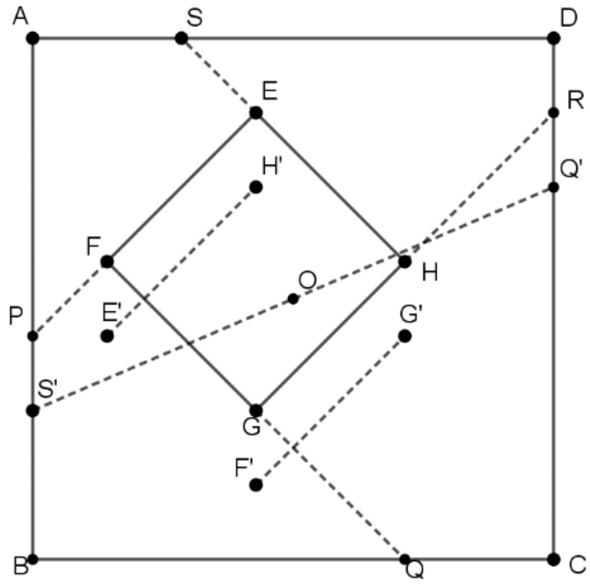
109 學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
(數學科筆試一參考答案)

問題一：如下圖，一大正方形 ABCD 內有一小正方形 EFGH，延長 EF，FG，GH，HE 與大正方形 ABCD 依序交於 P,Q,R,S 點，求証$\overline{PR}\perp\overline{SQ}$且$\overline{PR}=\overline{SQ}$ 。

【証明】

(1). 設 O 為正方形 ABCD 中心，且設$R_{O,90°}$為以 O 為旋轉中心，旋轉 90°之旋轉變換。



(2). 另$S'=R_{O,90°}(S), Q'=R_{O,90°}(Q)$, 則$S',Q'$分別在 AB,CD 上，且 $PS'//RQ'$。

(3). 令$E'F'G'H'=R_{O,90°}(EFGH)$，則 $\overline{H'E'}//\overline{EF}$，$\overline{F'G'}//\overline{GH}$，

(4). $\overline{EP}//\overline{H'S'}$且$\overline{GR}//\overline{F'Q'}$且$\overline{PS'}=\overline{RQ'}$。

(5). $PS'Q'R$為平行四邊形，故$\overline{PR}//\overline{S'Q'}$且$\overline{PR}=\overline{S'Q'}$。

(6). $\overline{SQ}\perp\overline{S'Q'}$且$\overline{SQ}=\overline{S'Q'}$，故$\overline{PR}\perp\overline{SQ}$且$\overline{PR}=\overline{SQ}$。

問題二： 今有兩種拼片可使用：由三個單位正方形構成的 L 形拼片，以及 2×2 的正方形拼片。拼片皆可以任意旋轉或翻轉，但不能重疊，兩種拼片數量皆足夠。已知選用了一些拼片恰好可拼滿 7×9 的矩形，其中 2×2 的拼片使用了 n 個 $(n\geq 0)$。

1. 試找出 $n=3$ 的一種拼法。
2. 求出所有可能的 n 值。

(16 分)

【證】 $n=0,3.$
Color the rectangle in 4 colors like this:

121212121
343434343
...
121212121

We have 20 1's, 16 2's, 15 3's, 12 4's. Let x,a,b,c,d be respectively number of: $2x2$ tiles and L-tiles which don't contain a field with color $4,3,2,1$. First, it's easily seen that $3\mid x$.
Now, $x+a+b+c=20, x+a+b+d=16, x+a+c+d=15, x+b+c+d=12$. This means that

$$a+b+c+d=21-\frac{4x}{3},$$

hence $d=21-\frac{4x}{3}-20+x=1-\frac{x}{3}$, so we see that $x\leq 3$.
It's easy to construct examples for $x=0$ and $x=3$ (for $x=3$, put 2×2 next to each other in one row, starting from a corner for example).

□

問題三： 設 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 為 n 個均大於 1 的實數，試證：

$$\frac{a_1^2}{a_2-1}+\frac{a_2^2}{a_3-1}+\frac{a_3^2}{a_4-1}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n-1}+\frac{a_n^2}{a_1-1}\geq 4n.$$

(17 分)

【證】

(1) 首先證明對於 $x>1$ 的實數，恆有 $\frac{x}{\sqrt{x-1}}\geq 2$ 。

證明如下: 利用 $x^2-4x+4=(x-2)^2\geq 0$，可推導得到

$$x^2\geq 4(x-1) \quad \Longrightarrow \quad x\geq 2\sqrt{x-1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{x-1}}\geq 2, \quad \forall x>1.$$

其中，當 $x=2$ 時，等號成立。

(2) 由 (1) 可知，當 $a_k>1$ 時，恆有 $\frac{a_k}{\sqrt{a_k-1}}\geq 2$ 且 $a_k=2$ 時，等號成立。利用此式與算幾不等式可推得

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1^2}{a_2-1}+\frac{a_2^2}{a_3-1}+\frac{a_3^2}{a_4-1}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n-1}+\frac{a_n^2}{a_1-1}\\
\geq\ & n\sqrt[n]{\left(\frac{a_1^2}{a_2-1}\right)\left(\frac{a_2^2}{a_3-1}\right)\cdots\left(\frac{a_{n-1}^2}{a_n-1}\right)\left(\frac{a_n^2}{a_1-1}\right)}\\
\geq\ & n\sqrt[n]{\left[\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_2-1}}\right)\left(\frac{a_2}{\sqrt{a_3-1}}\right)\cdots\left(\frac{a_{n-1}}{\sqrt{a_n-1}}\right)\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_1-1}}\right)\right]^2}\\
\geq\ & n\sqrt[n]{\left[(2)(2)\cdots(2)(2)\right]^2}\\
=\ & n\sqrt[n]{(2^n)^2}\\
\geq\ & 4n.
\end{aligned}$$

當 $a_1=a_2=\cdots=a_n=2$ 時，等號成立。

由 (1), (2) 得證上述不等式成立。

$\square$