109 學年度新北市 (板橋高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
(數學科筆試一參考答案)

問題一： 對於 2×2 階矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，定義其轉置矩陣 $A^T=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$。

設 A 為 2×2 階矩陣，滿足 $A^TA=AA^T=I$，其中 I 為二階單位方陣，且 A 的行列式為 1。證明：矩陣 A 必定可以表達為

$$A=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

其中 θ 為一實數，並滿足 $0\leqslant \theta < 2\pi$。 (16 分)

【證】 因為 $AA^T=I$，所以 A 的兩個列向量皆是長度為 1 的平面向量。不失一般性，可設

$$A=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta \end{bmatrix}, \qquad \alpha,\beta\in(0,2\pi].$$

由行列式 $\det A=1$，得 $1=\det A=\cos\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha=\sin(\beta-\alpha)$，故

$$\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}+2k\pi, \qquad k\in\mathbb{Z},$$

此時

$$\cos\beta=\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\sin\alpha,$$
$$\sin\beta=\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})=\cos\alpha.$$

故可取 $\theta=2\pi-\alpha\in[0,2\pi)$，此時 $\cos\theta=\cos\alpha, \sin\theta=-\sin\alpha$，得

$$A=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

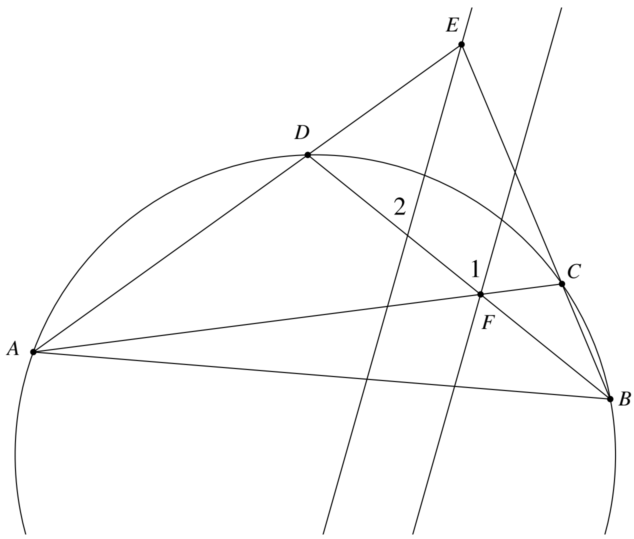
證畢。 □

問題二： 設凸四邊形 $ABCD$ 外接一圓。已知直線 AD 與 BC 交於一點 E，並設直線 AC 與 BD 交於一點 F。考慮 $\angle CED$ 的角平分線與 $\angle DFC$ 的角平分線。

(1) 若此兩線重合，試證 $\overline{EA} = \overline{EB}$。

(2) 若此兩線不重合，試證此兩線平行。

(16 分)



【證】 (1) 若此兩角平分線重合，則 $\triangle EFD \simeq \triangle EFC$ (ASA 全等)。故得 $\overline{ED} = \overline{EC}$。再由圓冪性質

$$\overline{ED} \cdot \overline{EA} = \overline{EC} \cdot \overline{EB},$$

故 $\overline{EA} = \overline{EB}$。

(2) 若此兩條線不重合，則如圖所示。直接計算角度得：

$$\begin{aligned}
\angle 2 &= 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AEB - \angle EDB \\
&= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DAB - \angle CBA) - (\angle DAB + \angle ABD) \\
&= 90^\circ + \frac{1}{2}(\angle DAF + \angle CBF + \angle FAB + \angle ABF) - (\angle DAF + \angle FAB + \angle ABF) \\
&= 90^\circ - \frac{1}{2}(\angle FAB + \angle ABF) \qquad\qquad (\because \angle DAF = \angle CBF) \\
&= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle FAB - \angle ABF) \\
&= \frac{1}{2}\angle AFB = \angle 1.
\end{aligned}$$

因同位角相等，故兩線平行，得證。

□

問題三： 設 f 是從正整數集合映至正整數集合的函數，滿足：對所有的正整數 m,n，都有

$$f(mn)=f(m)f(n), \qquad \text{且} \qquad f(f(n))=n.$$

試求 $f(2020)$ 的最小可能值。 (17 分)

【證】 答案是 60.
取 $m=n=1$，則 $f(1)=f(1)^2$，得到 $f(1)=1$。
先證：f 會把質數映到質數。
理由：設 p 為質數且 $f(p)=ab$，其中 a,b 為正整數，則

$$p=f\big(f(p)\big)=f(ab)=f(a)f(b).$$

所以 $f(a)=1$ 或者 $f(b)=1$。不妨設 $f(a)=1$，則

$$a=f\big(f(a)\big)=f(1)=1.$$

當 $a=1$ 時，b 不可能也是 1，否則 $p=f(f(p))=f(ab)=f(1)=1$，不合。故 $f(p)$ 的確是質數。
顯然 f 是一對一函數，因為當 $f(m)=f(n)$ 時，有 $m=f\big(f(m)\big)=f\big(f(n)\big)=n$。因此 f 將不同的質數映到不同的質數，且為一乘性 (multiplicative) 函數。
現在

$$f(2020)=f(2^2\cdot 5\cdot 101)=f(2)^2\cdot f(5)\cdot f(101).$$

要得到最小值，可設 $f(2)=2,\ f(101)=3,\ f(3)=101,\ f(p)=p$ 對所有 $p\neq 2,3,101$ 的質數均成立；且當 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 為 n 的質因數分解式，定義

$$f(n)=f(p_1)^{\alpha_1}f(p_2)^{\alpha_2}\cdots f(p_k)^{\alpha_k}.$$

則 f 滿足題設，且 $f(2020)$ 達到最小值

$$f(2^2\cdot 5\cdot 101)=f(2)^2\cdot f(5)\cdot f(101)=2^2\cdot 5\cdot 3=60.$$

□