109 學年度新北市 (板橋高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
(數學科口試參考答案)

口試一： 設 a,b,c 為三個正實數。

(1) 求證

$$\frac{1}{a+b+2c} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right).$$

(2) 求證

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{ac}{a+2b+c}+\frac{bc}{2a+b+c} \leqslant \frac{1}{4}(a+b+c).$$

【證】

(1) 令 $x=a+c, y=b+c$，原式成為

$$\frac{1}{x+y} \leqslant \frac{1}{4}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}).$$

上式的左邊減去右邊，並同時乘上 $xy(x+y)>0$ 後，得

$$xy-\frac{1}{4}(x+y)^2 = -\frac{1}{4}(x-y)^2 \leqslant 0,$$

故原不等式得證。

(2) 將 (1) 式作輪換，得到的三個不等式分別乘以 ab,ac,bc 後相加，可得

$$\begin{aligned}\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{ac}{a+2b+c}+\frac{bc}{2a+b+c} &\leqslant \frac{1}{4}(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{ac}{a+b}+\frac{ac}{b+c}+\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c})\\ &= \frac{1}{4}(\frac{ab+ac}{b+c}+\frac{ab+bc}{a+c}++\frac{ac+bc}{a+b})\\ &= \frac{1}{4}(a+b+c),\end{aligned}$$

故得證。 □

口試二： 給定一個大於 2 的正整數 n。設 $f(x)$ 為 n 次實係數多項式函數，且對所有 $k=1,2,\ldots,n$，$f(k)=k^2$ 均成立；但 $f(n+1)=(n+1)^2+1$。試求 $f(0)$ 之值。

【解】$(-1)^n$.

由題意知，存在一實數 k 滿足

$$f(x)-x^2 = k(x-1)(x-2)\cdots(x-n).$$

將上式代入 $x=n+1$，得

$$1 = k\cdot n! \qquad \Rightarrow \qquad k=\frac{1}{n!}.$$

由此代回 $x=0$，得

$$f(0)=f(0)-0^2=\frac{1}{n!}(-1)(-2)\cdots(-n)=(-1)^n.$$

□