

110 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題
第 5 區(屏東高中)

口試(一)

設 $P(x)$ 是一個實數係數多項式，且

$W(x) = (x + 1)P(x - 1) - (x - 1)P(x)$ 是一個常數多項式。

試求出所有滿足條件的多項式 $P(x)$ 。

[參考解答]

令 $W(x) = (x + 1)P(x - 1) - (x - 1)P(x)$

將 $x = -1$ 帶入 $W(x)$ ， $W(-1) = 2P(-1)$ ，

將 $x = 1$ 帶入 $W(x)$ ， $W(1) = 2P(0)$ ，

因為 $W(x)$ 為常數，所以， $P(-1) = P(0)$ 。

令 $c = P(-1) = P(0)$ (常數)

令 $Q(x) = P(x) - c$ ，則 $0, -1$ 是 $Q(x)$ 的根，

$Q(x)$ 可以表示成 $Q(x) = x(x + 1)R(x)$ ，其中 $R(x)$ 是實數係數多項式。

$P(x) = Q(x) + c = x(x + 1)R(x) + c$ 帶入 $W(x)$ 得

$$(x + 1)((x - 1)xR(x - 1) + c) - (x - 1)(x(x + 1)R(x) + c)$$

化簡表示為

$$x(x - 1)(x + 1)(R(x - 1) - R(x)) + 2c$$

因為 $W(x)$ 為常數，所以 $x(x - 1)(x + 1)(R(x - 1) - R(x))$ 也是常數

$$R(x - 1) - R(x) = 0$$

所以， $R(x)$ 為常數，設為 k 。

$$Q(x) = kx(x + 1)$$

$$P(x) = Q(x) + c = kx(x + 1) + c$$

所以， $P(x) = kx^2 + kx + c$ ($k \neq 0$, 二次多項式)，或 c ($k = 0$, 常數多項式)。

110 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第 5 區(屏東高中)

口試(二)

已知 $\triangle ABC$ 為直角三角形，其中 $\overline{AB} = 13$ 、 $\overline{AC} = 5$ 、 $\overline{BC} = 12$ 。

一個質點 P 沿著 \overrightarrow{CB} 作直線運動。

設 $\overline{PB} = e$ 、 $\overline{PA} = d$ ，試問當 e 值愈來愈大時， $(d - e)$ 值的變化為何？

[參考解答] $(d - e)$ 值將趨近於 12

如右圖， $d^2 = (e + 12)^2 + 5^2$ 得

$$d = \sqrt{e^2 + 24e + 169}$$

$$\Rightarrow d - e = \sqrt{e^2 + 24e + 169} - e$$

$$= \frac{e^2 + 24e + 169 - e^2}{\sqrt{e^2 + 24e + 169} + e}$$

$$= \frac{24 + \frac{169}{e}}{\sqrt{1 + \frac{24}{e} + \frac{169}{e^2}} + 1}$$

由上式可知，當 e 值愈來愈大時， $\frac{24}{e}$ 、 $\frac{169}{e}$ 與 $\frac{169}{e^2}$ 值會愈來愈小，所以可推得

$(d - e)$ 值將會趨近於 12.

