109 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第 6 區(屏東高中) 筆試(一)試題與解答

注意事項：
本試卷共 4 題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。

一、證明：若自然數 n 不被 5 整除，則 n^8+3n^4-4 可被 100 整除。

[參考解答]

考慮因式分解

$$n^8+3n^4-4=(n^2+1)(n^2-1)(n^4+4)$$

(1) n^8+3n^4-4 可被 4 整除

自然數 n 可表示為 2k 或 2k-1 形式，其中 k 為自然數。

(a) n=2k

n^4+4 可被 4 整除，

所以，n^8+3n^4-4 可被 4 整除。

(b) n=2k-1

$n^2-1=4k^2-4k+1-1$ 可被 4 整除，

所以，n^8+3n^4-4 可被 4 整除。

(2) n^8+3n^4-4 可被 25 整除

因為 自然數 n 不被 5 整除，

所以，n 可表示為 $5k\pm1$ 或 $5k\pm2$ 形式，其中 k 為自然數。

(a) $n=5k\pm1$

n^4+4 與 n^2-1 可被 5 整除，

所以，n^8+3n^4-4 可被 25 整除。

(b) $n=5k\pm2$

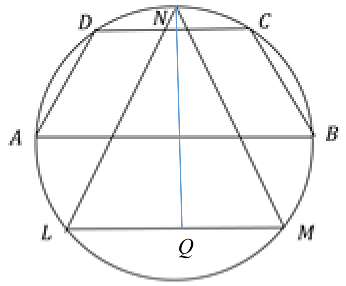
n^4+4 與 n^2+1 可被 5 整除，

所以，n^8+3n^4-4 可被 25 整除。

所以，由(1)與(2)，n^8+3n^4-4 可被 100 整除。 ■

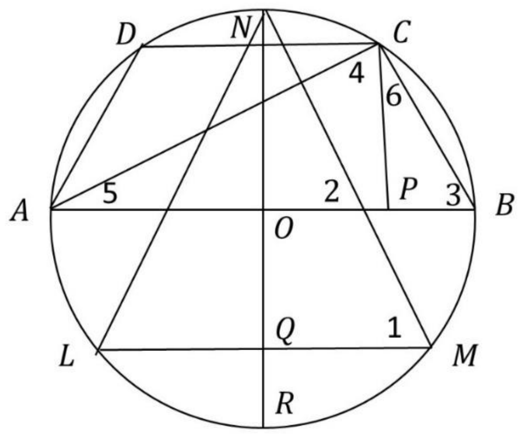
二、在圓內接一個梯形 ABCD 如下圖，又內接一個三角形 MNL，其邊平行梯形的邊，也

就是 $AB \parallel CD \parallel LM$，$AD \parallel LN$，$BC \parallel MN$，作 $NQ \perp LM$ 交 LM 於 Q。 已知 $\angle NML = 60°$，$QM = 2$， AB 為圓的直徑。試求梯形 ABCD 的面積。



[參考解答] 梯形 ABCD 面積 $= 4\sqrt{3}$

連接 AC，作 $CP \perp AB$ 交 AB 於 P。作 $NQ \perp LM$ 交 LM 於 Q，交圓 O 於 R，如下圖。



因為圓內接梯形 ABCD，$AB \parallel CD$，所以 $AD = BC$，

$$AB + CD = 2CD + 2BP = 2AP \qquad (\text{式 } 1)$$

對於內接三角形 MNL，

$$\because \begin{cases} AB \parallel LM，AD \parallel LN，BC \parallel MN \\ \angle DAB = \angle CBA \end{cases}$$

$\therefore \ \angle NLM = \angle NBL = 60°$

$\Rightarrow$ $\triangle MNL$ 為正三角形

$\Rightarrow$ $LN = MN$， NR 為圓 O 的直徑

而且

$\angle 3 = \angle 2 = \angle 1 = \angle NML = 60°$

$\Rightarrow$ $\angle 4 = \angle 1 = 60°$，$\angle 5 = \angle 6 = 30°$

$\Rightarrow$ $\triangle ABC \cong \triangle NRM$，$\triangle APC \cong \triangle NQM$，$AC = LN = MN$

$\Longrightarrow \quad \mathrm{PC}=\mathrm{QM}=2$

且

$$\triangle \mathrm{APC} \text{ 面積} = \triangle \mathrm{NQM} \text{ 面積} \qquad (\text{式 } 2)$$

由(式 1)，(式 2) 計算梯形 ABCD 的面積的到

$$\text{梯形 ABCD 面積} = \frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{CD})\cdot \mathrm{CP} = \mathrm{AP}\cdot \mathrm{CP} = 2\triangle \mathrm{QMN} \text{ 面積} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}$$

梯形 ABCD 面積 $= 4\sqrt{3}$ 。

(或是 $\frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{CD})\cdot \mathrm{CP} = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}+2\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cdot 2 = 4\sqrt{3}$) ■

三、將 1, 2, 3, 4, 5 這五個整數排成一排，且其中任意連續三個數之和都被這三個數中的第一個數整除。

a. 若最後一個數是奇數，則滿足條件的排法有多少，

b. 若最後一個數是偶數，則滿足條件的排法有多少。

[參考解答] a. 5 種; b. 10 種

設五個數依序為a_1, a_2, a_3, a_4, a_5。

若$a_i | a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$成立，則$a_i | a_{i+1} + a_{i+2}$。

因僅有兩個偶數，故若a_i為偶數且$1 \le \mathrm{i} \le 3$，則a_{i+1}與a_{i+2}皆為奇數。

a.

因若a_i為偶數且$1 \le \mathrm{i} \le 3$，則a_{i+1}與a_{i+2}皆為奇數。故a_1, a_2, a_3至多僅有一個偶數。

且因a_5為奇數。可知a_4為偶數且a_1, a_2, a_3中恰有一個偶數。

且因a_4為偶數，a_1, a_2, a_3中的偶數必為a_1。

若$a_1 = 2$，$a_4 = 4$。

考慮 5 所在的位置，可得出滿足條件的排列為(2,1,3,4,5)，(2,3,5,4,1)，(2,5,1,4,3)。

若$a_1 = 4$，$a_4 = 2$。

考慮 5 所在的位置，可得出滿足條件的排列為(4,3,1,2,5)，(4,5,3,2,1)。

共 5 種排列。

b.

因a_5為偶數，若a_3為偶數，則a_4亦為偶數，矛盾。

設a_1為偶數。
若$a_1 = 2$，$a_5 = 4$。
考慮 5 所在的位置，可得出滿足條件的排列為(2,1,3,5,4)，(2,3,1,5,4)，(2,3,5,1,4)。

若$a_1 = 4$，$a_5 = 2$。
考慮 5 所在的位置，可得出滿足條件的排列為(4,3,1,5,2)。

設a_2為偶數。
若$a_2 = 2$，$a_5 = 4$。
考慮 5 所在的位置，可得出滿足條件的排列為(3,2,1,5,4)，(1,2,3,5,4)。

若$a_2 = 4$，$a_5 = 2$。
考慮 5 所在的位置，可得出滿足條件的排列為(1,4,5,3,2)，(5,4,1,3,2)。

設a_4為偶數。
若$a_4 = 2$，$a_5 = 4$。
考慮 5 所在的位置，可得出滿足條件的排列為(1,5,3,2,4)。

若$a_4 = 4$，$a_5 = 2$。
考慮 5 所在的位置，可得出滿足條件的排列為(3,5,1,4,2)。

共 10 種排列。 ■

四、令 $\log_2(x+2y)+\log_2(x-2y)=2$，試證 $x-y\geq\sqrt{3}$。

[參考解答]

因為 $\log_2(x+2y)+\log_2(x-2y)=2$

所以 $x^2-4y^2=4$ 且 $x+2y>0, x-2y>0$，因此 $x>0$

因為 $x=\sqrt{4+4y^2}$ 所以 $x>y$

令 $t=x-y>0$ 則 $x=y+t$

因此 $(y+t)^2-4y^2-4=0$

所以 $3y^2-2ty+4-t^2=0$

判別式 $(-2t)^2-4\bullet3\bullet(4-t^2)\geq0$ (因為有解)所以 $t=x-y\geq\sqrt{3}$ ■