107 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

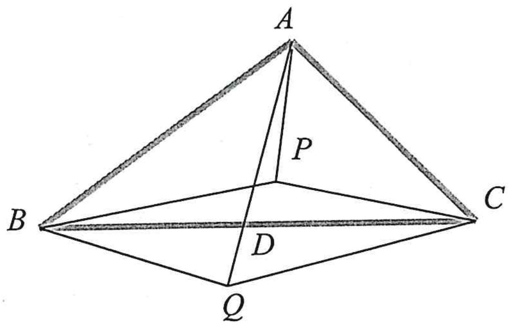
筆試試題（二）【參考解答】

一、【參考解答】

注意：外角關係 $\angle APB = \angle ACB + \angle PAC + \angle PBC$ 且

$\angle APC = \angle ABC + \angle PAB + \angle PCB$。

因此，欲證明的等式等價於 $\angle PAC + \angle PBC = \angle PAB + \angle PCB$。



作一平行四邊形 $PBQC$，則 $\angle BAC + \angle BQC = \angle BAC + \angle BPC = 180^\circ$；

由此可知：四點 A,B,Q,C 共圓。因此，由已知：$\overline{BA} \times \overline{PC} = \overline{CA} \times \overline{BP}$，

可得：

$$\begin{aligned}\Delta ABQ &= \frac{1}{2}\overline{BA} \times \overline{BQ} \times \sin\angle ABQ = \frac{1}{2}\overline{BA} \times \overline{PC} \times \sin\angle ACQ \\ &= \frac{1}{2}\overline{CA} \times \overline{BP} \times \sin\angle ACQ = \frac{1}{2}\overline{CA} \times \overline{CQ} \times \sin\angle ACQ = \Delta ACQ\end{aligned}$$

因此，若 $\overline{AQ}$ 與 $\overline{BC}$ 的交點為 D，則 D 必為 $\overline{BC}$ 的中點，故 $\overline{BD} = \overline{CD}$，即 $\overline{AD}$ 為 ΔABC 的一條中線。又 $PBQC$ 為平行四邊形，兩對角線互相平分，故 D 也是 $\overline{PQ}$ 的中點。由此可知：四點 A,P,D,Q 共線。因此，

$\angle PBC = \angle QCB = \angle QAB = \angle PAB$ 且

$\angle PCB = \angle QBC = \angle QAC = \angle PAC$。

以上兩式相加，即可得到 $\angle PAC + \angle PBC = \angle PAB + \angle PCB$。證畢！

二、【參考解答】

令 $x = 1 + a^2$，$y = 1 + b^2$，$z = 1 + c^2 \Rightarrow x \geq 1$，$y \geq 1$，$z \geq 1$

(1)先證 $\dfrac{x}{y+2z} + \dfrac{y}{z+2x} + \dfrac{z}{x+2y} \geq 1$，因為

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y+2z}}^{2}+\sqrt{\frac{y}{z+2x}}^{2}+\sqrt{\frac{z}{x+2y}}^{2}\right)$$

$$\left[\sqrt{x(y+2z)}^{2}+\sqrt{y(z+2x)}^{2}+\sqrt{z(x+2y)}^{2}\right]$$

$$\geq (x+y+z)^2$$

$$\left(\frac{x}{y+2z}+\frac{y}{z+2x}+\frac{z}{x+2y}\right)[3(xy+yz+zx)]\geq (x+y+z)^2$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+2z}+\frac{y}{z+2x}+\frac{z}{x+2y}\geq \frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)}$$

又

$$\frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)}-1=\frac{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)}{3(xy+yz+zx)}=\frac{\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]}{3(xy+yz+zx)}\geq 0$$

$$\therefore \frac{x}{y+2z}+\frac{y}{z+2x}+\frac{z}{x+2y}\geq 1$$

(2) $1+b^2\geq 2b \Rightarrow b\leq \frac{y}{2} \Rightarrow 0<z+b\leq z+\frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x}{z+b}\geq \frac{x}{z+\frac{y}{2}}$

同理 $\frac{y}{x+c}\geq \frac{y}{x+\frac{z}{2}}$, $\frac{z}{y+a}\geq \frac{z}{y+\frac{x}{2}}$

$$\therefore \frac{1+a^2}{1+b+c^2}+\frac{1+b^2}{1+c+a^2}+\frac{1+c^2}{1+a+b^2}=\frac{x}{z+b}+\frac{y}{x+c}+\frac{z}{y+a}$$

$$\frac{x}{z+\frac{y}{2}}+\frac{y}{x+\frac{z}{2}}+\frac{z}{y+\frac{x}{2}}=\frac{2x}{y+2z}+\frac{2y}{z+2x}+\frac{2z}{x+2y}$$

$$=2\left(\frac{x}{y+2z}+\frac{y}{z+2x}+\frac{z}{x+2y}\right)\geq 2$$

故 $\frac{1+a^2}{1+b+c^2}+\frac{1+b^2}{1+c+a^2}+\frac{1+c^2}{1+a+b^2}\geq 2$，得證

三、【參考解答】

設正整數n可讓方程式

$$x+y+z=n\sqrt{xyz}$$

有正整數解x,y,z，且$x=a,y=b,z=c$是所有整數解中，和$x+y+z$最小的一組，並令$a\ge b\ge c\ge 1$。此時代表$x=a$是整係數(首項係數為1)二次函數

$$f(x)=x^2+\left(2(b+c)-n^2bc\right)x+(b+c)^2$$

的一個正整數解。由根與係數關係知道：此二次函數的另一個正整數解為

$$a_1=\frac{(b+c)^2}{a},$$

即$x=a_1,y=b,z=c$使是方程式$x+y+z=n\sqrt{xyz}$的另一組正整數解，根據“和最小”假設，得

$$a_1\ge a\ge b\ge c\ge 1。$$

因為開口向上拋物線$f(x)=x^2+\left(2(b+c)-n^2bc\right)x+(b+c)^2$的兩個根為$a_1,a$且$a_1\ge a\ge b\ge c\ge 1$，所以

$$f(b)=b^2+\left(2(b+c)-n^2bc\right)b+(b+c)^2\ge 0,$$

整理，得

$$n^2c\le\left(2+\frac{c}{b}\right)^2.$$

因為$b\ge c\ge 1$，所以

$$n^2\le(2+1)^2,$$

即正整數$1\le n\le 3$。

(1) 當$n=1$時，$x=9,y=9,z=9$為$x+y+z=\sqrt{xyz}$的一組解。

(2) 當$n=2$時，$x=4,y=2,z=2$為$x+y+z=2\sqrt{xyz}$的一組解。

(3) 當$n=3$時，$x=1,y=1,z=1$為$x+y+z=3\sqrt{xyz}$的一組解。

綜合得知

$$n=1,2,3。$$