109 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（一）解答

一、【解】

$$\mathrm{A}_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{1+k^2+k^4}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k^2+k+1)(k^2+k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2-k+1}-\frac{1}{k^2+k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2+n+1}\right)=\frac{n^2+n}{2(n^2+n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$$

$$\mathrm{B}_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(\mathrm{k}^2-k+1)}$$

$$=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{(k-1)^2+(k-1)+1}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\times\cdots\times\frac{k-3}{k-1}\times\frac{k-2}{k}\times\frac{k-1}{k+1}\right)\times$$

$$\left(\frac{4+2+1}{1+1+1}\times\frac{9+3+1}{4+2+1}\times\frac{16+4+1}{9+3+1}\times\cdots\times\frac{(k-1)^2+(k-1)+1}{(k-2)^2+(k-2)+1}\times\frac{k^2+k+1}{(k-1)^2+(k-1)+1}\right)$$

$$=\frac{1\times 2}{k(k+1)}\times\frac{k^2+k+1}{1^2+1+1}=\frac{2(k^2+k+1)}{3\mathrm{k}(\mathrm{k}+1)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}_n\times\mathrm{B}_n=\frac{k(k+1)}{2(k^2+k+1)}\times\frac{2(k^2+k+1)}{3k(k+1)}=\frac{1}{3}$$

二、【解】

不妨在單位圓內討論即可。對於圓上兩點 B, C，可以設座標為

$B(\cos\theta,\sin\theta)$，$C(-\cos\theta,\sin\theta)$，此時A的座標為(0, 1)時，$\Delta ABC$ 的面積最大。以下找出θ 使得ΔABC的面積達到最大值。易知ΔABC的面積為

$f(\theta)=\cos\theta(1-\sin\theta)$

$=\sqrt{1-\sin\theta^2}(1-\sin\theta)$

$=\sqrt{(1-\sin\theta)^3(1+\sin\theta)}$

其中

$(1-\sin\theta)^3(1+\sin\theta)$

$=27\left[\frac{1}{3}(1-\sin\theta)\right]^3(1+\sin\theta)$

$\le 27\left\{\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}(1-\sin\theta)+\frac{1}{3}(1-\sin\theta)+(1+\sin\theta)\right]\right\}^4$

$=27\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{27}{2^4}$（算幾不等式）

上述"="成立於$\frac{1}{3}(1-\sin\theta)=1+\sin\theta$

即$\sin\theta=-\frac{1}{2}$，此時ΔABC 為正三角形.

三、【解】

當連接兩點的線段是某三角形的最長邊時，將其著紅色，不然著成藍色。

我們證明必有一三角形的三邊都著同一顏色。任選一點P_1，和它相連的五邊必有三邊著同色，設這三邊的另一端點為P_2,P_3和P_4。若，P_2P_3,P_2P_4,P_3P_4皆著同色，則$\Delta P_2P_3P_4$的三邊同著一色，因此和其中兩邊形成一同色三角形。

以上兩種情形證明存在一同色三角形，在這三角行中必有一邊著紅色，即

它最長那邊，又因這三角形三邊同色，它的最短邊也是紅色，因此，這三角形的最短邊也是某一三角形的最長邊。

四、【解】

令 $s=a+b-c+d\geq 6$

則 $a+b\equiv c-d$

$ac+bd\equiv 0$

由 $ac+bd=(a+b)c-b(c-d)$

得 $(a+b)(b+c)\equiv 0$

因為
$$a+b-s=c-d>0$$
$$a+b-2s=(c-a)+(c-b)-2d<0$$

所以 $s<a+b<2s$

故 $(a+b)\neq 0$

因此 $t=\gcd(b-c,s)>1$

$\therefore b-c\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ t)$

$s=a+b-c+d\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ t)$

$\therefore b-c\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ t)$

$a+d\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ t)$

$\therefore b\equiv c, a\equiv -d\ (\mathrm{mod}\ t)$

$\therefore a^2b^3-c^3d^2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ t)$

$\therefore a^2b^3-c^3d^2>d^2(b^3-c^3)>b-c>t>1$

$\because a^2b^3-c^3d^2$不是質數

五、【解】

連接$\overline{AE}$與$\overline{DE}$，

(1)　因為$\angle CBF = \angle EAB,$ 而$\angle AEB = 90°$（因為$\overline{AB}$是直徑），又$\overline{AB} = \overline{AC}$，

得到$\angle ABE = \angle ACE,$ 所以$\angle BAE = \angle CAE,$ 於是$\overline{BE} = \overline{CE} = \overline{DE}$。

(2)　觀察ΔBCF與$\Delta ADE,$ 而$\angle CBF = \angle DAE,$ 因為ΔCDE是等腰三角形，

所以$\angle BCF = \angle ADE,$ 於是$\Delta BCF \sim \Delta ADE$ (AA相似)，

所以$\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{DE}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{CF}}} \Rightarrow \overline{\mathrm{AD}} \cdot \overline{\mathrm{CF}} = \overline{\mathrm{BC}} \cdot \overline{\mathrm{DE}} = 2\overline{\mathrm{BE}} \cdot \overline{\mathrm{BE}} = 2\overline{\mathrm{BE}}^2$