

109 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（一）

編號：_____

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、設 $n \in N, n \geq 2$ ，令 $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{1+k^2+k^4}$ ， $B_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^3-1}{k^3+1}$ ，求 $A_n \cdot B_n$ 。
(9分)

二、證明：一個圓的所有內接三角形中，正三角形的面積最大。
(10分)

三、平面上有六點，任三點不共線且連接任意相異兩點的線段都不等長。證明：由此六點任取三點所構成的所有三角形中，必有某個三角形的最長邊同時是另一個三角形的最短邊。
(10分)

四、設 a, b, c, d 是正整數且滿足 $a > b > c > d$ ， $(a+b-c+d) \mid (ac+bd)$ ，
(10分) 證明 $a^2b^3 - c^3d^2$ 不是質數。

五、如圖， $\triangle ABC$ 中 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，以 \overline{AB} 為直徑的圓 O 交 \overline{AC} 於 D 且交 \overline{BC} 於 E ，而圓 O 在 B 點的切線與 \overline{AC} 的延長線相交於 F 。
(10分) 試證： $\overline{AD} \cdot \overline{CF} = 2\overline{BE}^2$ 。

