【口試題 1】

$a,b,c>1$ 且 $abc=25$，試證明

$$\log_a(b^2+3bc+c^2)+\log_b(c^2+3ca+a^2)+\log_c(a^2+3ab+b^2)\geq\frac{21}{2}$$

【參考解答】:

(i)利用算幾不等式

$\log_a(b^2+3bc+c^2)+\log_b(c^2+3ca+a^2)+\log_c(a^2+3ab+b^2)$

$\geq\log_a 5bc+\log_b 5ca+\log_c 5ab$

$=\log_a\left(\frac{125}{a}\right)+\log_b\left(\frac{125}{b}\right)+\log_c\left(\frac{125}{c}\right)$

$=(3\log_a 5-1)+(3\log_b 5-1)+(3\log_c 5-1)$

$=3(\log_a 5+\log_b 5+\log_c 5)-3$

$=3\left(\frac{1}{\log_5 a}+\frac{1}{\log_5 b}+\frac{1}{\log_5 c}\right)-3$

(ii) 由柯西不等式知

$$(\log_5 a+\log_5 b+\log_5 c)\left(\frac{1}{\log_5 a}+\frac{1}{\log_5 b}+\frac{1}{\log_5 c}\right)\geq(1+1+1)^2=9$$

即

$$(\log_5 abc)\left(\frac{1}{\log_5 a}+\frac{1}{\log_5 b}+\frac{1}{\log_5 c}\right)\geq 9$$

因為 $abc=25$ 所以 $\log_5 abc=2$

故我們可推得

$$\frac{1}{\log_5 a}+\frac{1}{\log_5 b}+\frac{1}{\log_5 c}\geq\frac{9}{2}$$

綜合 (i) 和 (ii) ，我們得到

$$\log_a(b^2+3bc+c^2)+\log_b(c^2+3ca+a^2)+\log_c(a^2+3ab+b^2)$$
$$\geq 3\left(\frac{1}{\log_5 a}+\frac{1}{\log_5 b}+\frac{1}{\log_5 c}\right)-3$$
$$\geq 3\times\frac{9}{2}-3=\frac{21}{2}$$

其中等式成立充要條件為 $a=b=c$

【口試題 2】

請找出最小的非負 k 使得 109$\times(109+1)\times(109+2)\times\ldots\times(109+\mathrm{k})+1$為完全平方數。

【參考解答】：K=3。

當 k=0，109+1=110 不是完全平方。

當 k=1 或 2，假設 109$\times(109+1)\times(109+2)\times\ldots\times(109+\mathrm{k})+1=a^2$，則 109$\times(109+1)\times(109+2)\times\ldots\times(109+\mathrm{k})=a^2-1=(a+1)(a-1)$。

因為 109 和 111 是奇數，$110=2\times5\times11$。

所以$(a+1)(a-1)$的質因數分解裡面只有一個 2，而 a-1 和 a+1 必定同奇偶，但質因數分解中只有一個 2，無法拆成兩個奇數或兩個偶數相乘。矛盾!

當 k=3 時，$109\times110\times111\times112+1=(110^2-1)\times(111^2-1)+1=110^2\times111^2-(119^2+110^2)+2$

又知$109^2+110^2=(110-109)^2+2\times109\times110=1+2\times109\times110$

所以$109\times110\times111\times112+1=110^2\times111^2-(119^2+110^2)+2=110^2\times111^2-(1+2\times109\times110)+2=110^2\times111^2-2\times109\times110+1=(109\times110-1)^2$

所以$109\times110\times111\times112+1$是完全平方數。