 | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| ASCII 碼 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |

我們可利用此對照表在 facebook™ 傳送保密訊息給朋友。我們與朋友約定所有的英文字母及空格皆以對照表中的整數替代, 例如 “HE IS DAVID” 的訊息, 用 “7269327383326865867368” 取代, 然後將此數字字串的奇數項排在矩陣的第一列, 偶數項排在第二列, 形成以下矩陣:

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 & 8 & 3 & 6 & 6 & 8 & 7 & 6 \\ 2 & 9 & 2 & 3 & 3 & 2 & 8 & 5 & 6 & 3 & 8 \end{bmatrix},$$

再與二階方陣

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

相乘得到

$$AB = \begin{bmatrix} 11 & 24 & 7 & 13 & 14 & 7 & 22 & 16 & 20 & 13 & 22 \\ 20 & 39 & 12 & 23 & 25 & 12 & 36 & 27 & 34 & 23 & 36 \end{bmatrix},$$

最後依上述規則反求得字串

“11202439071213231425071222361627203413232236” 傳送給朋友, 如此他人便不能立即得知傳送之內容。現在在此規則下, 你接收到數字字串

“233825411222213516271932”, 可以轉成矩陣

$$\begin{bmatrix} 23 & 25 & 12 & 21 & 16 & 19 \\ 38 & 41 & 22 & 35 & 27 & 32 \end{bmatrix},$$

其所代表之訊息為 (五)。

6. 坐標平面上圓 C 通過點 (0, 2), 且 C 與兩直線 $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ 、 $y + 1 = 0$ 皆相切, 則圓 C 的方程式為 (六)。

7. 坐標空間中 $\triangle ABC$ 的三頂點分別為 $A(1, -1, 1), B(-3, 2, 1), C(5, -4, 3)$ ， P 為 $\triangle ABC$ 內部一點，且令 P 到 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 的距離分別為 x, y, z ，則 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值為(七)。(答案若為分數，請化為最簡分數)

8. 函數 $f(x) = \cos^4 x + 3\sin^4 x$ 的最小值為(八)。

9. 設 θ 為實數。若 $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$ ，則 $A^5 =$ (九)。

10. 袋中有編號分別為1到6的六個球。從袋中隨機選取兩球，令隨機變數 X 表示在被選取的兩球中，球號比袋中剩下的球號都大的球的個數（例如如果選到2號和3號球，那袋中剩下的就是1, 4, 5, 6號球；因為選出的球中並沒有比1, 4, 5, 6都大的球號，故這種情況下 $X=0$ ）。隨機變數 X 的期望值為(十)。
(答案若為分數，請化為最簡分數)