109 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（二）解答

一、【解】

$\cos A : \cos B : \cos C = 1:1:2$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \Rightarrow \angle A = \angle B$

$\overline{CD}$ 垂直平分 $\overline{AB}$，$\overline{AC} = \overline{BC}$

令 $\overline{CD} = x$

$$\left(\cos\frac{C}{2}\right)^2 = \frac{1+\cos C}{2} = \frac{1+2\cos A}{2}$$

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 = \frac{1+\frac{c}{b}}{2}$$

在 ΔACD 中，$\sin A = \dfrac{x}{b}$，$\left(\dfrac{c}{2}\right)^2 + x^2 = b^2$

$$\frac{1+\frac{c}{b}}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{c}{b}\right)^2 = 1$$

$$\frac{c}{b} = -1+\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{x}{b} = \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$$

二、【解】

設 a_n 表示 n 格的停車方式，則 $a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 4, a_5 = 3,$

可以證明 a_n 滿足以下遞迴式：

$a_{n+5} = 2a_{n+3} + a_n, n \ge 1$　　(*)

依(*)分別計算 $a_6, a_7, \cdots a_{12},$

$$a_6 = 2\cdot a_4 + a_1 = 2\cdot 4 + 0 = 8$$

$$a_7 = 2\cdot a_5 + a_2 = 2\cdot 3 + 2 = 8$$

$$a_8 = 2\cdot a_6 + a_3 = 2\cdot 8 + 1 = 17$$

$$a_9 = 2\cdot a_7 + a_4 = 2\cdot 8 + 4 = 20$$

$$a_{10} = 2\cdot a_8 + a_5 = 2\cdot 17 + 3 = 37$$

三、【解】

令 a^2 為滿足 $s \le t^2 \le s + 2012$ 最小完全平方數。

由題目可知，$(a-1)^2 < s$ 且 $(a+22)^2 \le s$=2012,$(a+23)^2 > s + 2012$

（I）

$s + 2012 \ge (a+22)^2 = a^2 + 44a + 484 \ge s + 44a + 484$

$44a \le 1528 \Rightarrow a \le 34.73 \Rightarrow a \le 34$

（II）

$s + 2012 < (a+23)^2 = \left[(a-1)+24\right]^2 = (a-1)^2 + 48(a-1) + 576 < s + 48(a-1) + 576$

$\Rightarrow 48(a-1) + 576 > 2012 \Rightarrow 48(a-1) > 1436$

$\Rightarrow a - 1 > 29.92 \Rightarrow a > 30.92 \Rightarrow a \ge 31$

by（I）（II）

$a = 31, 32, 33, 34,$ 取最小的 31

$\Rightarrow 30^2 < s \le 31^2, 32^2, \cdots 53^2 \le s + 2012 < 54^2$

$\Rightarrow s$ 的最小值為 30^2+1=901

四、【解】

設 $-\frac{2}{3} \le x_1, x_2 \cdots x_{900} \le \frac{2}{3}$

因 $9x^3 - 3x + \frac{2}{3}(x+\frac{2}{3})(3x-1)^2 \ge 0,\quad \sum_{i=1}^{900}(9x_i^3 - 3x_i + \frac{2}{3}) \ge 0$，

故 $-3\sum_{i=1}^{900} x_i + 600 \ge 0$

即 $\sum_{i=1}^{900} x_i \le 200$ 當 $x_i = \cdots = x_{100} = -\frac{2}{3}, x_{101} = \cdots = x_{900} = \frac{1}{3}$

則 $\sum_{i=1}^{900} x_i^3 (-\frac{2}{3})^3 \times 800 = 0$ 且 $\sum_{j-=1}^{900} x_i = \frac{-200+800}{3} = 200$ 可達最大值

五、【解】

$x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2} = \sqrt[3]{x^4}(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})$

$y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4} = \sqrt[3]{y^4}(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})$

令 $a = \sqrt[3]{x^2}, b = \sqrt[3]{y^2}$ 則

由 1. $\sqrt{a^2(a+b)} + \sqrt{b^2(a+b)} = 8$

所以 $8^2 = (\sqrt{a^2(a+b)} + \sqrt{b^2(a+b)}^2 = (a+b)^3$

故 $a+b = \sqrt[3]{8^2} = 4$

由 2. $a^3 + b^3 = 40$

因為 $4^3 = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = 40 + 12ab$ 得 $ab = 2$

$x^4 + y^4 = a^6 + b^6$

$= (a^3+b^3)^2 - 2a^3b^3 = 40^2 - 2\cdot 2^3 = 1584$

六、【解】

在原方程式兩邊同乘以 y^2

得 $1+2\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

令 $A=\frac{y}{x}$，上式可經整理得 $A^4+2A^3+A^2+2A+1=0$

即有 $(A^2+A+1)^2-2\text{A}^2=0$

$$\left[A^2+(1+\sqrt{2})\text{A}=1\right]\left[A^2+(1\text{-}\sqrt{2})\text{A}+1\right]=0$$

若 $A^2+(1+\sqrt{2})A+1=0,$ 此時

$$A=\frac{-(1+\sqrt{2})\pm\sqrt{(1+\sqrt{2})^2-4}}{2}=\frac{-(1+\sqrt{2})\pm\sqrt{\sqrt[2]{2}-1}}{2}$$

注意：$|x|>|y|,$ 所以 $\left|\frac{y}{x}\right|<1$

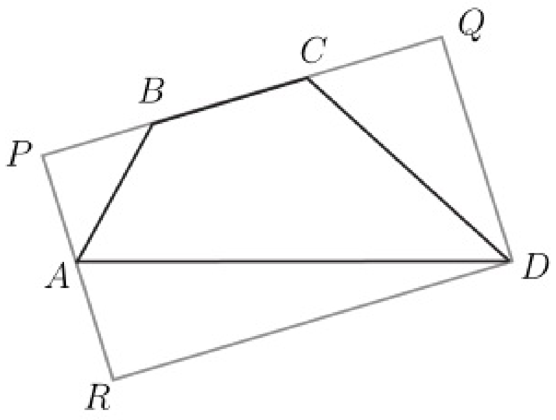
因此 $A=\frac{-(1+\sqrt{2})+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$

若 $A^2+(1-\sqrt{2})A+1=0$ 此時，判別式 $(1-\sqrt{2})^2-4<0,$

A 非實數，不符題意。

故 $\frac{y}{x}=\frac{-(1+\sqrt{2})+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$

七、【解】



如圖 7

則 $\overline{PA}=\sqrt{3},\overline{CQ}=3,\overline{QD}=3\sqrt{3},$ 所以 $\overline{AR}=\sqrt[2]{3}$ 以及

$\overline{RD}=\overline{PQ}=\sqrt{3}+(6-\sqrt{3})+3=9$

因此 $\overline{AD}=\sqrt{2\sqrt{3}^{2}+9^{2}}=\sqrt{93}$