106學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科決賽筆試（二）參考解答

一、設 $f(x)$ 為一個五次實係數多項式，如果 $f(x)+1$ 能被 $(x-1)^3$ 整除，且 $f(x)-1$ 能被 $(x+1)^3$ 整除，試求滿足上述條件之所有可能多項式 $f(x)$。

【參考解答】 $f(x)=-\frac{3}{8}x^5+\frac{5}{4}x^3-\frac{15}{8}x$。

因為 $f(x)+1$ 能被 $(x-1)^3$ 整除，且 $f(x)-1$ 能被 $(x+1)^3$ 整除，可令 $f(x)-1=(x+1)^3q(x)$，其中 $q(x)$ 為一實係數多項式。所以 $f(-x)-1=(-x+1)^3q(-x)=-(x-1)^3q(-x)$，因此

$$(x-1)^3\mid[f(x)+1]+[f(-x)-1]\Rightarrow(x-1)^3\mid f(x)+f(-x)$$

同理可證: $(x+1)^3\mid f(x)-1,\quad (x+1)^3\mid f(-x)-1\Rightarrow(x+1)^3\mid f(x)+f(-x)$

所以 $(x+1)^3(x-1)^3\mid f(x)+f(-x)$。但

$$\deg f(x)=5\Rightarrow\deg[f(x)+\mathrm{f}(-\mathrm{x})]\le5\Rightarrow f(x)+\mathrm{f}(-\mathrm{x})=0$$

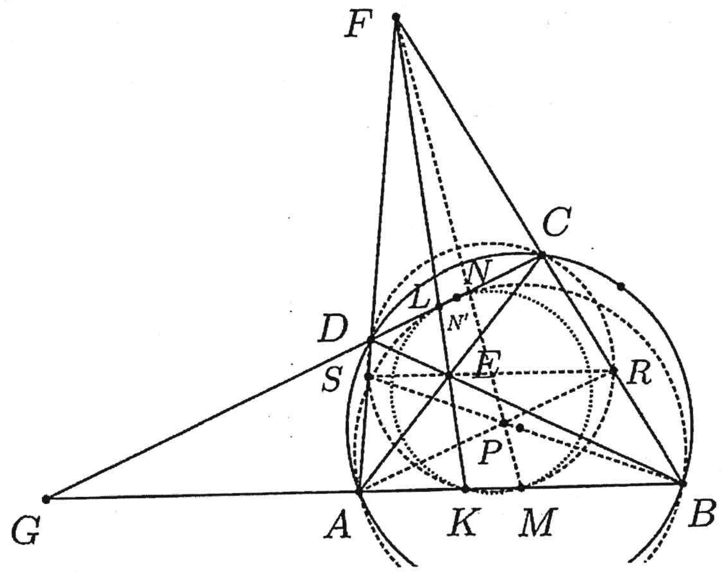
因此可得 $f(x)$ 的偶數項係數為 0。令

$$f(x)-1=(x+1)^3(ax^2+bx+c)=(x^3+3x^2+3x+1)(ax^2+bx+c)$$
$$=ax^5+(3a+b)x^4+(3a+3b+c)x^3+(a+3b+3c)x^2+(b+3c)x+c$$

又 $c=-1\Rightarrow a=-\frac{3}{8},\quad b=\frac{9}{8}\Rightarrow f(x)=-\frac{3}{8}x^5+\frac{5}{4}x^3-\frac{15}{8}x$ 。

二、設$ABCD$為圓內接四邊形，其對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$交於點E，直線$\overleftrightarrow{AD}$與直線$\overleftrightarrow{BC}$交於點F，又直線$\overleftrightarrow{EF}$分別與$\overline{AB},\overline{CD}$交於點$K,L$. 設$\Delta CDK$的外接圓$C_1$與$\overline{AB}$交於點$K,M$（相切時$M$亦為$K$），$\Delta KLM$的外接圓$C_2$交$\overline{CD}$於點$L,N$. 證明：若$F,M,N$共線，則$ABCD$為等腰梯形。

【參考解答】



1. 先證M為AB的中點：設ΔCDK的外接圓C_1分別與BC, AD交於R, S. 得 $AK\cdot AM = AS\cdot AD, BM\cdot BK = BR\cdot BC, FC\cdot FR = FD\cdot FS$. 因 AC, BD, FK 共點，由西瓦定理知 $\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BC}{CF}\cdot\frac{FD}{DA}=1$, 得 $\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BR}{RF}\cdot\frac{FS}{SA}=\frac{AM\cdot AK}{MB\cdot KB}\cdot\frac{BR\cdot BC}{RF\cdot CF}\cdot\frac{FS\cdot FD}{DA\cdot SA}=1$. 所以$AR, BS, FM$共點，交點記為$P$. 又因$\angle FSR=\angle DCF=\angle FAB$, $SR\parallel AB$. 由此知AR, BS 的交點P在ΔABF過F的中線上，所以M為AB的中點。

2. 設N'為CD的中點，同 1. 知ΔABL的外接圓C_2過N'. 設AB, CD交於G,考慮對C_1, C_2的圓冪得 $GL\cdot GN'=GA\cdot GB=GD\cdot GC=GK\cdot GM$. 因此 K, M, L, N'共圓，$N=N'$.

3. 因A, B, C, D共圓，$\Delta FAB\sim\Delta FCD$. 而M, N分別為AB, CD的中點，所以 $\Delta FAM\sim\Delta FCN$. 得$\angle AFM=\angle CFN$. 由此可知當F, M, N共線時，FNM為分角線。因此$FD=FC, FA=FB$,得$AB//CD$且$AD=BD$, 故 $ABCD$為等腰梯形。

三、(a) 證明: $\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!+1=(n+1)!$

(b) 證明：對於任意正整數 ，都可寫成 $n=\sum_{k\ge1} a_k\cdot k!$ 的形式，其中a_k為整數，$0\le a_k\le k$；並且這種表示法唯一。

【參考解答】

(a) 我們用數學歸納法即可證明引理：$\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!+1=(n+1)!$ 。

(b) (1) 現在我們用數學歸納法證明本題。

$n=1$，顯然成立. 設n成立，即$n=\sum_{k\ge1} a_k\cdot k!$, $0\le a_k\le k$，a_k為整數

若$a_1=0$，則$n+1=\sum_{k\ge1} b_k\cdot k!$，其中$b_1=1$，$b_k=a_k$, $k\ge 2$ ，成立

假設$a_k=k$, $k=1,2,\cdots,m$，且$a_{m+1}<m+1$

則$n+1=\sum_{k=1}^{m} k\cdot k!+\sum_{k\ge m+1} a_k\cdot k!+1$

利用引理，得$n+1=(m+1)!+\sum_{k\ge m+1} a_k\cdot k!=\sum_{k\ge1} b_k\cdot k!$

其中 $b_k=0$, $k=1,2,\cdots,m$; $1\le b_{m+1}=a_{m+1}+1\le m+1$; $0\le b_k=a_k\le k$, $k\ge m+2$

(2) $n=\sum_{k=1}^{r} a_k \cdot k! = \sum_{k=1}^{s} b_k \cdot k!$，其中 $r \le s$ 且 $a_r \ge 1$ 且 $b_s \ge 1$

若 $r \ne s$，不妨設 $r < s$

則 $n \le \sum_{k=1}^{r} k \cdot k! = (r+1)! - 1 < s! \le \sum_{k=1}^{s} b_k \cdot k! = n$，矛盾

$\therefore\ r = s$

若 $a_r \ne b_r$，不妨設 $a_r < b_r$

則 $n \le \sum_{k=1}^{r-1} k \cdot k! + a_r \cdot r! \le r! - 1 + a_r \cdot r! = (a_r+1) r! - 1 < b_r \cdot r! \le \sum_{k \ge 1} b_k \cdot k! = n$，矛盾

$\therefore\ a_r = b_r$

n 的兩式同時消去 $a_r \cdot r!$ 後，同樣方法可得到 $a_{r-1} = b_{r-1}, \dots,\ a_1 = b_1$