

109 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

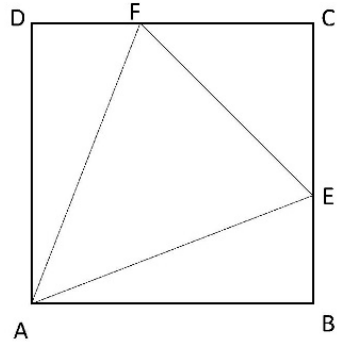
南區（台南區） 筆試（一） 編號：_____

注意事項：

- (1)時間分配：2 小時
- (2)本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

一、如圖所示，正方形 $ABCD$ 的邊長為2，點 E 和 F 分別在邊 BC 和 CD 上，使得 $\triangle CEF$ 的周長為4，試求：

- (1). $\angle EAF$ 的度數；
- (2). $\triangle EAF$ 面積的最小值。



二、已知函數 f 的定義域為正整數而其函數值為非負整數，並滿足

$$f(m+n) - f(m) - f(n) = 0 \text{ 或 } 1, f(1) = 0, f(2) > 0, f(300) = 150。$$

試求 $f(109)$ 之值？

三、設 $f(4a) + 4f(b) = f(f(a+b))$ ，函數 f 的定義域及值域均為整數，求此函數為何？

四、從 1 到 2020 這 2020 個正整數中，最多可以取出多少個相異數，使得所取出的數中任意 5 個數的和均為 55 的倍數？(答案須詳敘理由)