110 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第 5 區(屏東高中)　筆試(二)　編號：＿＿＿＿＿＿

注意事項 ：

(6) 時間分配: 1 小時。

(7) 本試卷共4題，滿分21分。第一題5分，第二題5分，第三題5分，第四題6分。

(8) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(9) 不可使用電算器。

(10)試題與答案一同繳回。

一、設x、y與z皆為質數，試求出所有滿足下列方程式的序對(x,y,z)：
$x^y-z=1$，$z\le 2021$。

二、給定 30 個互不相等的正整數，這些數字均小於或等於 155。試證明這些數字兩兩相減(大數減小數)所得的差之中，至少有四個相等。

三、試求出下列級數之值：

$$\sum_{n=1}^{2021}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}$$

四、已知m為實數，考慮圓系C: $x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$。

(1) 上列所表實圓最大面積 = ＿＿＿＿＿，此時 $m=$ ＿＿＿＿＿。

(2) 上列所表圓截x軸所得最大弦長 = ＿＿＿＿＿。

110 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第 5 區(屏東高中)　筆試(二)　編號：____________

注意事項 ：

本試卷共4題，滿分21分。第一題5分，第二題5分，第三題5分，第四題6分。

一、設x、y與z皆為質數，試求出所有滿足下列方程式的序對(x,y,z)：
$x^y-z=1$，$z\le 2021$。

[參考解答]

因為 $x^y-1=z$　且 $x,y>1$

所以 $x-1$ 整除 x^y-1，唯有 $x=2$ 時 x^y-1 才有可能是質數。

因為 $2^y-1=z\le 2021$，所以需求質數 y 使得 $2^y-1\le 2021$，因此 $y=2,3,5,7$

$z=2^2-1,2^3-1,2^5-1,2^7-1=3,7,31,127$ 所以 $(x,y,z)=(2,2,3),(2,3,7),(2,5,31),(2,7,127)$

二、給定 30 個互不相等的正整數，這些數字均小於或等於 155。試證明這些數字兩兩相減(大數減小數)所得的差之中，至少有四個相等。

[參考解答]

將 30 個正整數由小到大排列，記為$a_1,a_2,\ldots\ldots,a_{30}$。

若命題不成立，則$a_{30}-a_{29},a_{29}-a_{28},\ldots\ldots,a_2-a_1$共 29 個數之中，沒有四個相等。

可知$1,2,\ldots\ldots,9$至多出現三次，而 10 至多出現兩次。

由$154\ge a_{30}-a_1=(a_{30}-a_{29})+(a_{29}-a_{28})+\cdots+(a_2-a_1)\ge 3(1+2+\cdots+9)+2\times 10=155$，可得出矛盾。

三、試求出下列級數之值：

$$\sum_{n=1}^{2021}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}\ .$$

[參考解答]

$$\sum_{n=1}^{2021}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}=\sum_{n=1}^{2021}(-1)^n\left(\frac{n}{(n-1)!}+\frac{n+1}{n!}\right)$$

$$(-1)\left(\frac{1}{0!}+\frac{2}{1!}\right)+\left(\frac{2}{1!}+\frac{3}{2!}\right)-\left(\frac{3}{2!}+\frac{4}{3!}\right)+\cdots+(-1)\left(\frac{2021}{2020!}+\frac{2022}{2021!}\right)$$

$$=-1+(-1)\frac{2022}{2021!}$$

$$=-1-\frac{2022}{2021!}$$

四、已知m為實數，考慮圓系C: $x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$。

(1) 上列所表實圓最大面積 = ________，此時 $m=$ ________。

(2) 上列所表圓截x軸所得最大弦長 = ________。

[參考解答] **(1)** 實圓最大面積 $=4\pi$，此時 $m=\ -1$

(2) 最大弦長$=\sqrt{14}$

(1) 圓C之半徑 $r=\frac{1}{2}\sqrt{4(m-1)^2+4m^2-4(3m^2-2)}=\sqrt{-m^2-2m+3}$

$$=\sqrt{-(m+1)^2+4}\quad\le\quad\sqrt{4}=2$$

所以 r 之最大值 $=2$，實圓最大面積 $=\pi\cdot 2^2=4\pi$，此時 $m=\ -1$

(2) 令 $y=0$，$x^2+2(m-1)x+3m^2-2=0$ 二根為 x_1、x_2 得知

$$\begin{cases} x_1+x_2=-2(m-1) \\ x_1x_2=3m^2-2 \\ \triangle=(m-1)^2-3m^2+2\quad>0 \end{cases}$$

設所截弦長 $\equiv\overline{AB}=|x_1-x_2|$，則

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2&=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\\&=4(m-1)^2-4(3m^2-2)\\&=-8\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+14\quad\le 14\end{aligned}$$

所以 $\overline{AB}$ 之最大值 $=\sqrt{14}$