

# 110 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

## 第四區(台南一中)數學科口試(一)試題

問題：已知一函數 $f$ 之定義域為所有整數，且滿足下列條件：

(1).  $f(0) \neq 0$

(2).  $f(1) = 3$

(3). 對任意整數 $a, b$ ，有 $f(a)f(b) = f(a + b) + f(a - b)$

試求 $f(7)$ 和 $f(9)$ 之值。

### 【參考解答】

因為  $f(1)f(0) = f(1) + f(1) \Rightarrow 3f(0) = 6 \Rightarrow f(0) = 2$

$$f(1)f(1) = f(2) + f(0) \Rightarrow 3 \times 3 = f(2) + 2 \Rightarrow f(2) = 7$$

$$f(2)f(1) = f(3) + f(1) \Rightarrow 7 \times 3 = f(3) + 3 \Rightarrow f(3) = 18$$

$$f(3)f(1) = f(4) + f(2) \Rightarrow 18 \times 3 = f(4) + 7 \Rightarrow f(4) = 47$$

$$f(4)f(3) = f(7) + f(1) \Rightarrow 47 \times 18 = f(7) + 3 \Rightarrow f(7) = 843$$

$$f(3)f(2) = f(5) + f(1) \Rightarrow 18 \times 7 = f(5) + 3 \Rightarrow f(5) = 123$$

$$f(5)f(4) = f(9) + f(1) \Rightarrow 123 \times 47 = f(9) + 3 \Rightarrow f(9) = 5778$$

# 110 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

## 第四區(台南一中)數學科口試(二)試題

問題：試討論方程式 $x^6 - x^3 - x^2 - x + 5 = 0$ 之實數解個數。

【參考解答】

$x^6 - x^3 - x^2 - x + 5 = 0$ ，其中 $x$ 是實數

$$\Rightarrow 2x^6 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 10 = 0$$

$$\Rightarrow (x^6 - 3x^2 + 2) + (x^6 - 2x^3 + 1) + (x^2 - 2x + 1) = -6$$

$$\text{故得到 } 0 \leq (x^2 - 1)^2(x^2 + 2) + (x^3 - 1)^2 + (x - 1)^2 = -6$$

此為矛盾，故原方程式無實數解