問題一：已知實數r讓方程式

$$\sqrt{x^2-r}+2\sqrt{x^2-1}=x$$

有實數解，求r的所有可能值(或範圍)。

(12 分)

【解】

原式兩邊平方

$$\Rightarrow x^2=(x^2-r)+4(x^2-1)+4\sqrt{(x^2-r)(x^2-1)}$$

$$=5x^2-4-r+4\sqrt{(x^2-r)(x^2-1)}$$

$$\Rightarrow -4\sqrt{(x^2-r)(x^2-1)}=4x^2-4-r$$

$$\Rightarrow 16(x^2-r)(x^2-1)=16[(x^2-1)-(r-1)](x^2-1)=(4(x^2-1)-r)^2$$

$$=16(x^2-1)^2-8r(x^2-1)+r$$

Hence, $-16(r-1)(x^2-1)=-8r(x^2-1)+r^2 \Rightarrow (16-8r)x^2=r^2-8r+16=(r-4)^2$

Note that 原方程式中知$x\ge 0 \Rightarrow x=\dfrac{4-r}{\sqrt{16-8r}}(r\le 2)$

將$x=\dfrac{4-r}{\sqrt{16-8r}}$代入原方程式，整理得$|3r-4|+2|r|=4-r$

若$r\ge\dfrac{4}{3}$，則$(3r-4)+2r=4-r \Rightarrow r=\dfrac{4}{3}$

若$0\le r\le\dfrac{4}{3}$，則$(4-3r)+2r=4-r$為恆等式

若$r\le 0$，則$(4-3r)-2r=4-r \Rightarrow r=0$

所以r之範圍為$0\le r\le\dfrac{4}{3}$.

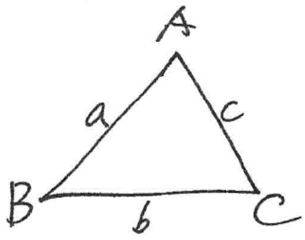
問題二： 在坐標平面上，三角形 ABC 的頂點 A,B,C 都是格子點（即坐標都是整數的點），且令三邊邊長分別為 a,b,c ，面積為 L 。

已知 $(a+b)^2<8L+1$，證明：三角形 ABC 為等腰直角三角形。

（11 分）

【解】

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2\geq 2ab\,(\text{Clear!}) \\ ab\geq 2L\ (\text{Law of Sines}) \end{array}\right\} a^2+b^2\geq 4L$$



$\because A,B,C$ 為格子點　　$\therefore 2L$ 為整數

(May assume $A(0,0),B(p,q),C(r,s)$ ，則 $L=\dfrac{|ps-qr|}{2}$)

同時由畢氏定理知 a^2+b^2 均為整數

Now, $8L\leq(a^2+b^2)+4L\leq a^2+b^2+2ab\underset{\uparrow}{<}8L+1$

(假設條件)

但不等式前兩式皆為整數，所以 $8L=(a^2+b^2)+4L$

i.e. $a^2+b^2=4L\leq 2ab\Rightarrow a=b$ (等腰)

不等式亦得 $\Rightarrow 2L=ab\Rightarrow$ 直角

$\therefore\triangle ABC$ 為等腰直角三角形.

問題三：無窮等比數列$\langle a_n \rangle$的每一項都是有理數，而且前三項可表為

$$a_1 = x^2 + 3x - 6;$$
$$a_2 = 2 - 2x;$$
$$a_3 = x^2 - 3,$$

其中x為實數。回答下列問題：

（1）求x的所有可能值。（7 分）

（2）承(1)，求$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的值。（4 分）

【解】

（1）由$\langle a_n \rangle$的每一項都是有理數及$a_2 = 2 - 2x$知x是有理數。

因為$a_1 = x^2 + 3x - 6, a_2 = 2 - 2x, a_3 = x^2 - 3$是等比數列，所以

$$a_2{}^2 = (2-2x)^2 = \left(x^2 + 3x - 6\right)\left(x^2 - 3\right) = a_1 a_3\text{，}$$

乘開，整理得

$$x^4 + 3x^3 - 13x^2 - x + 14 = 0\text{。}$$

利用一次因式檢驗法可知：$x+1$及$x-2$是該四次多項式的一次因式，因此，可以分解為

$$(x+1)(x-2)\left(x^2 + 4x - 7\right) = 0\text{，}$$

解得$x = -1, 2, -2 \pm \sqrt{11}$（不合，不是有理數）。

故x的所有可能值為

$$x = -1, 2\text{。}$$

（2）承(1)

A. 當$x = -1$時，$a_1 = -8, a_2 = 4, a_3 = -2$，無窮等比數列$\langle a_n \rangle$的公比為$-\frac{1}{2}$，其和為

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{-8}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{16}{3}.$$

B. 當$x = 2$時，$a_1 = 4, a_2 = -2, a_3 = 1$，無窮等比數列$\langle a_n \rangle$的公比為$-\frac{1}{2}$，其和為

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{4}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{8}{3}.$$

問題四：若a, b為三角形的兩邊之邊長，且A, B為其對應角，則將

$$\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

表為a, b的公式，並證明之。

（12 分）

【解】

等號左邊涉及邊長，右邊涉及角度，因此需要把邊長轉換成角度的恆等式。根據正弦定理，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R，$$

得

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2R\sin A-2R\sin B}{2R\sin A+2R\sin B}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}。$$

再利用和差化積公式，得

$$\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}\div\frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}.$$

得證。