106 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科決賽口試（一）參考解答

一、設 S 為 100 個相異正數所形成的集合。試證：集合 S 中存在兩個元素 x,y 滿足 $0<x-y<\dfrac{(x+1)(y+1)}{99}$ 。

【參考解答】

設 $S=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{100}\}$，其中 $0<x_i$ 由小排到大，即 $0<x_1<x_2<x_3<\cdots<x_{100}$.

令 $a_i=\dfrac{99}{x_i+1}$，$i=1,2,\cdots,100$，則 $0<a_{100}<a_{99}<\cdots<a_1<99$，且 $x_i=\dfrac{99-a_i}{a_i}$，$i=1,2,\cdots,100$.

對任意的 $1\le i<j\le 100$，$x_i<x_j$.

$$\begin{aligned}
x_j-x_i<\frac{(x_i+1)(x_j+1)}{99} &\Leftrightarrow \frac{99-a_j}{a_j}-\frac{99-a_i}{a_i}\le\frac{\frac{99}{a_j}\cdot\frac{99}{a_i}}{99}\\
&\Leftrightarrow \frac{99a_i-99a_j}{a_i\cdot a_j}\le\frac{99}{a_i\cdot a_j}\\
&\Leftrightarrow a_i-a_j\le 1
\end{aligned}$$

若集合 S 中不存在兩個元素 x,y 滿足條件，則

$$a_1-a_2>1,\ a_2-a_3>1,\ a_3-a_4>1,\ \cdots,\ a_{99}-a_{100}>1.$$

將這 100 個式子加起來可得 $a_1-a_{100}>99$. 但 $a_1<99$，$a_{100}>0$，所以 $a_1-a_{100}<99$，矛盾！

因此集合 S 中存在兩個元素 x,y 滿足條件。

二、設 $A_1,A_2,\cdots,A_{2017}$ 為平面上任三點都不共線的 2017 個點，任兩點連成的線段所成的集合以 X 表示。試證：可以將 X 中的線段每三個一組分堆，使得每一組的三條線段都恰可圍成一個三角形。

【參考解答】

注意：線段總數 $|X|=C_2^{2017}$ 是 3 的倍數。

以下利用數學歸納法證明：對任意正整數 $n=3k+1$ 個點所構成的 C_2^n 條線段集合 X_n 都可以每三個線段一組分堆，使得每一組的三條線段都恰可圍成一個三角形。

特別的，$n=2017$ 時命題成立。

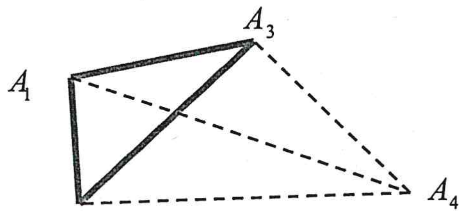
(1) 當 $n=4$ 時，令 $\overline{A_1A_2}=\min\limits_{1\le i<j\le 4}\overline{A_iA_j}$ 。可設 $\overline{A_1A_3}+\overline{A_2A_3}\le\overline{A_1A_4}+\overline{A_2A_4}$ ，得知：

$$\begin{aligned}
2(\overline{A_1A_4}+\overline{A_2A_4})&\ge(\overline{A_1A_4}+\overline{A_2A_4})+(\overline{A_1A_3}+\overline{A_2A_3})=(\overline{A_1A_4}+\overline{A_1A_3})+(\overline{A_2A_4}+\overline{A_2A_3})\\
&>\overline{A_3A_4}+\overline{A_3A_4}=2\overline{A_3A_4}\ ,
\end{aligned}$$

故 $\overline{A_1A_4}+\overline{A_2A_4}>\overline{A_3A_4}$ 。另一方面，

$$\overline{A_1A_4}+\overline{A_3A_4}\ge\overline{A_1A_4}+\overline{A_1A_2}>\overline{A_2A_4}\ \text{且}\ \overline{A_2A_4}+\overline{A_3A_4}\ge\overline{A_2A_4}+\overline{A_1A_2}>\overline{A_1A_4}\ 。$$

因此，六條線段可分成 $X_4=\left\{\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\overline{A_3A_1}\right\}\cup\left\{\overline{A_1A_4},\overline{A_2A_4},\overline{A_3A_4}\right\}$ 滿足所求。



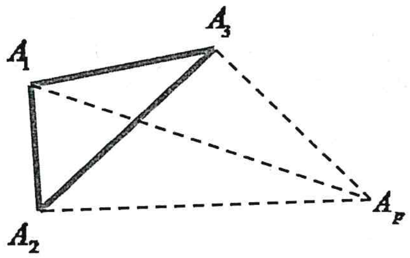
(2) 假設當 $n=3k+1$ 時，命題成立。則當 $n=3(k+1)+1$ 時，不失一般性，我們可令 $\overline{A_1A_2}=\min\limits_{1\le i<j\le 3k+4}\overline{A_iA_j}$，並設點 A_3 滿足 $\overline{A_1A_3}+\overline{A_2A_3}=\min\limits_{j\notin\{1,2\}}(\overline{A_1A_j}+\overline{A_2A_j})$。

仿 $n=4$ 時的證明，可知：對任意 $p\in\{4,5,6,\cdots,3k+4\}$，由 A_1,A_2,A_3,A_p 四點所構成的六條線段集合 X_4 都可以分堆如下：$X_4=\{\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\overline{A_3A_1}\}\cup\{\overline{A_1A_p},\overline{A_2A_p},\overline{A_3A_p}\}$。

因此，以 A_1,A_2,A_3 為一(或二)端點的所有線段集合 Y（共 $9k+6$ 條線段）可以分堆如下：

$$Y=\{\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\overline{A_3A_1}\}\cup\bigcup_{p=4}^{3k+4}\{\overline{A_1A_p},\overline{A_2A_p},\overline{A_3A_p}\}。$$

去除三點 A_1,A_2,A_3 及上述 $9k+6$ 條線段集 Y，其餘的 $3k+1$ 個點所構成的線段集合 X_{3k+1} 由數學歸納法的假設，我們可以將 X_{3k+1} 分堆成三個一組，使得每一組的三條線段都恰可圍成一三角形。因此，$X_{3k+4}=Y\cup X_{3k+1}$ 也可以分堆。



【類】設 $A_1,A_2,\cdots,A_{107}$ 為平面上任三點都不共線的107個點，任兩點連成的線段所成的集合以 X 表示。試證：去掉 X 中任一條線段後，都可以將其餘的線段每三個一組分堆，使得每一組的三條線段都恰可圍成一個三角形。