

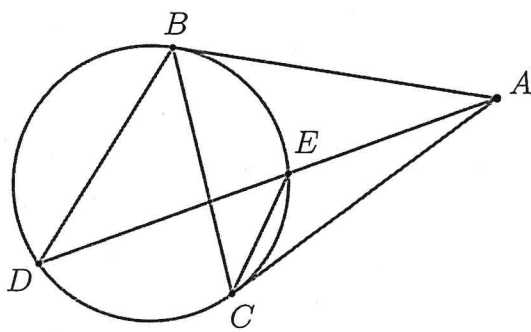
108 學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題 (二)

注意事項：

- (1)時間分配：2 小時 (16:00~18:00)。
- (2)配分：每題皆為 7 分。
- (3)不可使用計算器。

一、如圖，取圓外一點 A 作圓的切線交圓於 B, C 兩點，在圓上取另一點 D 使得 $\overline{BC} = \overline{BD}$ ，連接 \overline{AD} 交圓於 E ，再連接 \overline{CE} ，試證 $\overline{DE} = 2\overline{CE}$ 。



二、設 p 為大於 3 的質數。考慮級數和

$$s = \frac{1}{\binom{p}{1}^2} + \frac{1}{\binom{p}{2}^2} + \cdots + \frac{1}{\binom{p}{p-1}^2},$$

其中 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ 。將 s 整理成最簡分數 $s = \frac{m}{n}$ ，試證：分母 n 不是 p^2 的倍數。

三、令 $f(x)$ 是一個 m 次整係數多項式函數，其中 $m \geq 1$ 。已知數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_0 = 0$ 且對所有正整數 n 都有 $a_n = f(a_{n-1})$ 。如果 $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$ 這 2019 個整數裡面至少有 1011 個不等於 0，試證明 $f(a_{2019}) \neq 0$ 。