

110 學年度北一區（花蓮高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科口試試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本口試卷共 2 題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在空白紙上作答，口試時請攜帶作答紙應試，口試答辯時間 15 分鐘，並繳回作答紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的精確度。

【口試一】

對於正整數 a ，我們稱 $\frac{a(a+1)}{2}$ 為一個三角數。若 n 為一正整數試證明 n 為兩個三角數之和若且唯若 $4n+1$ 為兩個整數平方和。

【口試二】

設 $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 為一個實係數五次多項式。如果 $f(x)$ 的五個根都在單位圓上，請說明這五個根的倒數和等於五個根的和 $-a$ 。

《試題結束》

110 學年度北一區（花蓮高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科口試解答

【口試一】

對於正整數 a ，我們稱 $\frac{a(a+1)}{2}$ 為一個三角數。若 n 為一正整數試證明 n 為兩個三角數之和若且唯若 $4n+1$ 為兩個整數平方和。

【解答】

$$\begin{aligned}\text{若 } n = \frac{a(a+1)}{2} + \frac{b(b+1)}{2}, \text{ 則 } 4n + 1 &= 2a^2 + 2a + 2b^2 + 2b + 1 \\ &= (a + b + 1)^2 + (a - b)^2\end{aligned}$$

反之，若 $4n + 1 = x^2 + y^2$, $x, y \in \mathbb{N}$.

則 x, y 必然是一個奇數，一個偶數，不妨假設 $x > y$ 。

$$\text{令 } a = \frac{x+y-1}{2}, b = \frac{x-y-1}{2}$$

$$\begin{aligned}\text{則 } \frac{a(a+1)}{2} + \frac{b(b+1)}{2} &= \frac{\left(\frac{x+y-1}{2}\right)\left(\frac{x+y+1}{2}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{x-y-1}{2}\right)\left(\frac{x-y+1}{2}\right)}{2} \\ &= \frac{(x+y)^2 - 1}{8} + \frac{(x-y)^2 - 1}{8} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{4} = n.\end{aligned}$$

【口試二】

設 $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 為一個實係數五次多項式。如果 $f(x)$ 的五個根都在單位圓上，請說明這五個根的倒數和等於五個根的和 $-a$ 。

【解答】

設五個根為 $\cos \theta_j + i \sin \theta_j$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$

$$\text{則 } \sum_{j=1}^5 \cos \theta_j + i \sum_{j=1}^5 \sin \theta_j = -a$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^5 \cos \theta_j = -a, \Rightarrow \sum_{j=1}^5 \sin \theta_j = 0$$

$$\text{Now, } \sum_{j=1}^5 \frac{1}{\cos \theta_j + i \sin \theta_j} = \sum_{j=1}^5 (\cos \theta_j - i \sin \theta_j)$$

$$= \sum_{j=1}^5 \cos \theta_j - i \sum_{j=1}^5 \sin \theta_j = \sum_{j=1}^5 \cos \theta_j = -a.$$