110 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄）　筆試（一）{參考解答}

一、設 n 為大於16 之整數，試證 $n^2-31n+241$不可能為完全平方數。

【參考解答】：

$n^2-31n+241=(n-15)^2+(16-n)<(n-15)^2$，

$n^2-31n+241=(n-16)^2+(n-14)>(n-16)^2$，

$\Rightarrow (n-16)^2<n^2-31n+241<(n-15)^2$。

故得知　$n^2-31n+241$ 介於兩連續整數的平方之間，它必不為完全平方數。

二、將正整數 1, 2, ⋯, 10 任意排成一列，證明至少可以從中選取出從小到大或從大到小的四個數。

【參考解答】：令 x(i)表示以 i 為第一項有可能構造出最長遞增數列的最大長度。如果不存在長度為 4 的遞增數列，則 x(i)可能的值為 1, 2, 3。因為$\frac{10}{3}>3$，所以至少有四個數的 x(i)一樣。假設這四個數為$a_1<a_2<a_3<a_4$。如果 a_2 在 a_1 後面，則所有從 a_2 開始的遞增數列，把 a_1 加進去後是一個長度更長的遞增數列。所以 x(a_1)不可能等於 x(a_2)。因此我們知道 a_2 必須在 a_1 前面。同樣的，a_3 在 a_2 前面，a_4 在 a_3 前面。因此 a_4, a_3, a_2, a_1 就形成一個遞增數列。

三、已知 x, y 均為大於 2 的實數，求滿足

$$x+y+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{y-2}-2=2(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2})$$

的 x, y 之值。

【參考解答】 $f(x)=x-1+\dfrac{4}{x-2}-2\sqrt{x+2}$

$$=\frac{1}{x-2}[(x-1)(x-2)+4-2(x-2)\sqrt{x+2}]$$

$$=\frac{1}{x-2}[(x-2)^2+(\sqrt{x+2})^2-2(x-2)\sqrt{x+2}]$$

$$=\frac{1}{x-2}[x-2-\sqrt{x+2}]^2$$

而 $f(x)+f(y)=0 \Rightarrow x-2-\sqrt{x+2}=0 \Rightarrow x^2-5x+2=0$

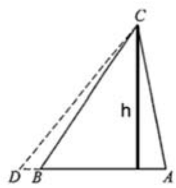
$\Rightarrow x=y=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ 。

四、給定一個銳角三角形 ABC，由三角形的三頂點分別畫出到對邊的 高，設其中最長的為 h，試證$2\sqrt{3}h$大於等於三角形的周長。

【參考解答】:

(a)當銳角三角形 ABC 為正三角形時，則等號成立。

(b)若銳角三角形 ABC 不為等腰三角形時，我們可以將其化簡為等腰三角形。



不失一般性的，可令$\angle A > \angle B > \angle C$，則$\angle A > \frac{\pi}{3}$ 。

容易知道由頂點 C 所畫之高即為題目給定的 h。由圖可知，若延長$\overline{AB}$至點 D 使得$\overline{AC}=\overline{AD}$。則等腰三角形 ACD 上最長的高亦為 h，且三角形 ACD 的周長比三角形 ABC 更長。因此，若三角形 ACD 可滿足題意，三角形 ABC 亦可。

(c)等腰三角形 ACD 上最長的高亦為 h，周長為 S，證明：$2\sqrt{3}h \geq S$

因為$S=2\overline{AC}+\overline{CD}$，$\overline{CD}=2\overline{AC}\times sin(\frac{\angle A}{2})$，$h=\overline{AC}\times \sin(\angle A)$

因此，$2\sqrt{3}h \geq S$ 等價於 $\sqrt{3}\sin(\angle A) \geq 1+\sin(\frac{\angle A}{2})$，($\frac{\pi}{3}< \angle A < \frac{\pi}{2}$)

令 $x=\sin(\frac{\angle A}{2})$，$(\frac{1}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2})$。上式可改為 $\sqrt{3}\times 2x\sqrt{1-x^2} \geq 1+x$

即$0 \geq 12x^4-11x^2+2x+1=(2x-1)(x+1)(6x^2-3x-1)$。

因為 x 的取值範圍為$(\frac{1}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2})$，因此式子成立。