110 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（一）

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題**計算證明題**，滿分為 49 分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、求出所有大於 1 的正整數 n 使得 $(n-1)!$ 為 n 的倍數。
(9 分)

二、設 $a,b,c,$ 為三個相異實數。已知方程式 $x^2+ax+1=0$ 和 $x^2+bx+c=0$ 恰有一個相同實根，且方程式 $x^2+x+a=0$ 和 $x^2+cx+b=0$ 也恰有一個相同實根，求 $a+b+c$ 的值。
(10 分)

三、假設小明每天記錄天氣狀況，若沒下雨則記為 S，下雨則記為 R。如果某幾天紀錄為 $SS\underline{R}SSS\underline{RRR}SS\underline{R}SSS$，則連續下雨天的次數為 3，此時我們記為 $r=3$。請注意，即使兩天沒下雨之間只夾一天下雨，那個下雨天也視為 1 次連續下雨。若二月份中，有 16 天下雨且 12 天沒下雨，求 $r=5$ 時所有可能的排列個數。
(10 分)

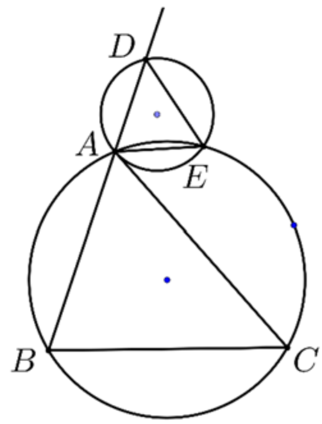
四、令 $x_1=2$，$x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+1}{2x_n-1}$，$n\geq 1.$
(10 分)

(a) 證明：對所有正整數 n，$x_n>\alpha$ 皆成立，其中 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.$

(b) 證明：$|x_5-\alpha|\leq 10^{-12}.$

五、在 ΔABC 的邊 $\overline{AC}$ 的外側作一個圓 K，它過頂點 A 且與 $\overline{AC}$ 切於點 A。圓 K 與 ΔABC 的外接圓再交於點 E 且與 $\overline{AB}$ 的延長線交於點 $D.$
(10 分)

證明：若 $\overline{BD}=\overline{AC}$ 則 $\overline{DE}=\overline{AE}.$



110 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（一）解答

一、【解】

(1) n 必定是合數

(2) $n \neq 4$ 因 4 不是 $3! = 6$ 的因子

(3) 設 $n \geq 6$ 且 $n = a \cdot b$ 其中 $a > 1, b > 1$，則 $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (ab-1)$

(i) a 為 $a!$ 的因子（因 $a < ab-1, a, b > 1$）。

(ii) $(a+1)\cdot(a+2)\cdots(a+b)$ 為 $(n-1)!$ 的因子（因 $a+b < ab-1$ 當 $ab \geq 6$），而連續 6 個整數成績必可被 b 整除。

由 $(i),(ii)$，得 $(n-1)!$ 可被 $ab = n$ 整除。

二、【解】

$$(x^2+ax+1)-(x^2+bx+c)=0 \Rightarrow (a-b)x+(1-c)=0 \Rightarrow x=\frac{c-1}{a-b}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{c-1}{a-b}\right)^2 + a\left(\frac{c-1}{a-b}\right)+1=0 \Rightarrow (c-1)^2 + a(c-1)(a-b)+(a-b)^2 = 0.....(1)$$

$$\left(x^2+x+a\right)-\left(x^2+cx\right)+b=0 \Rightarrow (1-c)x+(a-b)=0 \Rightarrow x=\frac{a-b}{c-1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a-b}{c-1}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{c-1}\right)+a=0 \Rightarrow (a-b)^2+(c-1)(a-b)+a(c-1)^2=0.....(2)$$

$$\Rightarrow (1)-(2)=(1-a)(c-1)^2+(a-1)(c-1)(a-b)=0$$

$$\Rightarrow (a-1)(c-1)\left[(a-b)-(c-1)\right]=0$$

$\because c+1,$ 又 $a=1$ 時，$x^2+x+1=0$ 無實根，則 $a \neq 1$

$\therefore a-b=c-1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow 1+a+1=0 \Rightarrow a=-2$

又 $1+b+c=0 \Rightarrow b+c=-1$

$\Rightarrow a+b+c=-2-1=-3$

三、【解】

我們假設 5 次連續下雨的天數分別為 $x_1, x_2, \cdots, x_5$ ，則

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16 \text{ 。} \qquad (1)$$

我們令 y_1 代表第 1 次下雨之前沒下雨的天數， y_2 為第 1 次下雨與第 2 次下雨之間沒有下雨的天數，…， y_6 代表第六次下雨之後沒有下雨的天數，則 y_i 滿足:

$y_1, y_6 \geq 0$， $y_2, \cdots, y_5 \geq 1$ 。

我們令 $z_1 = y_1 + 1, z_6 = y_6 + 1$， $z_i = y_i$， $i = 2,3,4,5$. 此時，

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = 14. \qquad (2)$$

首先(2)共有$\binom{13}{5}$個解，(1)則有$\binom{15}{4}$個解。

所以有5次連續下雨的排列數為$\binom{13}{5}\binom{15}{4}$.

四、【解】

(a) 因為 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 則

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n - 1} - \alpha = \frac{x_n^2 - 2\alpha x_n + 1 + \alpha}{2x_n - 1}$$

$$= \frac{x_n^2 - 2\alpha x_n + \alpha^2}{2x_n - 1} = \frac{(x_n - \alpha)^2}{2x_n - 1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

由 $(*)$ 知 $x_2 - \alpha > 0$ 且 $x_{n+1} > \alpha \ \forall n$ 因此 $\alpha < x_n \ \forall \ \ n \in N$

(b) 由 $(*)$ 知 $x_{n+1} - \alpha = \dfrac{(x_n - \alpha)^2}{2x_n - 1} \leq \dfrac{(x_n - \alpha)^2}{2\alpha - 1} \leq \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x_n - x)^2$

因此 $x_5 - \alpha \leq \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x_4 - \alpha)^2 \leq \dfrac{1}{5\sqrt{5}}(x_2 - \alpha)^4 \leq \dfrac{1}{5^3\sqrt{5}}(x_2 - \alpha)^8$

因 $x_1 = 2$, 知 $x_2 = \frac{5}{3}$ 且 $x_2 - x = \frac{5}{3} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{7-\sqrt[3]{5}}{6}$

所以 $(x_2-\alpha)^{16}\left(\frac{7+\sqrt[3]{5}}{2}\right)^{16} = \left(\frac{1}{3}\right)^{16}$

但 $\left(\frac{7+\sqrt[3]{5}}{2}\right)^{2} = \frac{47+\sqrt[21]{5}}{2} \geq 46.6,$

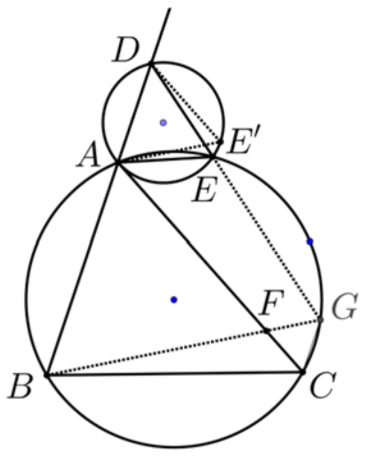
因此 $(x_2-\alpha) \leq \left(\frac{1}{9\cdot(46.6)}\right)^{4} \leq \left(\frac{1}{400}\right)^{4}$

$$x_5-\alpha \leq \frac{1}{5^3\sqrt{5}}(x_2-\alpha)^8 \leq \frac{1}{5^3\sqrt{5}\cdot 4^4}\bullet 10^{-8} \leq \frac{1}{2^6}10^{-11} \leq 10^{-12}$$

五、【解】

解法一：因 $\angle EDA = \angle EAC, \angle ABE = \angle ACE$，得 $\Delta EDB \sim \Delta EAC$. 因此 $\overline{DE} = \overline{AE}$ 當且僅當 $\overline{BD} = \overline{AC}$.

解法二：令 F 是 $\overline{AC}$ 或其延長線上一點使得 $\overline{AF} = \overline{AB}$，$\overleftrightarrow{BF}$ 與 ΔABC 的外接圓再交於點 G. 因 ΔABF 為等腰三角形（底為 $\overline{BF}$ ），與之相似的 ΔGCF 也是等腰三角形（底為 $\overline{FC}$ ）。



設若 $\overline{DE} = \overline{AE}$ ，則 $\angle EAD = \angle EDA = \angle EAC$. 因此 $2\angle EAD = \angle DAC = 2\angle ABF = 2\angle GCF$，得 $\angle EAC = \angle EAD = \angle GCF$. 所以等腰三角形 $\Delta EAD, \Delta GCF$ 相似，又 $EACG$ 外接於一圓，且底角相等，它是等腰梯形，得 $\overline{GC} = \overline{AE}$. 因此 $\overline{AD} = \overline{CF}, \overline{BD} = \overline{AC}$.

反之，若 $\overline{BD} = \overline{AC}$，則 $\overline{DA} = \overline{FC}$.

令 E' 為圓 K 上一點使得 $\overline{E'A} = \overline{E'D}$ 且與 C 在 $\overleftrightarrow{AB}$ 的同一側。則如上一段方法可得 $\angle E'AC = \angle DAE' = \angle ABF = \angle GCF$. 因 $\overline{DA} = \overline{FC}$，$\Delta E'AD, \Delta GCF$ 全等，$\overline{GC} = \overline{AE'}$，$E'ACG$ 為等腰梯形，所以 E' 是在 ΔABC 的外接圓上，故它與 E 重合，$\overline{DE} = \overline{AE}$.