

109 學年度高雄市高級中學數學科能力競賽試題（一）

注意事項：(1) 作答時間：2 小時。不可使用電算器。

(2) 本試卷共五題，滿分 49 分。每題配分標於題末。計算、證明題

請務必依序寫在答案卷上。同時必須寫出演算過程或理由。

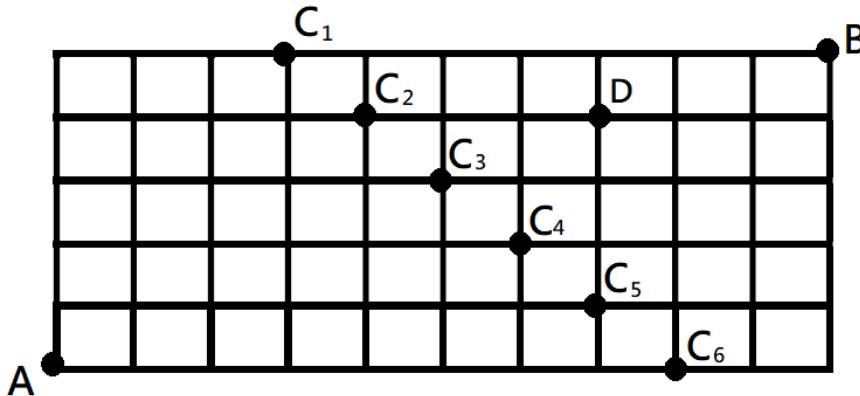
(3) 試題紙與答案卷請一併繳回。

(4) 需使用黑色或藍色筆作答

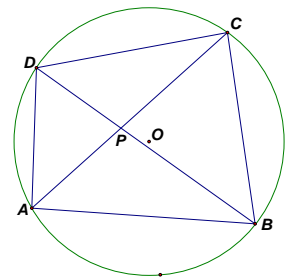
1. 試求 $\frac{1}{2} \left\{ \left(\sin 15^\circ + \sqrt{(\sin 15^\circ)^2 - 1} \right)^{2020} + \left(\sin 15^\circ - \sqrt{(\sin 15^\circ)^2 - 1} \right)^{2020} \right\}$ 之值。 (9 分)

2. 一隻螞蟻從一個長為 10 單位，寬為 5 單位的方格陣中之左下角 A 出發，要爬向右上角的巢穴 B，如圖所示。若螞蟻只能沿著格線向右或是向上移動，且在 C_1 點位置至 C_6 點這 6 個位置上，各有一粒砂糖，而 D 點的位置是個小水坑。如果螞蟻是搬運砂糖路過水坑，砂糖就會被溶掉，請問螞蟻搬運哪一粒砂糖回巢時，可以選擇的安全路徑為最多？有幾種選擇？

(10 分)

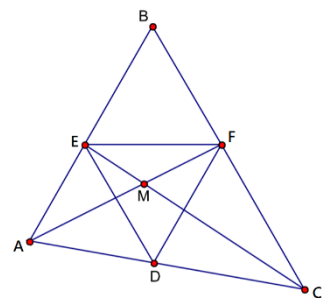


3. 如圖， $ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形，設 $\overline{AB} = r$ ， $\overline{BC} = s$ ， $\overline{CD} = t$ ， $\overline{DA} = u$ ，且其兩條對角線 \overline{AC} 和 \overline{BD} 相交於 P 點。若 $\triangle BCP$ 面積 = λ ，試求 $\triangle ABP$ 面積之值（請以 r 、 s 、 t 、 u 、 λ 表示 $\triangle ABP$ 面積）。 (10 分)



4. 一張三角形 ABC 紙張，其中 $\angle ABC = 60^\circ$ ，今將此三角形對折，使得點 B 落在 \overline{AC} 邊上與 D 點重合。令摺線段為線段 \overline{EF} ，其中 E 點位於 \overline{AB} 邊上， F 點位於 \overline{BC} 邊上，且 $\overline{BE} = \overline{BF}$ 。若 \overline{AF} 與 \overline{CE} 相交於 M 點。試證： $(\overline{EF})^2 = \overline{AF} \cdot \overline{FM}$ 。

(10 分)



5. 已知實數 a, b, c 滿足下列條件：

$$\frac{a}{1^2+2^2} + \frac{b}{2^2+3^2} + \frac{c}{2^2+5^2} = 1$$

$$\frac{a}{1^2+4^2} + \frac{b}{3^2+4^2} + \frac{c}{4^2+5^2} = 1$$

$$\frac{a}{1^2+6^2} + \frac{b}{3^2+6^2} + \frac{c}{5^2+6^2} = 1$$

試求 $a+b+c$ 之值。

(10 分)