

陸、筆試試題及參考解答

106 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽 數學科決賽

筆試試題 (一)

注意事項：

- (1) 時間：2 小時 (13:30~15:30)
- (2) 配分：每題皆為 7 分
- (3) 不可使用計算器
- (4) 請將答案依序寫在答案卷內

-
- 一、設 n 與 p 都是正整數。試證：若多項式 $f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + p$ 可以分解為兩個次數不小於 1 的整係數多項式之乘積，則 p 不是質數。
 - 二、已知凸四邊形 $ABCD$ 的周長為 10，對角線 $\overline{AC} = \overline{BD} = 4$ 。試問四邊形 $ABCD$ 最大可能的面積為多少？
 - 三、設 n 為正整數。今有 $2n$ 張紙牌，分別寫上號碼 $1, 2, 3, \dots, 2n$ 。將這些紙牌牌成一列： a_1, a_2, \dots, a_{2n} ，不妨將此種排列記為 S 。對於此種牌型 S 中的 i 號牌和 $2n+1-i$ 號牌中間所夾的紙牌張數記為 f_i ，並令

$$|S| = f_1 + f_2 + \cdots + f_n.$$

例如，當 $n = 2$ 且排列 $S: 1324$ ，則 $f_1 = 2, f_2 = 0$ ，因此 $|S| = f_1 + f_2 = 2$ 。

回答以下的問題

- (1) 證明：對於任何排列 S ， $|S|$ 必為偶數。
- (2) 給定 n ，證明 $|S|$ 的最大值為 $n(n-1)$ 。並求出滿足 $|S| = n(n-1)$ 的所有可能的 S 的數目。