

國立台灣師範大學數學系

101 學年度大學甄選入學指定項目甄試試題

筆試一 計算證明題

說明與注意事項：

- (甲) 本試卷共五題（共兩頁），合計100分。
- (乙) 時間分配：120分鐘。（下午1：20～3：20）
- (丙) 請將計算或證明過程依序寫在答案本上，否則不予計分。
- (丁) 交卷時答案本與本試卷一併交回。

一、(1) 請將 $x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$ 因式分解成（或直接寫成）兩個整係數四次多項式的乘積。（8分）

(2) 試證：對任意正整數 n ， $1 + 5^{2n} + 5^{4n} + 5^{6n} + 5^{8n}$ 都是合數（即都不是質數）。（8分）

二、樂透四星彩一共分成「正彩」與「組彩」兩種玩法，每期開出一組四位數字（0000 ~ 9999）的中獎號碼，正彩是玩家下注的四位數與開獎號碼相同且順序完全一致才有中獎，而組彩只要下注的四位數與開獎號碼相同（不計順序）即可中獎。例如：開獎號碼為 0717 時，下注購買 1707 正彩的玩家沒有中獎，而下注購買 1707 組彩的玩家則可中獎。假設每一組號碼開出的機率都相同，並設下一期的四星彩開獎號碼中恰好出現一次數字 1，試在此條件下求下列各機率：

(1) 購買下期四星彩一注 1323 「正彩」可中獎的機率。（8分）

(2) 購買下期四星彩一注 1323 「組彩」可中獎的機率。（8分）

三、坐標空間中，給定一直線 $L: x = y = z - 1$ 。已知點 P 在 xy 平面上，且點 P 到 x 軸、 y 軸及直線 L 的距離都相等，試求此共同的距離。（20分）

四、設兩數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ 及 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{100}$ 滿足

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 2b_{n+1} \\ b_{n+1} = a_{n+1} - 3b_n \end{cases}, n = 1, 2, 3, \dots, 99。$$

(1) 試求 2×2 階矩陣 A ，使得 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ ， $n = 1, 2, 3, \dots, 99$ 。 (10分)

(2) 已知 $a_{99} = 3^{50}$ ， $b_{100} = 4 \cdot 3^{49}$ ，試求 a_1 及 b_1 之值。 (14分)

五、設 ΔABC 的三邊長分別為 a, b, c ，而 Δ 是此三角形的面積。試證：

(1) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta$ 。 (12分)

(2) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$ 。 (12分)