110 學年度新北市(新店高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）試題

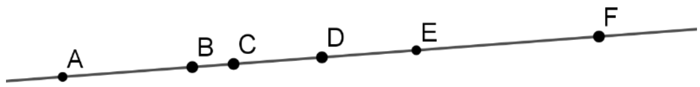
編號：____________（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一：一直線上相異 6 點 A、B、C、D、E、F(如圖)，其中 B 點為 A、D 兩點之中點，E 點為 C、F 兩點之中點。

已知 $\overline{BC}\cdot\overline{BF}=\overline{AB}^2$，試證 $\overline{AE}\cdot\overline{DE}=\overline{EF}^2$。



問題二：給定一遞減實數列 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$，

滿足 $a_1+a_2+\cdots+a_n<2n$，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2>n^2$。

證明：$a_1+a_2>n$。

問題三：已知數列 $a_1=1$, 且 $3a_{n+1}=5a_n+\sqrt{9+16a_n^2}$

(a) 求 a_n 的一般式。

(b) 試證對於所有的正整數 n， 滿足$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}<\frac{3}{2}$。

<試題結束>

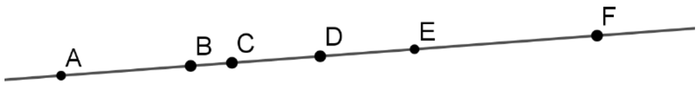
110 學年度新北市(新店高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

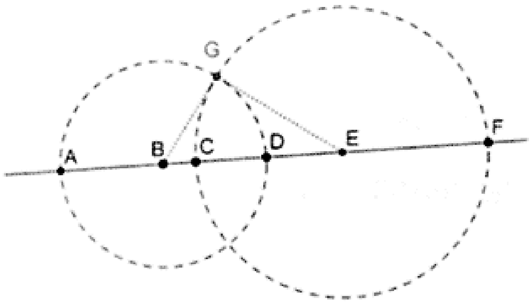
數學科筆試（一）解答

問題一：(16 分)

一直線上相異 6 點 A、B、C、D、E、F(如圖)，其中 B 點為 A、D 兩點之中點，E 點為 C、F 兩點之中點。已知 $\overline{BC}\cdot\overline{BF}=\overline{AB}^2$，試證 $\overline{AE}\cdot\overline{DE}=\overline{EF}^2$。



【參考解答】



以 B 為圓心，$\overline{AB}$為半徑做圓 B。

以 E 為圓心，$\overline{EF}$為半徑做圓 E。

設圓 B 與圓 E 交於 G，

$\because \overline{BC}\cdot\overline{BF}=\overline{BG}^2$，

由圓冪定理知 $\overleftrightarrow{BG}$ 為圓 E 之切線，

故 $\overline{BG}\perp\overline{GE}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \overline{EF}^2 &= \overline{EG}^2 \\
&= \overline{BE}^2-\overline{BG}^2 \\
&= \left(\overline{BD}+\overline{DE}\right)^2-\overline{BD}^2 \\
&= 2\overline{BD}\cdot\overline{DE}+\overline{DE}^2 \\
&= \overline{DE}\left(2\overline{BD}+\overline{DE}\right) \\
&= \overline{DE}\cdot\overline{AE}
\end{aligned}$$

問題二：(16 分)

給定一遞減實數列 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$，滿足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 2n$ ，$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 > n^2$。證明：$a_1 + a_2 > n$。

【參考解答】

由 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 > n^2$。

得到 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n > n$ 。

假設 $a_1 \geq n$ 馬上有 $\boldsymbol{a_1 + a_2 > n}$

否則存在 $\mathrm{k} \geq 1, \delta > 0$ 使得：$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \delta = n$。

據此和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 2n$

得到$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n - \delta < n$ 。

$$
\begin{aligned}
n^2 &< a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \\
&= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 + a_{k+1}\delta + a_{k+1}(a_{k+1} - \delta) + a_{k+2}^2 + \cdots + a_n^2 \\
&\leq a_1(a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \delta) + a_{k+1}(a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n - \delta)
\end{aligned}
$$

$< na_1 + na_{k+1} \leq na_1 + na_2$。得證。

問題三：(17 分)

已知數列 $a_1 = 1$, 且 $3a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{9 + 16a_n^2}$

(a) 求 a_n 的一般式。

(b) 試證對於所有的正整數 n，滿足$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} < \frac{3}{2}$。

【參考解答】

(a) 原式化簡成 $a_{n+1}^2 - a_n^2 - \frac{10}{3}a_{n+1}a_n = 1$。

且 $a_n^2 - a_{n-1}^2 - \frac{10}{3}a_n a_{n-1} = 1$ 。

兩式相減得 $(a_{n+1} - a_{n-1})(a_{n+1} - \frac{10}{3}a_n + a_{n-1}) = 0$

又因為遞增，所以 $a_{n+1} - \frac{10}{3}a_n + a_{n-1} = 0$ 為齊次差分方程。

由特徵根 3，$\frac{1}{3}$ 與 $a_1 = 1, a_2 = \frac{10}{3}$，解得 $a_n = \frac{8}{3}(3^n - (\frac{1}{3})^n)$ 。

(b) 因為

$$a_n = \frac{8}{3}(3^n - (\frac{1}{3})^n) = 3 \times \frac{8}{3}(3^{n-1} - (\frac{1}{3})^{n+1}) > 3 \times \frac{8}{3}(3^{n-1} - (\frac{1}{3})^{n-1}) = 3a_{n-1}$$

所以 $\frac{1}{a_n} < \frac{1}{3a_{n-1}}$ 。因此

$$S_n \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i}(\frac{1}{3})^{i-1} < \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^i = \frac{3}{2}$$