

國立台灣師範大學數學系

102 學年度大學甄選入學指定項目甄試試題

筆試一 計算證明題

說明與注意事項：

- (甲) 本試卷共五題（共兩頁），合計100分。
(乙) 時間：120分鐘。（下午1：20～3：20）
(丙) 請將計算或證明過程依序寫在答案本上，否則不予計分。
(丁) 交卷時答案本與本試卷一併交回。

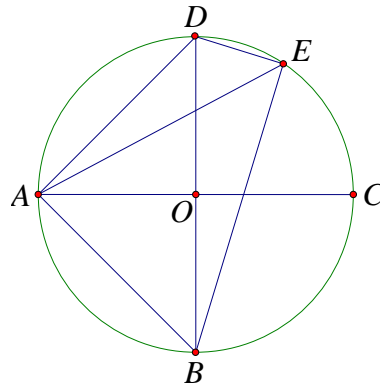
- 一、 (1) 直角三角形的兩股長為 a, b ，斜邊長為 c 。試證

$$c^3 > a^3 + b^3.$$

(8 分)

- (2) 如下圖，圓 O 內二直徑 $\overline{AC}, \overline{BD}$ 互相垂直，在劣弧 DC 上任取一點 E 。

試證：以 \overline{AE} 為一邊的正方形面積等於四邊形 $ABED$ 面積的二倍。



(12 分)

- 二、 設函數 $f(x) = x^2 - 6x + 5$ 。求坐標平面上滿足聯立不等式

$$\begin{cases} f(x) + f(y) \leq 0 \\ f(x) - f(y) \geq 0 \end{cases}$$

的所有點 (x, y) 所形成的區域面積。

(20 分)

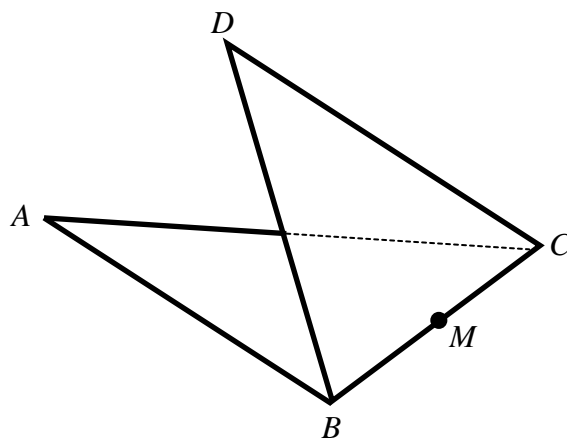
- 三、 設 a, b, c, d 為實數且 $a \neq b$ ， $c \neq d$ ， $f(x), g(x)$ 為滿足 $f(a) = f(b)$ 及 $g(c) = g(d)$ 的實係數二次多項式。已知 $f(x) - g(x)$ 為常數多項式，證明：
- (1) $a + b = c + d$ 。 (8分)
- (2)

$$\frac{f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{g(c) - g\left(\frac{c+d}{2}\right)} = \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2.$$

(12分)

- 四、 如下圖所示，三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 為空間中的兩個等腰三角形， M 為線段 \overline{BC} 的中點。令 $\overline{AB} = \overline{AC} = a, \overline{DB} = \overline{DC} = b, \overline{BM} = \overline{CM} = c$ 和 $\overline{DA} = x$ 。

- (1) 已知向量內積 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ ，求證 $x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2c^2}$ 。 (8分)
- (2) 已知 $x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2c^2}$ ，求證向量內積 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ 。 (12分)



- 五、 師大數學系舉辦系徽設計比賽，入圍決選的有四件作品，由 10 名學生代表進行不記名投票，每人投兩票，且兩票須投不同作品。在沒有廢票的情況下，試問：
- (1) 四件作品的得票情形共有幾種？ (8分)
- (2) 得票數最高的作品恰有一件的票數分佈有幾種？ (12分)