110 學年度臺北市（陽明高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科口試解答

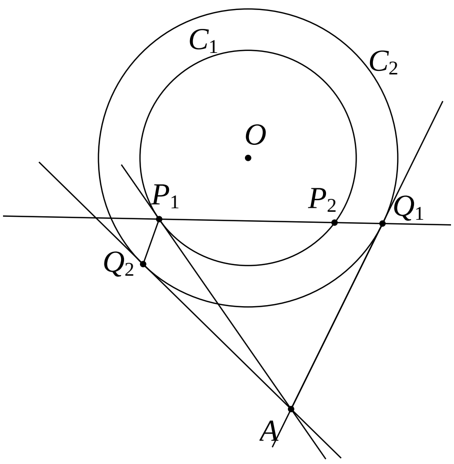
注意事項：

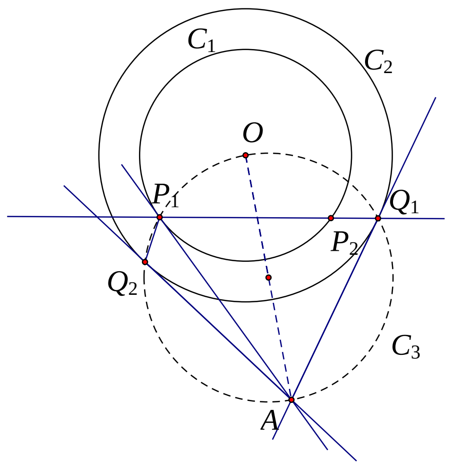
1. 本口試卷共兩大題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在本試卷作答，口試時請攜帶本試卷應試，口試答辯時間為 15 分鐘，答辯完畢後繳回本試卷。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需太專注於計算的精確度。

【問題一】 設 $C_1,\ C_2$ 為兩個同心圓，$P_1,\ P_2$ 為 C_1 上的兩點，$\overline{P_1P_2}$ 不是 C_1 的直徑；射線 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 交 C_2 於點 Q_1，過點 Q_1 作圓 C_2 的切線與過點 P_1 作圓 C_1 的切線交於點 A，再過點 A 作圓 C_2 的另一切線 $\overleftrightarrow{AQ_2}$ 切圓 C_2 於點 Q_2。

(1) 試說明 P_1,Q_1,A,Q_2 四點共圓。

(2) 若 $\angle Q_1P_1Q_2=110^\circ$，試求 $\angle Q_1P_1A$ 的度數。





提示： 考慮以 $\overline{OA}$ 為直徑的圓。

【解】 如圖所示，設 $C_1,\ C_2$ 的圓心為點 O，因為 $\overline{AP_1}$ 為 C_1 的切線，所以 $\angle OP_1A=90^\circ$。

同理，因為 $\overline{AQ_1}$、$\overline{AQ_2}$ 均為切線，所以，$\angle OQ_1A=\angle OQ_2A=90^\circ$，故 O,Q_1,A,P_1 四點共圓，O,Q_1,A,Q_2 四點共圓。又此二圓都通過 O,Q_1,A 三點故為同一圓，即

以 $\overline{AO}$ 為直徑的圓 C_3。因此，P_1, O, Q_1, A, Q_2 五點共圓。

由於 $\angle Q_1P_1A = \angle Q_1Q_2A = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AQ_1}$，$\angle Q_2P_1A = \angle Q_2Q_1A = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AQ_2}$，且 $\overline{AQ_1} = \overline{AQ_2}$，

所以

$$\angle Q_1P_1A = \angle Q_2P_1A，$$

即 $\overline{P_1A}$ 為 $\angle Q_1P_1Q_2$ 的角平分線，因而 $\angle Q_1P_1A = \dfrac{1}{2}\angle Q_1P_1Q_2 = 55°$。

【問題二】 設函數 $g(x) = x - 3\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{x}{4^n}\right]$，其中 $\left[\dfrac{x}{4^n}\right]$ 表示不大於 $\dfrac{x}{4^n}$ 的最大整數。試求滿足 $g(x) = g(2021)$ 且 $x > 2021$ 的最小正整數 x。

提示： 考慮正整數 x 的四進位表示法。

【解】 考慮正整數 x 的四進位表示法：

$$x = a_n\cdot 4^n + a_{n-1}\cdot 4^{n-1} + \cdots + a_1\cdot 4 + a_0 = (a_n\, a_{n-1} \cdots a_1\, a_0)_4，$$

其中 $0 \le a_i \le 3\ (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$。此時，我們有

$$x - 4\left[\frac{x}{4}\right] = a_0 \quad、\quad \left[\frac{x}{4}\right] - 4\left[\frac{x}{4^2}\right] = a_1 \quad、\quad \left[\frac{x}{4^2}\right] - 4\left[\frac{x}{4^3}\right] = a_3 \quad、$$

$$\cdots \quad、\quad \left[\frac{x}{4^n}\right] - 4\left[\frac{x}{4^{n+1}}\right] = a_n \quad、\quad \cdots。$$

以上各式相加，可得 $g(x) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$。

因此，由 $2021 = (133211)_4$，得知 $g(2021) = 1+3+3+2+1+1 = 11$。

又比 2021 大，且其四進位表示法的數字和也是 11 的最小的正整數為

$$(133220)_4 = 1\cdot 4^5 + 3\cdot 4^4 + 3\cdot 4^3 + 2\cdot 4^2 + 2\cdot 4 + 0 = 2024。$$

故所求的最小的正整數 $x = 2024$。