110 學年度新北市(新店高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科口試試題

編號：____________（學生自填）

注意事項：

1. 本口試卷共兩題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在計算紙上作答，口試答辯時間 15 分鐘，並繳回計算紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的細節。

問題一：已知 $a_1, a_2, \cdots, a_{110}$ 均為正實數且滿足

$$\frac{1}{2+a_1}+\frac{1}{2+a_2}+\cdots+\frac{1}{2+a_{110}}=\frac{1}{2}$$

試求 $a_1 a_2 \cdots a_{110}$ 的最小值。

問題二：定義數列 $a_n = 2.1 \times 3.05^n - 0.94 \times 1.42^n$，求 $\frac{a_{2021}}{a_{2020}}$ = ？

（無條件捨去至小數點後第四位，$\log 2 = 0.301, \log 3 = 0.477, \log 7 = 0.845$)計算機只當輔助使用，還需要詳細說明原因。

<試題結束>

110 學年度新北市(新店高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科口試參考解答

問題一：已知 $a_1,a_2,\cdots,a_{110}$ 均為正實數且滿足 $\frac{1}{2+a_1}+\frac{1}{2+a_2}+\cdots+\frac{1}{2+a_{110}}=\frac{1}{2}$，試求 $a_1a_2\cdots a_{110}$ 的最小值。

【參考解答】

設$x_i=\frac{2}{2+a_i}\geq 0$，則有$a_i=2\cdot\frac{1-x_i}{x_i}$，$n=1,2,\cdots,110.$ 由條件可得 $\sum_{i=1}^{110}x_i=1$。

$$
\begin{aligned}
&a_1a_2\cdots a_{110}\\
&=2^{110}\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{110}}(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_{110})\\
&=2^{110}\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{110}}(x_2+x_3+\cdots+x_{110})(x_1+x_3+\cdots+x_{110})\cdots(x_1\\
&\qquad +x_2+\cdots+x_{109})\\
&\geq 2^{110}\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{110}}\cdot 109\sqrt[109]{x_2x_3\cdots x_{110}}\cdot 109\sqrt[109]{x_1x_3\cdots x_{110}}\cdot\cdots\\
&\qquad \cdot 109\sqrt[109]{x_1x_2\cdots x_{109}}\\
&=2^{110}\cdot 109^{110}\\
&=218^{110}
\end{aligned}
$$

問題二： 定義數列 $a_n = 2.1 \times 3.05^n - 0.94 \times 1.42^n$，求 $\frac{a_{2021}}{a_{2020}}$ $= ?$（準確至小數點後第四位，$\log 2 = 0.301, \log 3 = 0.477, \log 7 = 0.845$）

【參考解答】

答案為 3.0499。為了簡化計算，我們令

$$\begin{aligned} a &= 2.1 \\ b &= 0.94 \\ \lambda &= 3.05 \\ \mu &= 1.42 \end{aligned}$$

因此，a_n 可以寫成

$$a_n = a\lambda^n - b\mu^n$$

則

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{a\lambda^{n+1} - b\mu^{n+1}}{a\lambda^n - b\mu^n} \\ &= \frac{\lambda - \mu(\frac{b}{a})(\frac{\mu}{\lambda})^n}{1 - (\frac{b}{a})(\frac{\mu}{\lambda})^n} \end{aligned}$$

再經由計算我們得到

$$\lambda - \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\lambda + \mu)(\frac{b}{a})(\frac{\mu}{\lambda})^n}{1 - (\frac{b}{a})(\frac{\mu}{\lambda})^n}$$

以下我們考慮 $n = 2000$ 的情形並證明

$$\frac{(\lambda + \mu)(\frac{b}{a})(\frac{\mu}{\lambda})^n}{1 - (\frac{b}{a})(\frac{\mu}{\lambda})^n} < 10^{-5} \qquad (*)$$

如果不等式(*)是對的，那麼這個題目就完成了。我們先證明

$$1-(\frac{b}{a})(\frac{\mu}{\lambda})^n > \frac{1}{10} \qquad (**)$$

因為$\frac{b}{a},\frac{\mu}{\lambda}<\frac{1}{2}$ ，所以$(\frac{b}{a})(\frac{\mu}{\lambda})^n<\frac{1}{2^{n+1}}$ ，接著利用對數表中的

$\log_{10}2=0.301$ 我們知道

$$(\frac{b}{a})(\frac{\mu}{\lambda})^n<10^{2021\times(-0.301)}<10^{-600} \qquad (***)$$

這證明了不等式(**)。最後，我們用$\lambda+\mu<10$以及不等式(**)(***)

的結果，就可推出不等式(*)。