108 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

口試解答

一、【參考解答】

共有四組解$(-5,2)$、$(2,-5)$、$(1,2)$、$(2,1)$。

由於方程式具有對稱性，不妨假$s=x+y, t=xy$，

因此原式 $x^2(y-1)+y^2(x-1)=1 \Rightarrow st=s^2-2t+1 \Rightarrow (s+2)t=s^2+1$，所以

$t=\dfrac{s^2+1}{s+2}=s-2+\dfrac{5}{s+2}$。

由於t為整數，因此$s+2|5 \Rightarrow s=-7,-3,-1,3$，由此得知

$(s,t)=(-7,-10)$、$(-3,-10)$、$(-1,2)$、$(3,2)$。

分別解四個聯立方程式：

$\begin{cases} x+y=-7 \\ xy=-10 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-10 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$

故解為$(x,y)=(-5,2)$、$(2,-5)$、$(1,2)$、$(2,1)$。

二、【參考解答】

設兩個數字 r 分別排在 a_r 和 b_r 位置，

因此有 $b_r - a_r = r,\ 1 \le r \le n$ 觀察

$b_r - a_r = b_r + a_r - 2a_r$，再計算

$$\sum_{r=1}^{n}(b_r - a_r) = \sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$$

和 $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}(b_r + a_r) = 1 + 2 + \cdots + (2n+1) - (n+1)$

$$= 2n(n+1)$$

因此

$$2\sum_{r=1}^{n} a_r = \sum_{r=1}^{n}(b_r + a_r) - \sum_{r=1}^{n}(b_r - a_r)$$
$$= 2n(n+1) - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3n(n+1)}{2}$$

進而得

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = \frac{3n(n+1)}{4} \in \mathbb{N}$$

(1) $n=6$ 時，$\dfrac{3n(n+1)}{4} = \dfrac{3\cdot 6\cdot 7}{4} \notin \mathbb{N}$，所以不存在滿足條件的排列。

(2) $n=7$ 時，$3, 5, 2, 3, 2, 7, 5, 0, 6, 4, 1, 1, 7, 4, 6$ 可以滿足條件。