110 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（一）　　編號：______

（時間二小時）

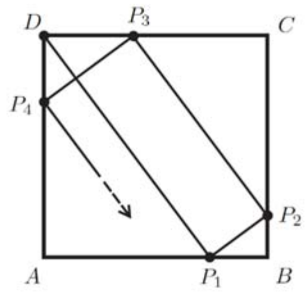
注意事項：

1. 本試卷共五題**計算證明題**，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、如圖，有一個單位正方形 $ABCD$，一個質點 P 最初位在 D 處，然後開始在正方形內部移動，移動的規則如下：首先直線行進到 P_1，其中 $\overline{AP_1}:\overline{P_1B}=3:1$，在每次碰到正方形的邊時，都逆時針轉 90 度再直線前行到下一個邊，於是依序得到 $P_2, P_3, P_4, \cdots$。

(9 分)

試找出最小的正整數 N，使得對所有 $n \ge N,\ \overline{P_1P_n} > \dfrac{1}{4}$。



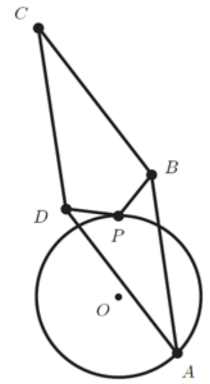
二、如圖，一個平面上的機械裝置，設計原理如下：

(9 分)

有一個半徑為 r 的圓，圓心為 O，圓 O 上有一個固定點 P，另有一個在圓上的動點 A。

考慮一個活動的菱形 $ABCD$，菱形邊長為 L，而這個菱形的 B, D 兩點是由 $\overline{PB}=\overline{PD}=l$ 決定，其中 l 也是一個定值，且滿足 $0<L-l<2r$。

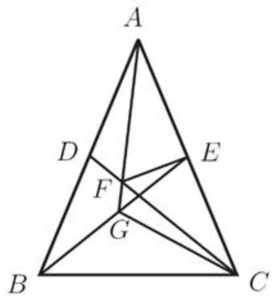
試證：當 A 在圓 O 上移動的時候，C 點的軌跡是直線的一部分。



三、如圖，在 ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$D, E$ 分別是 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 上的中點。通過 E 作一條垂直於 $\overline{AC}$ 的直線交 $\overline{CD}$ 於 F，而 $\overline{AF}$ 的延長線交 $\overline{BE}$ 於 G，最後連接 $\overline{CG}$。

(10 分)

試證：$\angle CBE = \angle GCE$。



四、設數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,\ a_{n+1}=a_n-a_{n-1}+\dfrac{a_n{}^2}{a_{n-2}}, n\ge 3$。

(10 分)

證明：$\{a_n\}$ 是整數數列。

五、設 a, b 為大於 2 的兩相異正整數，若存在一個正整數數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$（其中 k 為正整數）使得 $a_0=a, a_{k+1}=b$，而且對所有的 $i=0,1,\ldots,k$，$\dfrac{a_i a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}}$ 都是整數，我們稱 a, b **可被長度為 k 的正整數數列連結**。

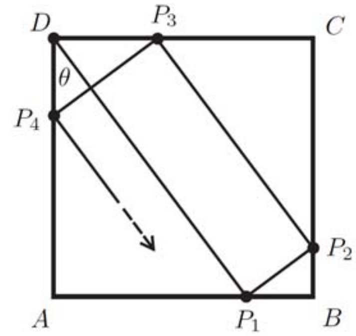
(11 分)

試證明：若 p 為大於 2 的質數，則 p 與 $p+1$ 無法被長度為 1 的正整數數列連結，但可被長度為 2 的唯一一個正整數數列連結。

110 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（一）【解答】

一、【解】



如圖，令 $r=\tan\theta=\dfrac{3}{4}$, 觀察可得以下結果：

$\overline{AP_1}=r, \overline{P_1B}=1-r$

$\overline{BP_2}=(1-r)\tan\theta=r-r^2, \overline{P_2C}=1-(r-r^2)=1-r+r^2$

$\overline{CP_3}=(1-r+r^2)\tan\theta=r-r^2+r^3, \overline{P_3D}=1-(r-r^2+r^3)=1-r+r^2-r^3$

$\overline{DP_4}=(1-r+r^2-r^3)\tan\theta=r-r^2+r^3-r^4, \overline{P_4A}=1-(r-r^2+r^3-r^4)=1-r+r^2-r^3+r^4$

欲求 $\overline{P_1P_n}>\dfrac{1}{4}$, 已知 $\overline{P_1P_{4\ell+2}}, \overline{P_1P_{4\ell+3}}, \overline{P_1P_{4\ell+4}}>\dfrac{1}{4}\ \ \forall \ell\in\mathbb{Z}, \ell\geq 0.$

只要再確定 $\overline{P_1P_{4\ell+1}}>\dfrac{1}{4}$ 的條件即可。

由 $\overline{P_1P_{4\ell+1}}=\overline{AP_1}-\overline{AP_{4\ell+1}}=r-(\sum_{k=1}^{4\ell+1} r\cdot(-r)^{k-1})=r-\dfrac{r(1-(-r)^{4\ell+1})}{1+r}$

$=\dfrac{1}{1+r}(r+r^2-r-r^{4\ell+2})=\dfrac{1}{1+r}(r^2-r^{4\ell+2})=\dfrac{r^2}{1+r}(1-r^{4\ell})$

$=\dfrac{\frac{9}{16}}{\frac{7}{4}}(1-(\dfrac{3}{4})^{4\ell})=\dfrac{9}{28}(1-(\dfrac{3}{4})^{4\ell})>\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow 1-(\dfrac{3}{4})^{4\ell}>\dfrac{7}{9}\Rightarrow(\dfrac{3}{4})^{4\ell}<\dfrac{2}{9}$ 或 $(\dfrac{4}{3})^{4\ell}>\dfrac{9}{2}.$

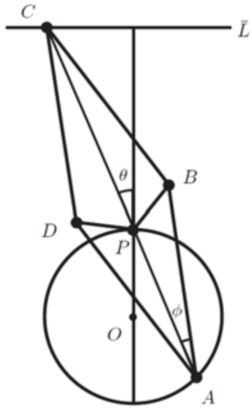
代 $\ell=1$ 得 $(\dfrac{4}{3})^4=\dfrac{256}{81}<\dfrac{9}{2}.$ 代 $\ell=2$ 得

$(\dfrac{4}{3})^8=(1+\dfrac{1}{3})^8=1+C_1^8(\dfrac{1}{3})+C_2^8(\dfrac{1}{3})^2+\cdots+C_8^8(\dfrac{1}{3})^8\geq 1+\dfrac{8}{3}+\dfrac{8\cdot 7}{2}\cdot\dfrac{1}{3\cdot 3}=1+\dfrac{8}{3}+\dfrac{28}{9}=\dfrac{61}{9}>\dfrac{9}{2}.$

所以 $\overline{P_1P_5}<\dfrac{1}{4}, \overline{P_1P_9}>\dfrac{1}{4}$ 。

綜合上述討論可得 $\overline{P_1P_n}>\dfrac{1}{4}\ \ \forall n\geq 6$, 故滿足題意的 $N=6$.

二、【解】



連接$\overline{OP}$並延長為直線，並作通過C且垂直$\overleftrightarrow{OP}$的直線$\overline{L}$。

以下將證明：C的軌跡是直線$\overline{L}$的一部分。

令$\overline{CP}=t, \overline{PA}=s,$ 並記θ,ϕ 如圖，則

① $2\overline{BA}\cos\phi=t+s \Rightarrow 2L\cos\phi=t+s$

② $2\overline{OP}\cos\theta=s \Rightarrow 2r\cos\theta=s$

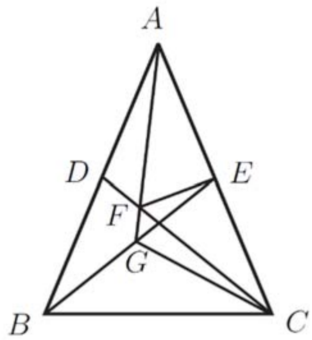
③ ΔABP 中，餘弦定理知

$$\cos\phi=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AP}^2-\overline{BP}^2}{2\overline{AB}\cdot\overline{AP}}=\frac{L^2+s^2-l^2}{2\cdot L\cdot s}\Rightarrow 2L\cos\phi s=L^2+s^2-l^2$$

由此得$t\cdot\cos\theta=(2L\cos\phi-s)\cos\theta=(\frac{L^2+s^2-l^2}{s}-s)\cdot\frac{s}{2r}=\frac{L^2-l^2}{2r}$ 為定值。

故C的軌跡是直線$\overline{L}$的一部分。

三、【證明】



(A)考慮ΔABE 與ΔGAE，因為

$\angle EBA=\angle DCA=\angle EAG$ 且$\angle BEA=\angle AEG$, 所以

$\Delta ABE\sim\Delta GAE$ (AA相似)。得到$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{GE}}{\overline{EA}}$.

(B)由$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{GE}}{\overline{EA}}$得到$\frac{\overline{CE}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{GE}}{\overline{EC}}$又$\angle CEB=\angle GEC$, 所以

$\Delta CEB\sim\Delta GEC$ (SAS 相似)，

因此$\angle CEB=\angle GCE$.

四、【證明】

由題意$a_{n-2}(a_{n+1}+a_{n-1})=a_n(a_n+a_{n-2})$

得$\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-2}}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$

令$b_n=\frac{a_n+a_{n-2}}{a_{n-1}}$

則$\frac{b_{n+1}}{a_{n-1}}=\frac{b_n}{a_{n-2}}, b_3=2$

所以$\frac{b_{n+1}}{a_{n-1}}=\frac{b_n}{a_{n-2}}=\cdots=\frac{b_3}{a_1}=2$

故$b_n=2a_{n-2}$

由$b_n=\frac{a_n+a_{n-2}}{a_{n-1}}=2a_{n-2}$

得$a_n=2a_{n-1}\cdot a_{n-2}-a_{n-2}, n\geq 3.$

五、【解】

(i) 設p與$p+1$可被a連結，其中a為正整數。則$(p+a)\mid pa$，由此可推得

$(p+a)\mid p^2$。由於 p 為質數，且 $a\geq 1$，可得 $p+a=p^2$，即 $a=p(p-1)$。

此時 $a+(p+1)=p^2+1$ 而 $a(p+1)=p(p^2-1)=p(p^2+1)-2p$，所以 $a(p+1)$ 無法整除 $a+(p+1)$，得矛盾。因此 p 與 $p+1$ 無法被長度為 1 的數列連結。

（ii）設 p 與 $p+1$ 可被正整數數列 b,c 連結。 由(i)可知，b 有唯一解 $b=p(p-1)$。同理，利用(i)也可看出，$c=(p+1)p$ 可滿足 $\dfrac{c(p+1)}{c+(p+1)}$ 為整數(但由於 $p+1$ 非質數，c 到此無法確認其唯一性)。可注意到 $\dfrac{bc}{b+c}=\dfrac{p^2(p-1)(p+1)}{2p^2}$ 為整數。因此，存在正整數數列 b,c，使得 p 與 $p+1$ 可被其連結。

接著我們證明 c 的唯一性。

由於 $(c+(p+1))\mid(p+1)^2$ 且 $(c+b)\mid b^2$，其中 $b=p(p-1)$，存在兩個正整數 d_1,d_2 使得

$$(c+(p+1))d_1=(p+1)^2\cdots\cdots(1)$$

$$(c+b)d_2=b^2\cdots\cdots(2)$$

此可推得

$$(c+1)d_1\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)\cdots\cdots(3)$$

$$cd_2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)\cdots\cdots(4)$$

Case 1. $c\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$

由(3)得 $d_1\equiv 1$，由(1)可知 $1\leq d_1<p+1$，所以 $d_1=1$，即 $c=(p+1)p$。

Case 2. $c\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$

由(4)得 $d_2\equiv 0$，令 $d_2=ph_1$，代入(2)式，可得 $ch_1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$，此即 $h_1\equiv 0$，可令 $h_1=ph_2$，即 $d_2=p^2h_2$，其中 h_2 為正整數。可注意到 $d_2>b$，因此 $bd_2>b^2$，此與(2)矛盾。

因此 $c=(p+1)p$ 為唯一解。