107學年度高級中學數學科能力競賽決賽

口試解答

一、【參考解答】

Lemma: 令三次函數 $y=ax^3+bx^2+cx+d$，則此三次函數和

$x=x_1,\ x=x_2,\ x=x_3$ 的三交點共線 $\Leftrightarrow x_1+x_2+x_3=\dfrac{-b}{a}$

Lemma pf:

令 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$y=ax^3+bx^2+cx+d$ 和 $x=x_1, x=x_2, x=x_3$ 的三交點共線

$\Leftrightarrow \left(x_1,f(x_1)\right),\left(x_2,f(x_2)\right),\left(x_3,f(x_3)\right)$ 共線

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

$$\Leftrightarrow a\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)+b\left(x_1+x_2\right)=a\left(x_2^2+x_2x_3+x_3^2\right)+b\left(x_2+x_3\right)$$

$$\Leftrightarrow a\left(x_1^2+x_1x_2-x_2x_3-x_3^2\right)=b\left(x_3-x_1\right)$$

$$\Leftrightarrow a\left(x_1+x_2+x_3\right)=-b$$

$$\Leftrightarrow x_1+x_2+x_3=\frac{-b}{a}$$

回到原題，假設 $PQ,\ RS$ 分別交 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 於 $M,\ N$，則由 *Lemma* 可知 M 的 x 坐標為 $\dfrac{-b}{a}-p-q$，N 的 x 坐標為 $\dfrac{-b}{a}-r-s$，所以

$PQ,\ RS$ 的交點在 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 上 $\Leftrightarrow M=N$

$$\Leftrightarrow \frac{-b}{a}-p-q=\frac{-b}{a}-r-s$$

$$\Leftrightarrow p+q=r+s$$

二、【參考解答】

設$S=\{a_1,\ldots,a_n\}$，且$M=a_1+\cdots+a_n$。顯然由條件，$M-a_i$為偶數。

若M為偶數，即得a_i為偶數。因此$\left\{\frac{a_1}{2},\cdots,\frac{a_n}{2}\right\}$也是怪集合。這個過程

不可能無限下去，因此必有一個怪集合$\{c_1,\ldots,c_n\}$其元素和M為奇數。

此時由$M-c_i$為偶數，故c_i為奇數。又$M=c_1+\cdots+c_n$，故n為奇數。