110 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（二）　　編號：＿＿＿＿

（時間一小時）

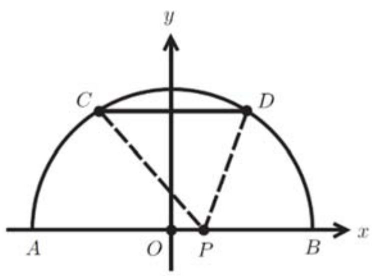
注意事項：

1. 本試卷共七題**填充題**，每題 3 分，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、設 a 為實數，若坐標平面上滿足 $|x-y|+|x+y|\le 2$ 與 $|x-2y|+|2x+y-5|\le a$ 的區域面積為 1，求 a 值。

二、試求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{2021}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)^2}+\sqrt{n^2(n+2)}}$ 的值。

三、一個半徑為 1 的半圓 O，其中 $\overline{AB}$ 為直徑，在 $\overline{AB}$ 上有一點 P 使得 $\overline{OP}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$，若有一弦 $\overline{CD}$ 平行於 $\overline{AB}$ 且 $\angle CPD=54^\circ$，問 $\overline{CP}^2+\overline{DP}^2$ 的值。



四、某間餐廳後場有 A,B,C,D 四位廚師，四位廚師出餐數量的比例分別為 $10\%, 20\%, 30\%, 40\%$，依過往經驗四位廚師出餐錯誤的比例個別為 $4\%, 3\%, 2\%, 1\%$；現在顧客拿到一份製作錯誤的餐點，試求此份餐點是由 B 廚師製作的機率。

五、請問數列 $\left[\dfrac{1^2}{2021}\right],\left[\dfrac{2^2}{2021}\right],\left[\dfrac{3^2}{2021}\right],\cdots,\left[\dfrac{2021^2}{2021}\right]$ 中共有幾個相異整數?

註：$[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數。

六、設 $P(x)$ 為實係數多項式，其次數為 2019 次，且對於 $k=1,2,...,2019$，均有 $(k+1)P(k+1)-kP(k)=1$，求 $P(2021)$。

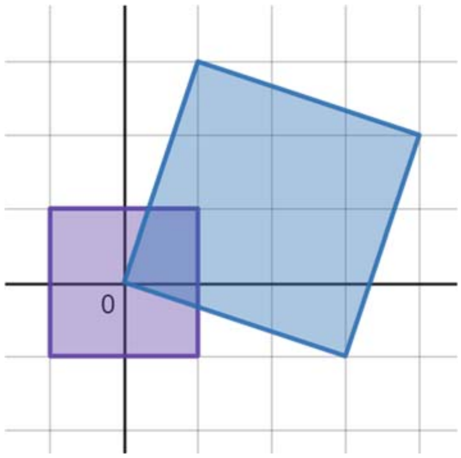
七、箱中有 2 根香蕉、3 顆芭樂、4 顆蓮霧，每次隨機抽取一個水果食用，試求芭樂為三種水果中最先被吃完的機率。

110 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（二）【解答】

一、【解】

坐標平面上滿足$\Gamma_1:|x-y|+|x+y|\le 2$的區域為中心$(0,0)$，一頂點為$(1,1)$的正方形。
$\Gamma_2:|x-2y|+|2x+y-5|\le a$的區域則是對角線為$x-2y=0$及$2x+y-5=0$的正方形，其中$a$控制其大小。由於$x-2y=0$過$\Gamma_1$的中心，且重疊部分為1，$\Gamma_2$的邊界必通過$(0,0)$，亦即$(0,0)$滿足$|x-2y|+|2x+y-5|=a$，所以$a=5$。



二、【解】

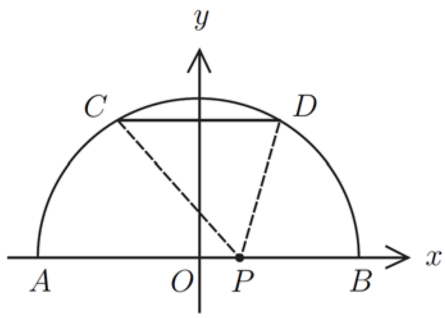
原式可化簡為

$$\sum_{n=1}^{2021}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}=\sum_{n=1}^{2021}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2\sqrt{n(n+2)}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2021}\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\cdots+\frac{1}{\sqrt{2021}}-\frac{1}{\sqrt{2023}})$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2022}}-\frac{1}{\sqrt{2023}})$$

三、【解】



設定坐標系使得O為坐標中心, 而$\overline{AB}$在x-軸上, 而半圓位於上半平面, 如圖所示。

記$D=(\cos\theta,\sin\theta),\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, 而

$C=(-\cos\theta,\sin\theta),\ P=(\frac{1}{\sqrt{7}},0)$. 則

$$\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=(-\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{7}})^2+\sin^2\theta+(\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{7}})^2+\sin^2\theta$$

$$=\cos^2\theta+\frac{2}{\sqrt{7}}\cos\theta+\frac{1}{7}+\sin^2\theta+\cos^2\theta-\frac{2}{\sqrt{7}}\cos\theta+\frac{1}{7}+\sin^2\theta$$

$$=2+\frac{2}{7}=\frac{16}{7}.$$

註：此結果與$\angle CPD$的大小無關。

四、【解】

已知 $P(A)=10\%$、$P(B)=20\%$、$P(C)=30\%$、$P(D)=40\%$

$P(F|B)=4\%$、$P(F|B)=3\%$、$P(F|C)=2\%$、$P(F|D)=1\%$ (note: F=False)

則 $P(B|F)=\dfrac{P(B\cap F)}{P(F)}$

$$=\frac{P(B\cap F)}{P(A\cap F)+P(B\cap F)+P(C\cap F)+P(D\cap F)}$$

$$=\frac{P(B)P(F|B)}{P(A)P(F|A)+P(B)P(F|B)+P(C)P(F|C)+P(D)P(F|D)}$$

$$=\frac{20\%\times 3\%}{10\%\times 4\%+20\%\times 3\%+30\%\times 2\%+40\%\times 1\%}$$

$$=\frac{3}{10}$$

五、【解】

$$\frac{(k+1)^2}{2021}-\frac{k^2}{2021}=\frac{2k+1}{2021}$$

因為 $\dfrac{2k+1}{2021}>1 \Leftrightarrow k>1010$

所以 $\left[\dfrac{(k+1)^2}{2021}\right]>\left[\dfrac{k^2}{2021}\right]$ 當 $k>1010$

$\left[\dfrac{(k+1)^2}{2021}\right]=\left[\dfrac{k^2}{2021}\right]$ 或 $\left[\dfrac{k^2}{2021}\right]+1$ 當 $1\le k\le 1010$

因此 $\left[\dfrac{k^2}{2021}\right]$ 在 $k=1011$ 到 2021 皆相異整數

共計 1011 個

因為 $\left[\dfrac{1^2}{2021}\right]=0,\left[\dfrac{1010^2}{2021}\right]=504,\left[\dfrac{1011^2}{2021}\right]=505$

所以 $\left[\dfrac{k^2}{2021}\right]$ 在 $k=1$ 到 1010 提供了

0 到 504 共計 505 個相異整數

因此總共有 1011+505=1516 個。

六、【解】

由 $(k+1)P(k+1)-kP(k)=1$ 可得 $P(k)=\dfrac{k-1+P(1)}{k}, k=1,2,...,2020.$。因此 2020 次多項方程式 $xP(x)-x+1-P(1)=0$ 的根為 $1,2,...,2020$ ，即

$$xP(x)-x+1-P(1)=\alpha(x-1)(x-2)\cdots(x-2020)$$

其中 α 為常數。將 $x=0$ 代入上式，可得

$$\alpha=\frac{1-P(1)}{(-1)\cdot(-2)\cdots(-2020)}=\frac{1-P(1)}{2020!}$$ 。

將 2021 代入，可得

$$2021P(2021)-2021+1-P(1)=\frac{1-P(1)}{2020!}\cdot 2020\cdot 2019\cdots 1$$ ，

因此，$P(2021)=1$ 。

七、【解】

9 個水果隨機排列數=$\dfrac{9!}{2!3!4!}$=1260

- 最後兩個依序為:

  香蕉+蓮霧的排列數＝$\dfrac{7!}{1!3!3!}$=140

  蓮霧+香蕉的排列數＝$\dfrac{7!}{1!3!3!}$=140

- 最後三個依序為:

  香蕉+蓮霧+蓮霧的排列數＝$\dfrac{6!}{1!3!2!}$=60

  蓮霧+香蕉+香蕉的排列數＝$\dfrac{6!}{3!3!}$=20

- 最後四個依序為:

  香蕉+蓮霧+蓮霧+蓮霧的排列數＝$\dfrac{5!}{1!3!1!}$=20

- 最後五個依序為:

  香蕉+蓮霧+蓮霧+蓮霧+蓮霧的排列數＝$\dfrac{4!}{1!3!}$=4

因此，芭樂為三種水果中最先被吃完的機率

$$=\left(140+140+60+20+20+4\right)/1260=?384/1260=32/105$$ 。