

106 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科決賽

筆試試題 (二)

注意事項：

- (1) 時間：2 小時 (13:30~15:30)
- (2) 配分：每題皆為 7 分
- (3) 不可使用計算器
- (4) 請將答案依序寫在答案卷內

一、設 $f(x)$ 為一個五次實係數多項式，如果 $f(x) + 1$ 能被 $(x - 1)^3$ 整除，且 $f(x) - 1$ 能被 $(x + 1)^3$ 整除，試求滿足上述條件之所有可能多項式 $f(x)$ 。

二、設 $ABCD$ 為圓內接四邊形，其對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD} 交於點 E ，直線 \overline{AD} 與直線 \overline{BC} 交於點 F ，又直線 \overline{EF} 分別與 \overline{AB} 、 \overline{CD} 交於點 K 、 L 。設 $\triangle CDK$ 的外接圓 C_1 與 \overline{AB} 交於點 K 、 M （相切時 M 亦為 K ）， $\triangle KLM$ 的外接圓 C_2 交 \overline{CD} 於點 L 、 N 。證明：若 F 、 M 、 N 共線，則 $ABCD$ 為等腰梯形。

三、(a) 證明：
$$\sum_{k=1}^n k \cdot k! + 1 = (n+1)!$$

(b) 證明：對於任意正整數 n ，都可寫成 $n = \sum_{k \geq 1} a_k \cdot k!$ 的形式，其中 a_k 為整數， $0 \leq a_k \leq k$ ；並且這種表示法唯一。